MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XVI

TORINO

DALLA STAMPERIA REALE

MDCCCLVII

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

S. 1104. B 56.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo XVI.

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
MDCCCLVII.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

INDICE

Elenco degli Accademici Residenti, Nazionali non Residenti e Stranieri . . . . . pag. IX

Mutazioni accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume . . . . . » XVIII

Doni fatti all' Accademia dal 1.° giugno 1855 al 31 dicembre 1856 . . . . . » XXI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe di Scienze Fisiche e Matematiche nell'anno 1855; scritta dal Professore Eugenio Sismonda, Segretario Aggiunto di essa Classe . . . . » LXI

— Cenno necrologico intorno agli Accademici Conte Amedeo Avogadro di Quaregna, e Cavaliere Giacinto Provana di Collegno . . . . . » LXI

— Sobrero e Cantu' — Parere su una domanda di privilegio per *la fabbricazione di un concime particolare denominato* Lingottina » LXVI

— Indirizzo dell'Accademia a S. M. il Re, nell'infausta circostanza della morte delle due Regine Maria Teresa e Maria Adelaide » LXIX

— Sobrero e Sismonda (Angelo) — Parere su una domanda di privilegio per *la fabbricazione di un combustibile artificiale* . . » ivi

— Botto, Menabrea e Mosca — Parere su una domanda di privilegio per *una nuova disposizione telegrafica detta* Telegrafo delle locomotive . . . . . » LXV

— Sobrero e Cantu' — Parere su una domanda di privilegio per *una nuova foggia di forni ad uso della fabbricazione del vetro* . » LXXI

— Richelmy e Cavalli — Parere su una domanda di privilegio per *una macchina destinata alla macinatura delle biade, ed alla preparazione dell'olio d'olivo* . . . . . » ivi

— Sismonda (Eugenio) e De Filippi — Parere su una Memoria manoscritta del Barone sig. Enrico Aucapitaine, col titolo: *Notice sur les mollusques Lithophages* . . . . . pag. LXVII

— Zantedeschi — Protesta per rivendicare a sè la priorità dell'idea di costrurre *telegrafi elettro-magnetici delle stazioni e delle locomotive delle ferrovie* . . . . . » LXVIII

— Sobrero e Sismonda (Angelo) — Parere su una domanda di privilegio per *una nuova foggia di forno per la fabbricazione del vetro* . . . . . » LXXIV

— Cavalli e Botto — Parere su una domanda di privilegio per *materassi elastici di nuova forma* . . . . . » ivi

— Cavalli e Menabrea — Parere su una domanda di privilegio per *nuove aggiunte al sistema già privilegiato di sospensione e trazione dei veicoli ad uso delle ferrovie* . . . . . » LXXV

— Sismonda (Eugenio) e De Filippi — Parere su una Memoria manoscritta del Prof. sig. Eugenio Truqui, col titolo: *Anthicini insulae Cypri et Syriae* . . . . . » ivi

— Carron du Villards — *Catalogne des plantes qui naissent spontanément dans l'isle de Saint-Thomas* . . . . . » LXXVII

— Id. — *Influenza dello strabismo nell'esercizio di varie professioni* » XC

— Elenco di domande di privilegio restituite al sig. Ministro delle Finanze, senza parere Accademico, dopo promulgata la Legge 12 marzo 1855 . . . . . » XCII

— Botto — *Schema di un telegrafo elettro-magnetico a un solo filo, con cui si possono trasmettere e ricevere dispacci contemporaneamente ecc.* (presentato alla Classe per prender data) . . » ivi

— Cantu' — Comunicazione verbale *sull'istantanea reazione chimica del gaz cloro e del gaz idrogeno mediante la luce elettrica* . . » ivi

— Menabrea — Comunicazione di una lettera del Cav. Faa di Bruno *su un teorema generale di analisi* . . . . . » XCIII

— Cantu' — Comunicazione verbale *sulla natura delle acque minerali di Recoaro* . . . . . » XCIV

— Id. — Comunicazione verbale *sull'arsenico contenuto nell'acido solforico, e nell'acido cloridrico, ed osservazioni intorno al procedimento*

chimico oggidì praticato nella ricerca dell'arsenico associato a materie organiche . . . . . pag. XCIV

— Botto — *Nota, per pigliar data, riguardante una nuova estensione data al sistema telegrafico a doppia e contemporanea trasmissione mercè di un solo filo conduttore, sistema di cui è cenno nella scheda già presentata alla Classe, ecc.* . . . . . » XCVI

— Sismonda (Angelo), Avogadro e Sismonda (Eugenio) — Parere su una Memoria manoscritta del Prof. sig. Quintino Sella, intitolata: *Studii sulla mineralogia sarda* . . . . . » ivi

— Alberto Della-Marmora — Comunicazione di una lettera del Capitano sig. De-Vecchi, contenente *osservazioni geologiche fatte nei dintorni di Balaklava e di Kamara* . . . . . » XCVII

Mémoire sur la formation de l'équation du *quatrième* degré, et celle du *sixième* degré, desquelles dépend la solution littérale de l'équation générale du *cinquième* degré, suivant la méthode proposée par Lagrange en 1771; par J. Plana . . . » 1

Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface intérieure et sphérique d'une sphère creuse de métal, et à la surface d'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans sa cavité; par J. Plana . . . . . » 57

Démonstration nouvelle de l'équation

$$\varphi(t+x.\sqrt{-1})+\varphi(t-x.\sqrt{-1})$$
$$=\alpha\tfrac{1}{2}\varphi(t)+\alpha'\left[\varphi(t+x)+\varphi(t-x)\right]+\alpha''\left[\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)\right]$$
$$+\alpha'''\left[\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)\right]+\text{etc.}$$

donnée par Lagrange pour exprimer la valeur réelle de la somme de deux quantités imaginaires, en supposant connues les valeurs réelles de $\varphi(t)$ par le moyen d'une courbe; par J. Plana . . . . . » 97

Del moto de' proietti ne' mezzi resistenti; del Conte Paolo Di San Roberto . . . . . » 107

Jungermanniearum americanarum Pugillus; auctore J. De Notaris » 211

Sertulum orientale, seu recensio plantarum in Olympo Bithynico, in agro Byzantino et Hellenico, nonnullisque aliis orientis regionibus, annis 1849-1850, a Josepho Clementi collectarum . . . . . pag. 239

Anthicini insulae Cypri et Syriae; auctore Prof. Eugenio Truqui » 339

Lois générales de divers ordres de phénomènes dont l'analyse dépend d'équations linéaires aux différences partielles, tels que ceux des vibrations et de la propagation de la chaleur; par L. F. Ménabréa . . . . . » 373

Deuxième Mémoire pour servir à l'histoire Génétique des Trématodes; par le Docteur Prof.r Ph. De Filippi . . . » 419

Note sur le terrain nummulitique supérieur du Dego, des Carcare, etc. dans l'Apennin Ligurien; par le Professeur Eugène Sismonda . . . . . » 443

Micromycetes italici novi vel minus cogniti; auctore Josepho De Notaris . . . . . » 457

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, E STRANIERI

AL I.° DI GENNAIO MDCCCLVII.

ACCADEMICI NAZIONALI.

Presidente

Plana, Barone Giovanni, Senatore del Regno, Regio Astronomo, Professore d'Analisi nella Regia Università, Direttore Generale degli studi nella Regia Accademia Militare, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, G. Cord. ❋, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F., C. della C. F. d'A. di 2.ª classe.

Vice-Presidente

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, Luogotenente-Generale, Senatore del Regno, Membro del Consiglio delle Miniere, della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e della Commissione superiore di Statistica, G. Cord. ❋, ✠, Cav. e Cons. onor. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

Tesoriere

Peyron, Abate Amedeo, Teologo Collegiato, Senatore del Regno. Professore emerito di lingue orientali, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Accademico corrispondente della Crusca, ❋, Cav. e Cons. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Direttore

Moris, Dottore Giuseppe Giacinto, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠, Senatore del Regno, Professore di Botanica nella Regia Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Membro straordinario del Consiglio superiore di Sanità, Direttore del Regio Orto Botanico, Membro delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena.

Segretario

Carena, Giacinto, Professore di Filosofia, Membro onorario della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Accademico corrispondente della Crusca, ✻, Cav. e Cons. ✠, C. di Cr. in oro dell'O. del Salv. di Grecia.

Segretario Aggiunto

Sismonda, Eugenio, Dottore in Medicina, Professore Sostituito di Mineralogia nella R. Università degli Studi, Professore di Storia Naturale nel Collegio nazionale di Torino, Membro del Collegio di Scienze fisiche, e delle Reali Accademie Medico-Chirurgica, e d'Agricoltura di Torino, ✻.

ACCADEMICI RESIDENTI

Plana, Giovanni, *predetto.*

Carena, Giacinto, *predetto.*

Moris, Giacinto, *predetto.*

Cantù, Gian Lorenzo, Senatore del Regno, Dottore Collegiato in Medicina, Professore emerito di Chimica generale nella Regia Università, Vice-Presidente del Consiglio delle Miniere, Membro ordinario del Consiglio superiore di Sanità, delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Consigliere della Città, Ufliz. ✻.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto.*

Botto, Giuseppe Domenico, Professore emerito di Fisica nella Regia Università, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino. Uffiz. ✻.

Sismonda, Angelo, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo Mineralogico della Regia Università di Torino, Membro del Consiglio Universitario, del Consiglio delle Miniere, della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, della Società Geologica di Londra, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻, ✠.

Menabrea, Nobile Luigi Federigo, Colonnello nel Corpo Reale del Genio Militare, Professore di Costruzione nella R. Università, Deputato al Parlamento nazionale, ✻, Comm. di S. G. di T., di Carlo III di Sp., del M. Civ. di Sass., di C. di Port., Uffiz. della L. d'O. di F.

Giulio, Carlo Ignazio, Senatore del Regno, Consigliere di S. M., Consigliere di Stato, Professore emerito di Meccanica nella Regia Università di Torino, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura, della Commissione superiore di Statistica, della R. Camera d'Agricoltura e di Commercio, Professore di Meccanica applicata alle Arti e Direttore del R. Instituto Tecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Consigliere della Città di Torino, Comm. ✻, ✠, Cav. della L. d'O. di F.

Riberi, Alessandro, Senatore del Regno, Chirurgo Primario di S. M. il Re e della Reale Famiglia, Medico-Chirurgo in 1.° delle LL. AA. RR. il Duca e la Duchessa di Genova, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Medicina operativa nella Regia Università, Presidente del Consiglio superiore militare di Sanità, Consigliere perpetuo del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, e straordinario di quello della Sanità pubblica, Chirurgo dello Spedale Maggiore di S. Giovanni Battista, Membro dell'Amministrazione dell'Opera della Maternità, Membro della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino, Comm. ✻, della L. d'O. di Fr. e dell'O. di C. di Port., Cav. e Cons. ✠.

Mosca, Carlo Bernardo, Senatore del Regno, Primo Architetto di S. M., Primo Ingegnere Architetto dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Ispettore di Prima Classe nel Corpo Reale del Genio Civile, Membro del Consiglio degli Edili, della Reale Accademia delle Belle Arti, di quella d'Agricoltura di Torino, dell'Accademia Pontificia delle Belle Arti denominata di San Luca a Roma e dell'I. e R. Accademia delle Belle Arti di Milano, Consigliere della Città, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F.

Sismonda, Dottore Eugenio, *predetto.*

Sobrero, Ascanio, Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore di Chimica applicata alle Arti, Professore Sostituito di Chimica generale nella Regia Università degli studi, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, ✻.

Cavalli, Giovanni, Colonnello d'Artiglieria, Consigliere della Città, Membro del Consiglio delle Miniere, dell'Accademia delle Scienze militari di Stockolma, ✻, ✠, Cav. di S. Wl. di R. di 4.ª cl., della Sp. di Sv., dell'A. R. di Pr. di 3.ª cl.

Berruti, Secondo Giovanni, Professore di Fisiologia sperimentale nella R. Università, Membro del Consiglio Universitario, del Consiglio superiore di Sanità, della Giunta provinciale di Statistica, della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino, Membro onorario della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻.

Demichelis, Filippo, Uffiz. ✻, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore emerito d'Anatomia, Membro del Consiglio Universitario, Consigliere ordinario aggiunto nel Consiglio superiore militare di Sanità, Membro straordinario del Consiglio superiore di Sanità, Socio della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino.

Richelmy, Prospero, ✻, Professore d'Idraulica, e Direttore dello Stabilimento Idraulico della Regia Università, Membro straordinario del Consiglio Superiore di pubblica Istruzione.

De Filippi, Dottore Filippo, ✻, Professore di Zoologia e Direttore del Museo Zoologico della Regia Università, Membro della Reale Accademia Medico-Chirurgica e di quella d'Agricoltura di Torino.

Sella, Quintino, Ingegnere delle Miniere, Professore di Geometria nel Regio Istituto Tecnico.

Delponte, Giambatista, ✻, Dottore di Medicina e di Chirurgia, Professore Sostituito di Botanica nella Regia Università, Membro delle Reali Accademie Medico-Chirurgica e d'Agricoltura di Torino.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Borgnis, Giuseppe Antonio, Ingegnere Civile, ✻, Membro dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, Professore ordinario di Matematica applicata nell'Università di Pavia.

Bertoloni, Antonio, ✠, Professore di Botanica, a Bologna.

Marianini, Stefano, ✠, Presidente della Società Italiana delle Scienze, Professore di Fisica sperimentale nell'Università di Modena.

De Notaris, Giuseppe, ✠, Dottore in Medicina, Professore di Botanica nella Regia Università di Genova.

Pareto, Marchese Lorenzo, a Genova.

Spinola, Marchese Massimiliano, Senatore del Regno, a Genova.

Billiet, Monsignor Alessio, G. Cord. ❋, Senatore del Regno, Presidente Perpetuo Onorario dell'Accademia Reale di Savoia, Arcivescovo di Sciamberì.

Mossotti, Ottaviano Fabrizio, ❋, C. di S. G. di T., Professore di Fisica e di Meccanica Celeste nell'I. R. Università di Pisa.

Belli, Dottor Giuseppe, ❋, Membro dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, Professore di Fisica nell'Università di Pavia.

Cerise, Lorenzo, Dottore in Medicina, ✠, Cav. della L. d'O. di F., a Parigi.

ACCADEMICI STRANIERI.

Di Humboldt, Barone Alessandro, Com. della L. d'O. di F., Membro dell'Istituto di Francia e della Reale Accademia delle Scienze di Berlino.

Élie di Beaumont, Giambatista Armando Lodovico Leonzio, Senatore, Ispettore generale delle Miniere, Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto, Membro del Consiglio Imperiale dell'Istruzione pubblica, Professore di Geologia nel Collegio di Francia, Comm. della L. d'O. di F., e dell'O. ❋, a Parigi.

Herschel, Giovanni, Astronomo, Membro della Società Reale di Londra.

Brown, Roberto, Membro della Società Reale di Londra.

Poncelet, Giovanni Vittorio, Generale del Genio, G. Uffiz. della L. d'O. di F., Membro dell'Istituto di Francia, a Parigi.

Tiedemann, Cavaliere Federigo, Professore d'Anatomia e di Fisiologia comparativa nell'Università di Heidelberg.

Faraday, Michele, Professore di Chimica, Membro della Società Reale di Londra.

Liebig, Barone Giusto, ❋, Professore di Chimica nella R. Università di Monaco (*Baviera*).

Poinsot, Luigi, G. Uffiz. della L. d'O., Membro dell'Istituto di Francia, a Parigi.

Panizza, Bartolommeo, C. C F. d'A., Membro effettivo dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti di Milano, Professore ordinario di Anatomia nell'I. R. Università di Pavia.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Sauli d'Igliano, Conte Lodovico, Senatore del Regno, Consigliere di Legazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠.

Segretario

Gazzera, Abate Costanzo, Professore di Filosofia, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Prefetto della Biblioteca e Consigliere ordinario della Regia Università, Membro della Deputazione permanente delle Scuole secondarie, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), ✻, ✠.

ACCADEMICI RESIDENTI

Carena, Giacinto, *predetto.*

Peyron, Amedeo, *predetto.*

Cordero de' Conti di San Quintino, Cavaliere Giulio, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino e della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ✻.

Gazzera, Costanzo, *predetto.*

Manno, Barone Giuseppe, Senatore del Regno, Primo Presidente della Corte di Cassazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Accademico corrispondente della Crusca, G. Cord. ✻, Cav. e Cons. onor. ✠.

Sauli d'Igliano, Lodovico, *predetto.*

Sclopis di Salerano, Conte Federigo, Primo Presidente, Senatore del Regno, Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Consigliere della Città, Socio corrispondente dell'Istituto di

Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Com. ❋, Cav. e Cons. ✠, C. di S. G. di T. e della L. d'O. di F.

Cibrario, Nobile Giovanni Antonio Luigi, Senatore del Regno, Primo Presidente di Corte d'Appello, Primo Segretario di S. M. pel Gran Magistero dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della Giunta di Antichità e Belle Arti, Consigliere della Divisione, della Provincia e della Città di Torino, Gr. Cord. ❋, ✠, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., Comm. dell'O. di Cr. di Port., Cav. dell'O. di W. di Sv., di S. Stan. di Russ., ecc.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto*.

Baudi di Vesme, Conte Carlo, Senatore del Regno, Membro del Consiglio Universitario di Torino, della Commissione provinciale di Statistica, Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ❋, ✠.

Bertolotti, Davide, Consigliere di S. M., ❋, ✠, Cav. dell'O. del Salv. di Grec., e dell'O. di Leop. del Belg.

Promis, Domenico Casimiro, Bibliotecario di S. M., Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ❋.

Ricotti, Ercole, ❋, ✠, ✪, Capitano nel Corpo Reale del Genio Militare, Professore di Storia moderna nella R. Università, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria.

Bon-Compagni, Cavaliere e Presidente Carlo, Consigliere di Stato, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Commissione superiore di Statistica, Comm. ❋.

Promis, Carlo, Professore di Architettura Civile nella Regia Università, Regio Archeologo, Ispettore dei Monumenti d'Antichità, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti, ❋.

Gorresio, Abate Gaspare, Dottore del Collegio di Scienze e Lettere, Assistente alla Biblioteca della Regia Università, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), ✠, ed Uffiz. della L. d'O. di F.

Barucchi, Avvocato Francesco, Professore di Storia antica nella R. Università, Direttore del R. Museo d'Antichità ed Egizio, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, ❋.

Bertini, Giovanni Maria, ❋, Professore di Storia della Filosofia antica nella Regia Università di Torino.

Capellina, Domenico, ❋, Dottore del Collegio di Filosofia e Belle Lettere nella R. Università, Professore di Retorica nel Collegio nazionale di Torino.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Varese, Carlo, Dottore in Medicina, ✠, a Voghera.

Coppi, Abate Antonio, Membro della Pontificia Accademia di Archeologia, a Roma.

Charvaz, Monsignor Andrea, G. Cord. ❋, Arcivescovo di Genova.

Calleri, Giuseppe Maria, ✠, Gran Collare Tartaro dell'Impero Cinese, Cav. della L. d'O. di F. e dell'O. di Leop. del Belg., Segretario Interprete dell'Imperatore de' Francesi per le lingue della Cina, a Parigi.

Pillet-Will, Conte Federigo, Com. ❋, e della L. d'O. di F., Reggente della Banca di Francia, a Parigi.

Martini, Avvocato Pietro, ❋, ✠, Socio del Collegio di Filosofia, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Presidente della Biblioteca della Regia Università, a Cagliari.

Menabrea, Leone, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Consigliere nel Magistrato d'Appello, Segretario dell'Accademia Reale di Savoia, ❋, Cav. dell'O. di Carlo III di Sp. e di C. di Port., a Sciamberì.

Costa di Beauregard, Marchese Leone, Comm. ❋, Presidente dell'Accademia Reale di Savoia.

Spano, Teologo Giovanni, ❋, Canonico Protonotario Apostolico della Chiesa Metropolitana di Cagliari, Professore emerito di Sacra Scrittura e Lingue Orientali, Preside del Real Collegio-Convitto di Santa Teresa, a Cagliari.

ACCADEMICI STRANIERI.

Brugière di Barante, Barone Amabile Guglielmo Prospero, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., Gr. Cord. di S. Aless. Newschi di R., Membro dell'Istituto di Francia, a Parigi.

Manzoni, D. Alessandro, Accademico della Crusca, a Milano.

Di Savigny, Federigo Carlo, Professore nella Regia Università e Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino.

Borghesi, Bartolomeo, C. dell'O. del M. di Pr., Patrizio della Repubblica di San Marino.

Thiers, Adolfo, Gr. Uffiz. della L. d'O., Membro dell'Istituto di Francia, a Parigi.

Babington Macaulay, Tomaso, Professore nell'Università di Cambridge (Gran Bretagna).

Di Boeckh, Cavaliere Augusto, Professore nell'Università e Membro dell'Accademia Reale delle Scienze di Berlino.

Cousin, Vittorio, Comm. della L. d'O. di F., Membro dell'Istituto di Francia, a Parigi.

MUTAZIONI

accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume.

MORTI

9 di luglio 1856.

Avogadro di Quaregna, Conte Amedeo, Comm. ✻, ✠, Mastro Uditore nella Regia Camera de' Conti, Professore emerito di Fisica Sublime nella Regia Università, *Direttore della Classe fisico-matematica* di questa Reale Accademia delle Scienze.

27 di luglio 1856.

Provana del Sabbione, Cavaliere Luigi Giuseppe, ✻ e di S. Gio. di Gerus., Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore d'Istruzione pubblica, e della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, *Accademico residente* della Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

29 di settembre 1856.

Provana di Collegno, Cavaliere Giacinto, Comm. ✻ di 1.ª classe, Cav. ✪ e della L. d'O. di Fr., Luogotenente Generale, Senatore del Regno, Membro del Consiglio delle Miniere, *Accademico residente* della Classe delle Scienze fisiche e matematiche.

17 di ottobre 1856.

Canina, Luigi, Architetto, ✠, C. della L. d'O. di F., del Mer. Civ. di Sass., di D. di Danim., Accademico di merito residente della Pontificia Accademia di S. Luca, Socio ordinario della Pontificia Accademia di Archeologia di Roma, *Accademico nazionale non residente* della Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

23 di novembre 1856.

Di Hammer-Purgstall, Barone Giuseppe, Comm. dell'Ord. I. di Leopoldo d'Austria, *Accademico straniero* della Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

NOMINE

Panizza, Bartolommeo, Membro dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti di Milano, Professore di Anatomia nell' I. R. Università di Pavia, nominato il 16 di dicembre 1855 ad *Accademico straniero* nella Classe delle Scienze fisiche e matematiche.

Costa di Beauregard, Marchese Leone, Comm. ❋, Presidente dell'Accademia Reale di Savoia, nominato il 26 giugno 1856 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

Cousin, Vittorio, Comm. della L. d' O., Membro dell' Istituto di Francia, nominato il medesimo giorno ad *Accademico straniero* nella stessa Classe.

Spano, Giovanni, ❋, Canonico Protonotario Apostolico della Chiesa Metropolitana di Cagliari, Professore emerito di Sacra Scrittura e Lingue Orientali, Preside del R. Collegio-Convitto di S. Teresa, a Cagliari, nominato il 27 di novembre 1856 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe predetta.

Sella, Quintino, Ingegnere delle Miniere, Professore di Geometria nel R. Istituto Tecnico, nominato il 7 di dicembre 1856 ad *Accademico residente* nella Classe delle Scienze fisiche e matematiche.

Delponte, Giambatista, ❋, Dottore di Medicina e di Chirurgia, Professore Sostituito di Botanica nella R. Università, Membro delle Reali Accademie Medico-Chirurgica e d'Agricoltura di Torino, nominato il medesimo giorno ad *Accademico residente* nella stessa Classe.

ELEZIONE DI UFFIZIALI

Moris, Comm. e Prof. Giuseppe, eletto il 16 di novembre 1856 alla carica triennale di Direttore della Classe delle Scienze fisiche e matematiche, in luogo del Conte e Comm. Avogadro di Quaregna.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

DAL 1.° GIUGNO 1855 AL 31 DICEMBRE 1856

Flora Brasiliensis, sive enumeratio plantarum in Brasilia hactenus detectarum, quas, cura Musei Caes. Reg. Vindobonensis, suis aliorumque botanicorum studiis descriptas et methodo naturali digestas, sub auspiciis Ferdinandi I. Austriae Imperatoris et Ludovici I. Bavariae Regis, edidit Carolus Frid. Phil. De Martius. Fasciculi XV-XVII. Lipsiae, 1855-56, fol. fig. — S. M. IL RE *di Sardegna.*

Denkmäler aus Aegypten und Aethiopien nach den Zeichnungen der von Seiner Majestät dem Könige von Preussen Friedrich Wilhelm IV. nach diesen ländern gesendeten und in den Jahren 1842-1845. Ausgeführten wissenschaftlichen Expedition auf Befehl S. M., herausgegeben und erläutert von C. R. Lepsius. Berlin, 1855. Lieferung 51-75, fol. atl. — S. M. IL RE *di Prussia.*

Vita di Dante Alighieri; dell'Avv. Luigi Raineri. Oneglia, 1855, 12.° — RAINERI.

Al gran Consiglio dei Ministri; l'Avv. Luigi Raineri. Oneglia, 1853, 8.°

Al Ministero di Sardegna, un'occhiata ai tempi; dell'Avv. Luigi Raineri. Oneglia, 1854, 8.°

Description du Musée lapidaire de la ville de Lyon; épigraphie antique du département du Rhône; par le Docteur A. Comarmond. Lyon, Dumoulin, 1846-1854, 1 vol. 4.° fig. — LA CITTA' *di Lione.*

De la pisciculture de la truite, et en particulier de celle du lac de Saint-Front et des deux ruisseaux les plus voisins; par M. Comarmond. Lyon, Dumoulin, 1853, 8.° — COMARMOND

OWEN — Principes d'ostéologie comparée, ou recherches sur l'archétype et les homologies du squelette vertébré; par Richard Owen. Paris, Moquet, 1855, 1 vol. 8.° fig.

DE LASTEYRIE — La cathédrale d'Aoste; étude archéologique, par Ferdinand de Lasteyrie. Paris, 1854, 8.°

MENABREA — Nozioni sulla macchina analitica del sig. Carlo Babbage; del Cav. L. F. Menabrea (Estr. dal fasc. 21 della *Rivista contemporanea*). 8.°

TROMPEO — Sulla vita e sulle opere del Dottore Pietro Marianini; memoria del Comm. B. Trompeo (Estr. dal *Cimento*, anno III., fasc. 15). Torino, 1855, 8.°

Sulla vita e sugli scritti del Dottore Carlo Novellis, istoriografo di Savigliano; cenni del Comm. B. Trompeo (Estr. dal *Cimento*, anno III. fasc. 9). Torino, 1855, 8.°

MAGLIARI — Elogii di M. A. Severino, B. Amantea e D. Cotugno; per Pietro. Magliari. 2.ª edizione. Napoli, 1854, 8.°

REGNIER — Étude sur l'idiome des Védas et les origines de la langue Sanscrite; par Ad. Regnier. Première partie. Paris, Lahure, 1855, 1 vol. 4.°

WURZBACH — Die Sprichwörter der Polen historisch erläuteret, mit hinblick auf die eigenthümlichsten der Lithauer, Ruthenen, Serben und Slovenen, und verglichen mit ähnlichen andrer Nationen; mit beigefügten originalen; von Dr. Constant Wurzbach. Wien, 1852, 1 vol. 8.°

Die Kirchen der Stadt Krakau, eine Monographie zur Geschichte und Kirchengeschichte des einstigen Königreichs Polen; von Dr. Constantin Wurzbach. Wien, 1853, 1 vol. 8.°

Bibliographisch-statistiche Uebersicht der Literatur des österreichischen Kaiserstaates, vom 1 september 1852 bis letzten dezember 1853; von Dr. Constant von Wurzbach-Tannenberg. Wien, 1854, 1 vol. 8.°

LA COMMISSION — Résumé des observations recueillies en 1854 dans le bassin de la Saône, par les soins de la Commission hydrométrique de Lyon. Lyon, 8.°

SOBRERO — Manuale di Chimica applicata alle arti; del Dott. Cav. Ascanio Sobrero. Vol. II. Torino, Pons e Comp., 1853, 1 vol. 16.° fig.

GRASSI — Edizione del Colombini del 1843, da Luciano Scarabelli malmenata nel 1855; di P. Luigi Grassi. Genova, 1855, 8.°

PERREY — Documents relatifs aux tremblements de terre au Chilì; par M. Alexis Perrey (Extr. des *Annales de la Société imp. d'agric., d'hist. nat. et des arts utiles de Lyon*). Lyon, 1854, 1 vol., 8.°

Note sur les tremblements de terre ressentis en 1855; par M. Alexis

Perrey (Extr. du Tome XXI, n.° 6 des *Bulletins de l'Académie R. de Belgique*). 8.°

Nouveau récepteur hydraulique, dit Roue-hélice à axe horizontal, ou turbine sans directrices; par M. L.-D. Girard (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut Impérial de France*, Tome XL., séance du 30 avril 1855). Paris, 1855, 4.° — Girard

Sur la relation entre les températures et la durée de la végétation des plantes; par M. A. Quetelet (Extr. du Tome XXII, n.° 6 des *Bulletins de l'Acad. R. de Belgique*). 8.° — Quetelet

Saggio di alcuni esperimenti georgici fatti nel 1851-52; del Prof. G. B. Delponte (Estr. dal Vol. VI degli *Annali della R. Accad. d'Agric. di Torino*). Torino, 1855, 8.° — Delponte.

Fest-Bericht der zehnjährigen Stiftungsfeier des Vereins deutscher ärzte in Paris, der Kaiserl. Leop.-Carol. Akademie der Naturforscher vorgelegt und allen mitgliedern des Vereins gewidmet; von Dr. H. L. Meding. Breslau, 1854, 4.° — Meding.

P. A. Hansen, Die theorie des Aequatoreals. Leipzig, 1855, 4.° min. — Hansen.

C. F. Naumann, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. Leipzig, 1855, 4.° min. — Naumann.

A. F. Möbius, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. Leipzig, 1855, 4.° min. — Möbius.

Sur les travaux de M. Eugène Burnouf, article de M. Barthélemy Saint-Hilaire (Extr. du *Journal des Savants*, cahiers d'août et de septembre 1852). 4.° — Saint-Hilaire.

Université de Liége. Réouverture solennelle des cours, année 1854-55. Rapport de M. G. Nypels. Programme des cours. - Dispositions réglementaires. Liége, 1854, 8.° — Nypels.

Annales des Universités de Belgique, ou Recueil contenant les lois, arrêtés et réglements relatifs à l'enseignement supérieur, les Mémoires couronnés aux concours universitaires, et d'autres documents académiques; années 1851 et 1852 (10.e et 11.e années). Bruxelles, Lesigne, 1854, 1 fort vol. gr. 8.° — Il Governo Belgico.

Catalogo illustrato dei monumenti Egizii del R. Museo di Torino; compilato dal Professore Pier-Camillo Orcurti. *Sale al quarto piano*. Torino, 1855, 8.° — Il Ministro dell'Istruzione Pubblica.

Carta del mare d'Azof e paesi limitrofi; scala nel rapporto di 1 a 600,000, pubblicata dal Corpo Reale di Stato Maggiore. Torino, 1855, 1 fogl. — Corpo Reale di Stato Maggiore.

Carta di Costantinopoli e del Bosforo; scala nel rapporto da 1 a 60,000, pubblicata dal Corpo Reale di Stato Maggiore. Torino, 1855, 1 fogl.

A. e E. Quetelet. Sur la lunette méridienne avec cercle de Gambey, et sur le niveau fixe qui y est attaché; par MM. Ad. et Ernest Quetelet (Extr. du Tome XXII, n.° 6 des *Bulletins de l'Acad. R. de Belgique*). 8.°

Ferrari Cosmos, saggio o tentativo d'una teoria elettro-chimica del mondo; di Gerolamo Ferrari. Venezia, 1855, 8.° fig.

Le Glay. Notice sur les conférences tenues à Lille en 1756, à la suite du traité de Bade; par M. Le Glay. Lille, 1855, 8.°

Mémoire sur les archives du chapitre des chanoinesses de Bourbourg; par M. Le Glay. Dunkerque, 1855, 8.°

Mémoire sur les archives de l'Abbaye de Vicogne; par M. Le Glay. Valenciennes, 1855, 8.°

De Candolle. Géographie botanique raisonnée, ou exposition des faits principaux et des lois concernant la distribution géographique des plantes de l'époque actuelle; par M. Alph. De Candolle. Tom. I-II. Paris, Martinet, 1855, 2 vol. 8.°, avec deux cartes géographiques.

Böhm e Kunes Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, auf öffentliche kosten herausgegeben von Dr. Jos. G. Böhm, und Dr. Adalbert Kunes. Eilfter Jahrgang, 1850, und zwölfter Jahrgang, 1851. Prag, 1853-1854, 2 vol. 4.°

Malacarne I rapporti che i poligoni regolari uno di un lato più dell'altro inscritti, e circoscritti hanno fra essi ed il cerchio col mezzo dei quali si ottengono proporzioni che danno la soluzione geometrica di problemi tenuti per insolubili; scoperta di Giambatista Malacarne. Vicenza, 1855, 8.°

Massalongo Monografia delle Nereidi fossili del M. Bolca; del D. A. B. Professore Massalongo. Verona, 1855, 8.° fig.

Renan Histoire générale et système comparé des langues Sémitiques; par M. Ernest Renan. Ouvrage couronné par l'Institut. Première partie. Histoire générale des langues Sémitiques. Paris, 1855, 1 vol. 8.°

Bianconi. Repertorio italiano per la storia naturale. Repertorium italicum complectens Zoologiam, Mineralogiam, Geologiam et Palaeontologiam; cura J. Josephi Bianconi. Vol. II. Bononiae, 1854, 1 vol. 8.°

Bonino Il cholera-morbus nella città di Torino nell'anno 1854; relazione del Dottore Collegiato G. G. Bonino. Torino, Botta, 1855, 1 vol. 4.°

Hisely Histoire du comté de Gruyère, précédée d'une introduction, par J.-J. Hisely. Tome 1.er Lausanne, 1855, 8.°

Nouveau manuel du vigneron, suivi des moyens préventifs et curatifs de la maladie de la vigne, dite *Oïdium Tuckeri;* par M. Fleury Lacoste. Chambéry, Bachet, 1855, 1 vol. 8.° — Lacoste

Calore e freddo applicati in antagonismo per la cura e guarigione del dominante morbo cholerico, in un cogli altri cooperanti mezzi di salute contro la pestilenza stessa; osservazioni pratiche del P.r Geminiano Grimelli. Modena, 1855, 8.° — Grimelli.

Lettere fisiche, fisiologiche, mediche, con una indicazione risguardante il metodo preservativo della corrente pestilenza cholerica; di Geminiano Grimelli. Modena, 1855, 8.°

Beiträge zur näheren Kenntniss des polymeren Isomorphismus; von Th. Scheerer. Zweite Forsetzung. Berlin, 1855, 8.° — Scheerer.

L'automa aerio o sviluppo della soluzione del problema sulla direzione degli aerostati, publicata nella *Gazzetta Ufficiale del Regno di Sardegna*, ai 7 luglio 1854, dal Prof. Vittorio Angius. Torino, Cassone, 1855, 8.° — Angius.

Météorologie. Rapport fait à l'Académie I. de Nimes, dans sa première séance de janvier 1855, suivi de notes comparatives entre les observations faites à Udine et celles faites à Alais; par M. le Baron d'Hombres-Firmas. 8.° — D'Hombres-Firmas.

Dell'uso dell'aconito napello nelle febbri continue ed intermittenti irritative come surrogato al salasso ed al sanguisugio; del Dottor Cerioli Marcello. Piacenza, Solari, 1855, 1 vol. 8.° — Cerioli.

Zoophycos, novum genus plantarum fossilium, monographia, auctore A. D. B. Prof. Massalongo. Veronae, 1855, 8.° fig. — Massalongo.

Integrazione delle equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti e complete; Memoria del Prof. Gaspare Mainardi (Estr. dal *Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti.* Tomo VII, fasc.i 37-38). Milano, 1855, 4.° — Mainardi.

Flora del Tirolo meridionale, ossia descrizione delle specie fanerogame che crescono spontanee sopra il suolo Trentino e nelle terre adiacenti comprese fra la catena delle alpi Retiche sino ai confini del Lombardo-Veneto, loro proprietà, ecc. ecc.; opera disposta dietro il metodo naturale ed elaborata sull'erbario Facchiniano e proprio da Francesco Ambrosi. Vol. I. Puntata 4.a e 5.a Padova, Sicca, 1855, 8.° — Ambrosi.

Intorno al luogo del supplizio di Severino Boezio; Memoria del Proposto — Bosisio.

Giovanni Bosisio, con un' appendice intorno alla santità dello stesso Boezio. Pavia, Fusi, 1855, 4.° fig.

CORPO REALE DI STATO MAGGIORE — Carta di Sebastopoli e del teatro delle operazioni attuali di guerra in Crimea, formata dietro piani rilevati e riconosciuti da Uffiziali degli eserciti alleati e pubblicata dal Real Corpo di Stato Maggiore. Torino, 1855. Scale nel rapporto di 1 a 46,000; 4 fogli.

LARGHI — Incisione unica per la resecissione della testa del femore e per la disarticolazione della coscia dal bacino; nuovo processo di Larghi Bernardino (Estr. dal *Giornale delle Scienze Mediche della R. Accad. Med. Chir. di Torino*, fasc. n.° 14, del 1855). 8.°

SEYFFARTH — Theologische Schriften der Alten Aegypter nach dem Turiner Papyrus zum ersten male uebersetzt. Nebst Erklärung der zweisprachigen inschriften des Steins von Rosette, des Flaminischen Obelisken, des Thores von Philae, der Tafel von Abydos, der Wand von Karnak und anderer; von Dr. Gustav Seyffarth. Gotha, 1855, 1 vol. 8.°

Grammatica aegyptiaca. Erste Anleitung zum uebersetzen altägyptischer Literaturwerke nebst der Geschichte des Hieroglyphenschlüssels; von Dr. Gustav Seyffarth. Mit 92 seiten lithographien. Gotha, 1855, 1 vol. 8.°

BERTOLA. — Sulla malattia delle viti; nuovi studii del Dottore V. F. Bertola (Estr. dal Vol. VIII degli *Annali della R. Accademia d' Agricoltura di Torino*). 8.°

BARUFFI. — Da Torino a S. Pietroborgo e Mosca; passeggiata straordinaria di G. F. Baruffi. Vol. VI. Torino, Stamperia Reale, 1854, 8.°

DE LESSEPS. — Percement de l'isthme de Suez, exposé et documents officiels; par M. Ferdinand De Lesseps. Paris, Plon, 1855, 1 vol. 8.°, avec cartes géogr.

BRUN-ROLLET. — Le Nil blanc et le Soudan, études sur l'Afrique centrale, mœurs et coutumes des sauvages; par M. Brun-Rollet. Paris, Pillet fils aîné, 1855, 1 vol. 8.°, avec une carte géogr.

DE LAUTURE — De l'influence que le canal des deux mers exercera sur le commerce en général et sur celui de la mer Rouge en particulier; par le comte D'Escayrac de Lauture (Extr. du *Bulletin de la Société de Géographie*). Paris, Martinet, 1855, 8.°

Mémoire sur le Soudan, rédigé d'après des renseignements entièrement nouveaux, par le C.te D'Escayrac de Lauture. (Extr. du *Bulletin de la Société de Géographie*). Paris, Martinet, 1855, 8.°, avec une carte géogr.

Mémoire sur le Ragle ou hallucination du désert; par M. le C.te D'Escayrac de Lauture. Paris, Thunot, 1855, 8.°

Die Landtafel des Markgrafthumes Mähren. Lieferung I et III. Brünn, 1855, fol. fig.

Alcune ricerche relative alla teoria dei numeri; Memoria del Professore Paolo Volpicelli (Estr. dagli *Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei*. Anno VI, sessione 1.ª del 19 dicembre 1852). Roma, 1855, 4.° VOLPICELLI.

Des expériences de M. P. Volpicelli sur la polarité électrostatique; note de M. A. de la Rive (Extr. de la *Bibliothèque universelle de Genève*. Tom. XXVIII de la 4.e série). 8.°

Rettificazione delle formole per assegnare il numero delle somme, ognuna di due quadrati, nelle quali un intero può spezzarsi; nota del Prof. Paolo Volpicelli, con appendice (Estr. dagli *Annali di Scienze matematiche e fisiche pubblicati in Roma*). Roma, 1854, 8.°

Formole per determinare il numero delle intere soluzioni della $x^2-y^2=c$, e loro conseguenze; nota del Prof. Paolo Volpicelli. 8.°

Memoirs of the life and scientific researches of John Dalton; by William Charles Henry. London, Harrison and Sons, 1854, 1 vol. 8.° fig., and *fac-simile*. HENRY.

Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassarre Boncompagni; note analitiche di Angelo Genocchi. Roma, 1855, 8.° GENOCCHI.

Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo *Liber quadratorum*; brani di lettere dirette dal sig. Angelo Genocchi a D. Baldassarre Boncompagni. Roma, 1855, 8.°

Intorno ad alcuni problemi d'analisi indeterminata, brano d'una lettera diretta dal sig. Angelo Genocchi a D. Baldassarre Boncompagni. Roma, 1855, 8.°

Intorno ad alcune formole sommatorie; nota di Angelo Genocchi. Roma, 1855, 8.°

Origini e progresso delle instituzioni della monarchia di Savoia; di Luigi Cibrario. Parte seconda, Specchio cronologico. Torino, Stamperia Reale, 1855, 1 vol. 8.° CIBRARIO.

Coup d'œil géologique sur les mines de la monarchie Autrichienne. Rédigé, par ordre de l'Institut Impérial et Royal de Géologie, par le Chev. Fr. De Hauer et Fr. Fœtterle, avec une introduction par Guillaume Haidinger. Publié par le Comité I. et R. central pour l'exposition universelle d'agriculture et d'industrie à Paris; traduit DE HAUER et FOETTERLE.

sur l'original allemand par le Comte Auguste Marschall. Vienne, 1855, 1 vol. 4.°

RADCLIFFE TRUSTEES — Astronomical observations made at the Radcliffe Observatory, in the years 1852-53; by Manuel J. Johnson. Vol. XIII, XIV. Published by order of the Radcliffe Trustees. Oxford, 1854-55, 2 vol. 8.°

List of institutions and persons to whom copies of the Radcliffe observations are presented by the Radcliffe Trustees. 8.°

LIBRARY COMMITTEE, GUILDHALL. — A descriptive catalogue of the London traders, tavern, and coffee-house tokens current in the seventeenth century; presented to the corporation library by Henry Benjamin Hanbury Beaufoy; by Jacob Henry Burn. 2.d edition. London, Taylor, 1855, 1 vol. 8.°

SMITH — Supplement to the practical rules for ascertaining the deviations of the compass which are caused by the ship's iron, being instructions for the computation of a table of the deviations of a ship's compass, from observations made on 4, 8, 16, or 32 points (2.d edition). And a graphic method of correcting the deviations of a ship's compass; by Archibald Smith. London, 1855, 8.° fig.

CANTU'. — Tavola litografica, in colore, pubblicata dal sig. Giuseppe Cantù, rappresentante l'*Agaricus virosus* di Vittadini. G. Cantù dis. dal vero. Torino, lit. Doyen, 1855, 1/4 di foglio.

OTTINO. — Gli inni orfici, recati in versi italiani, con prolegomeni e note, da Enrico Ottino. Torino, Stamperia Reale, 1855, 1 vol. 8.°

BELLARDI — Coquilles terrestres et fluviatiles, recueillies par M. le Prof. Bellardi dans un voyage en Orient; par Alb. Mousson. Zurich, 1854, 8.°

SAULI — Il conte Coriolano Malingri di Bagnolo; di L. Sauli (Estr. dalla *Gazzetta Piemontese*, n.° 161, 3 luglio 1855). 8.°

PONZIGLIONE — Thomae Vallavrii specimen inscriptionvm latinarvm edidit, atque adnotationibvs avxit, Vincentivs Ferrervs Ponzilionvs; accedit carmen nvptiale cvm epistola ad Amadevm Ronchinivm. Avgvstae Tavrinorvm, ex officina Regia, 1855, 8.°

HOLLARD. — Études zoologiques sur le genre *Actinia*; par M. H. Hollard (Extr. de la *Revue et Magasin de la Zoologie*). Paris, 1854, 8.°

MINISTERO DELL' INTERNO di Napoli. — Brevi considerazioni intorno ad alcuni più costanti fenomeni vesuviani; Memoria letta al R. Istituto d'Incoraggiamento nella tornata del 14 giugno 1855, in occasione della eruzione del 1.° maggio, dal Socio ordinario Cav. Francesco del Giudice (cavata dal vol. IX degli *Atti* del detto R. Istituto). Napoli, 1855, 1 vol. 4.°

Flora Fluminensis, seu descriptiones plantarum praefectura fluminensi sponte nascentium sistit Fr. Josephus Marianus a Conceptione Vellozo. Flumine Januario, ex Typographia Nationali, 1825, et Parisiis, Senefelder, 1827, 11 vol. fol. maj. et 1 vol. fol. min. — S. M. l'Imperatore *del Brasile.*

Documents et nouvelles géographiques; par M. Jomard. II.e partie. 1854-1855 (Extr. du *Bulletin de la Société de Géographie de Paris*, 4.e série, Tom. VIII). 8.° avec cartes géogr. — Jomard.

Sulla dignità della fisica teorico-sperimentale, e del miglior modo d'insegnarla; discorso del Dottore Gaetano Antinori. Piacenza, 1855, 8.° — Antinori.

Sulla dignità della chimica, e delle doti che si richieggono in coloro che debbono insegnarla; discorso del Dottore Gaetano Antinori. Piacenza, 1855, 8.°

Storia di una singolare epilessia, seguìta da alcune mediche considerazioni teorico-pratiche del Dottore Gaetano Antinori. Piacenza, 1837, 8.°

Patologia fisico-chimico-meccanico-animale. - Parte 1.ª Eziologia. - Parte 2.ª Nosologia organico-molecolare; del Dott. Gaetano Antinori. Tomi I-IV. Piacenza, 1832-1855, 5 vol. 12.°

Carta del littorale del mar Nero compreso tra Odessa e Sebastopoli; scale nel rapporto di 1 a 424,700; pubblicata dall'Ufficio topografico del Real Corpo di Stato Maggiore. Torino, 1855, 1 fogl. — Corpo Reale di Stato Maggiore.

Résumé météorologique de l'année 1854 pour Genève et le Grand Saint-Bernard; par E. Plantamour. Genève, 1855, 8.° — Plantamour.

Nivellement du Grand Saint-Bernard; par MM. Burnier et E. Plantamour (Tiré de la *Bibliothèque universelle de Genève*, octobre 1855). 8.°

Études sur l'histoire de la littérature de la Suisse française, particulièrement dans la seconde moitié du XVIII.e siècle; par E.-H. Gaullieur (Tiré du *Bulletin de l'Institut national Genevois.* Tome III). Genève, 1855, 8.° — Gaullieur.

Sur l'induction électrostatique; seconde lettre de M. P. Volpicelli à M. V. Regnault (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sc. de l'Institut de France.* Tom. XLI). Paris, 1855, 8.° — Volpicelli

Résumé d'un essai sur la géologie des Corbières, communiqué à la Société philomatique le 14 juillet 1855 par A. d'Archiac (Extr. du Journal l'*Institut*) Paris, 1855, 8.° — D'Archiac.

Recherches sur les formes cristallines de quelques composés chimiques; par C. Marignac. Genève, 1855, 1 vol. 4.° fig. — Marignac.

Genealogia dei Reali di Savoia; emendata e lumeggiata colla storia dal Cav. Luigi Cibrario. 1 fogl. — Cibrario.

De Mas Latrie — Fragments d'histoire de Chypre; par M. L. De Mas Latrie. Paris, Didot, 1855, 8.°

Cornet. — Giornale dell'assedio di Costantinopoli, 1453; di Nicolò Barbaro P. V., corredato di note e documenti per Enrico Cornet. Vienna, 1856, 8.°

Antinori — Uno sguardo rapidissimo sulla storia naturale; discorso del Dott. Gaetano Antinori. Piacenza, 1855, 8.°

Ferrari. — Pane plastico; Memoria letta all'Ufficio permanente del Comitato medico Lonellino, il 9 novembre 1855; di Gerolamo Ferrari. Torino, 1855, 8.°

Brougham — Analitical view of Sir Isaac Newton's Principia; by Henry Lord Brougham and E. J. Routh. London, Spottiswoode, 1855, 1 vol. 8.°

Ricci — Trattato della politica di Aristotele, volgarizzamento dal greco, per Matteo Ricci, con note e discorso preliminare. Firenze, Le Monnier, 1853, 1 vol. 12.°

Saggio sugli ordini politici dell'antica Roma, paragonati alle libere istituzioni moderne; di Matteo Ricci (Estr. dal fasc. 22 della *Rivista contemporanea*). Torino, 1855, 8.°

Riedl von Leuenstern. — Bahnen höherer Zahlengleichungen verschiedener Grade berechnet und metrisch dargestellt; von J. Riedl von Leuenstern. Wien, 1852, 4.° max. fig.

Ueber das Vergleichende mass der Körperwinkel; von Joseph Riedl von Leuenstern. Wien, 1848, 4.° fig.

Ueber die Summen der Körperwinkel an Pyramidsen; von J. Riedl von Leuenstern. Wien, 1849, 4.° fig.

Ueber Raute, Prisma und Kegel in akrometrischer Beziehung; von Joseph Riedl von Leuenstern. Wien, 1850, 4.° fig.

Zur Mondkugel; von Riedl-Leuenstern. Wien, 1849, 8.°

Ueber die sogenannten figurirten Zahlen; von Riedl v. Leuenstern. Wien, 1854, 4.° fig.

Minervini. — Bullettino archeologico Napolitano. Nuova serie. Anno IV, n.ⁱ 1-12. Napoli, 1855, 4.° fig.

Le Jolis — Observations sur quelques plantes rares découvertes aux environs de Cherbourg; par M. Auguste Le Jolis (Extr. des *Annales des Sciences naturelles*, Tome VII). Paris, 1847, 8.° fig.

Mémoire sur l'introduction et la floraison à Cherbourg d'une espèce peu connue de lin de la Nouvelle-Zélande, et revue des plantes confondues sous le nom de *Phormium tenax*; par M. Auguste Le Jolis. Cherbourg, 1848. 8.°

Procédure au XV.e siècle, relative à la confiscation de biens saisis sur un anglais et leur adjudication en faveur d'un capitaine de Cherbourg; publiée par M. Aug. Le Jolis. Cherbourg, 1851, 8.°

Notice sur les anciennes fabriques de draps de Cherbourg; par M. Auguste Le Jolis. Cherbourg, 1854, 8.°

Observations sur les *Ulex* des environs de Cherbourg; par M. Auguste Le Jolis. Cherbourg, 1853, 8.°

Notice sur l'origine et l'établissement de la foire Saint-Clair de Querqueville; par Auguste Le Jolis. 3.e édition. Cherbourg, 1855, 8.°

Examen des espèces confondues sous le nom de *Laminaria digitata* Auct., suivi de quelques observations sur le genre *Laminaria*; par M. Auguste Le Jolis. Cherbourg, 1855, 8.°

Examen des espèces confondues sous le nom de *Laminaria digitata* Auct., suivi de quelques observations sur le genre *Laminaria*, par M. Auguste Le Jolis (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut I. de France*, Tome XL). Paris, 1855, 4.°

Note sur une machine hydraulique à tube oscillant sans autre pièce mobile, par M. De Caligny. 1/4 di fogl. lit. — De Caligny.

Essai d'une géographie physique de la Belgique, au point de vue de l'histoire et de la description du globe; par J. C. Houzeau. Bruxelles, Hayez, 1854, 1 vol. 8.° fig. — Houzeau.

Traité historique, théorique et pratique de la législation des portions communales ou ménagères, etc.; par C. Le Gentil. Arras, Brissy, 1854, 1 vol. 8.° — Le Gentil.

Dissertations juridiques sur quelques-uns des points les moins éclaircis ou les plus controversés en doctrine et en jurisprudence, par C. Le Gentil. Vol. 1.er Arras, Brissy, 1855, 1 vol. 8.°

Inscriptions romaines de l'Algérie, recueillies et publiées sous les auspices de S. Exc. M. Hippolyte Fortoul, Ministre de l'Instruction publique et des Cultes; par M. Léon Renier. Livraisons 1-7. Paris, Imprimerie Impériale, 1855, 4.° — Fortoul Ministro dell'Istr. pubblica di Francia.

Recherches expérimentales sur la végétation; par M. Georges Ville. Absorption de l'azote de l'air par les plantes. Paris, 1855, 8.° — Ville.

Intorno alla Memoria di Abel: *Sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes*; studio di Gaspare Mainardi (Estr. dal *Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti*. Tom. VII). Milano, 1855, 4.° — Mainardi.

R. Università di Cristiania. Det Kongelige Norske Frederiks Universitets. Aarsberetning for 1853. Christiania, 1855, 1 vol. 8.°

Actstykker angaaende Cholera-epidemien, i Norge i 1853. Christiania, 1854, 1 vol. 8.°

Beretning om Kongeriget Norges ökonomiske Tilstand, i Aarene 1846-1850 med tilhorende Tabeller. Christiania, 1853, 1 vol. 4.°

Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres fjerde möde, i Christiania, den 11-18 juli 1844. Christiania, 1847, 1 vol. 8.° fig.

Kong Christian den Fjerdes Norske Lovbog af 1604. Efter foranstaltning af det akademiske Kollegium ved det Kongelige Norske Frederiks Universitet udgiven af Fr. Hallager og Fr. Brandt. Christiania, 1855, 1 vol. 8.°

Das Christiania-Silurbecken, chemisch-geognostich Untersucht; von Theodor Kjerulf. Christiania, 1855, 4.° und kart.

Index scholarum in Universitate Regia Fredericiana octogesimo quarto ejus semestri, anno 1855 ab a. D. XVII kal. februárias, et ab augusto mense inennte, habendarum. Christiania, 1855, 4.°

De prisca re monetaria Norvegiae, et de numis aliquot et ornamentis in Norvegia repertis, scripsit C. A. Holmboe. Editio nova recognita. Christianiae, 1854, 8.° fig.

Gera. Sunto de' nuovi studii su l'atrofia contagiosa de' bachi da seta; del Dott. Francesco Gera (Estr. dal Vol. I, serie 3.ª degli *Atti dell'Instituto Veneto di Sc., Lettere ed Arti*). Venezia, 1856, 8.°

De Zigno Sulle ossa fossili di rinoceronte trovate in Italia; Memoria di Achille de Zigno. Padova, 1855, 8.°

Jakschitch. Statistique de Serbie; rédigée par Wladimir Jakschitch. 1.ère livraison. Belgrade, 1855, 8.°

Giebel e Heintz. Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, herausgegeben von den naturwissenschaftlichen Vereine für Sachsen und Thüringen in Halle, redigirt von C. Giebel und W. Heintz. Jahrgang 1853-1855. Vol. I-VI. Halle und Berlin, 1854-1855, 6 vol. 8.° fig.

Coppi. Memorie Colonnesi, compilate da A. Coppi. Roma, Salvinucci, 1855, 1 vol 8.°

Cornet Le guerre dei Veneti nell'Asia, 1470-1474; documenti cavati dall'archivio ai Frari di Venezia e pubblicati per Enrico Cornet. Vienna, 1856, 1 vol. 8.°

Sauffer Trisection de l'angle; méthode de Jacob Sauffer (Articolo inserto nel Giornale: *Curaçaosche Courant*, n.° 4, 1856). Fol.

The American Journal of Science and Arts; by Prof. B. Silliman and James D. Dana. Second series, Vol. XVIII-XIX, N.os 52-57. New Haven, 1854-1855, 8.° fig. — SILLIMAN e DANA.

On the homœomorphism of mineral species of the trimetric system, with an Appendix; by James D. Dana. New York, 1854, 8.° — DANA.

Chemical contributions to mineralogy; by James D. Dana. 1854, 8.°

Contributions to mineralogy; by James D. Dana. 1854, 8.° fig.

First supplement to Dana's mineralogy; by the author. 1855, 8.°

Description of a new species of *Cryptopodia* from California, by James D. Dana. 1854, 8.° fig.

Descriptions of some of the new marine *invertebrata* from the Chinese and Japanese seas; by Wm. Stimpson. 1855, 8.° — STIMPSON.

Report on the geology of the Coast Mountains, and part of the Sierra Nevada: embracing their industrial resources in agriculture and mining; by Dr. John B. Trask. Washington, 1854, 8.° — TRASK.

Report on the geology of the Coast Mountains; embracing their agricultural resources and mineral productions. Also, portions of the middle and northern mining districts; by Dr. John B. Trask. Washington, 1855, 8.°

Lecture on the Camel, delivered before the Smithsonian Institution; by hon. George P. Marsh. Washington. 8.° — MARSH.

Fossil Foot-Marks in the red sandstone of Pottsville, Pennsylvania; by Isaac Lea. Philadelphia, 1855, fol. max. fig. — LEA.

Rectification of Mr. T. A. Conrad's *Synopsis of the Family of Naïades of North America*; by Isaac Lea (From the *Proceedings of the Acad. of Nat. Sc. of Philadelphia*, 1854). 8.°

Mémoires de Mathieu Molé, Procureur Général, Premier Président au Parlement de Paris et Garde-des-Sceaux de France; publiés, pour la Société de l'histoire de France, sous les auspices de M. le Comte Molé, l'un de ses Membres, par Aimé Champollion-Figeac. Tome II. (1629-1641). Paris, Lahure, 1855, 1 vol. 8.° — CHAMPOLLION-FIGEAC.

La rhétorique d'Aristote, traduite en français, avec le texte en regard, et suivie de notes philologiques et littéraires, par Norbert Bonafous. Paris, Lahure, 1856, 1 vol. 8.° — BONAFOUS.

Report on the agriculture and geology of Mississipi, embracing a sketch of the social and natural history of the state; by B. L. C. Wailes. Washington, Miss., 1854, 1 vol. 8.° fig. — WAILES.

SCHADE — The United States of North America and the immigration since 1790. A statistical essay; by Louis Schade. 8.°

LA SOCIETA'. — Statuti della Società anonima per l'assicurazione a premio fisso contro la mortalità del bestiame e per l'utilizzamento delle bestie morte. Torino, 1856, 8.°

GIRARDIN — Sur le pain mixte de blé et de riz. Valeur du riz comme aliment, et réflexions générales sur l'alimentation; par J. Girardin. Rouen, 1855, 8.°

KIESER. — Elemente der Psychiatrik. Grundlage klinischer Vorträge; von Dr. D. G. Kieser. Breslau und Bonn, 1855, 1 vol. 8.°

PALLASTRELLI. — Dell'anno dalla Incarnazione usato dai Piacentini; Memoria di Bernardo Pallastrelli. Piacenza, Majno, 1856, 4.°

DE WITTE. — Description des médailles et des antiquités du cabinet de M. l'Abbé H. G ***; par J. de Witte. Paris, Didot frères, 1856, 1 vol. 8.° fig.

DELLA MARMORA (Alberto). — L' istmo di Suez e la stazione telegrafico-elettrica di Cagliari; ragionamento del T. G. Alberto della Marmora, per far seguito alle sue *Quistioni marittime* spettanti alla Sardegna. Torino, Stamp. Reale, 1856, 4.°

CARRET. — Appareil nouveau de fracture pour les membres; par M. le Docteur Carret. Chambéry, 1855, 8.°

MANDL. — Mémoires concernant la pathologie et la thérapeutique des organes de la respiration; par le Dr. Louis Mandl. 1.ère livraison (Extr. des *Archives de Médecine*). Paris, 1855, 8.° fig.

FASOLI e DALLA TORRE. — Sulla spontanea volatilità dei corpi fissi, scoperta da G. B. Fasoli e G. Dalla-Torre. Venezia, 1856, 8.°

CALVERT. — On a case of poisoning by sulphate of protoxide of iron; by M.r F. Crace Calvert. Manchester, 1854, 8.°

On the action of gallic and tannic acids in dyeing; by F. Crace Calvert. Edinburg, 1855, 8.°

On the adulteration of oils; by F. Crace Calvert (From the *Philosophical Magazine*). Manchester, 1854, 8.°

On alloys; by F. Crace Calvert and Richard Johnson (From the *Philosophical Magazine* for octobre 1855). 8.°

On the action of organic acids of cotton and flax fibres; by F. Crace Calvert. Edinburgh, 1855, 8.°

A new method for the analysis of chrome ores; by F. C. Calvert. 8.°

REINAUD — Rapport sur la chape arabe de Chinon, département d'Indre-et-Loire; par M. Reinaud. Paris, 1855, 8.°

Lettres à M. F. De Saulcy sur les plus anciens monuments numismatiques de la série Mérovingienne; par Ch. Lenormant. Paris, Remquet et Comp., 1848-1854, 1 vol. 8.° fig. — LENORMANT (Charles).

Essai sur le classement des monnaies d'argent des Lagides; par François Lenormant. Blois, Lecesne, 1855, 1 vol. 8.° fig. — LENORMANT (François).

Ricerche chimico-legali sopra l'arsenico ed alcune sue combinazioni; per Raffaello Capuano. Napoli, 1844, 8.° — CAPUANO.

Mémoire sur la théorie du magnétisme; par Mr. Jean Plana (Extr. de l'*Astronomische Nachrichten*, N.° 927). Altona, 1854, 4.° — PLANA.

Le père de la nouvelle télégraphie, Mr. Jean-Baptiste Rhodes, de Plaisance (Gers); par M. Jean-Marie Domingieux. Auch, 1856, 4.° — RHODES.

Corso di geometria elementare; per Francesco Mandoj-Albanese. Torino, Paravia e Comp., 1856, 1 vol. 8.° — MANDOJ-ALBANESE.

Lettere di Carlo Botta, pubblicate in occasione delle nozze della gentilissima damigella signora Giuseppina Tarchetti col sig. Francesco Perla; di C. D. Vercelli, De-Gaudenzi, 1856, 8.° — C. D

Giovanni Labus (Estr. dall'opera *Le arti educative*, pubblicata da G. B. Zambelli). 4.° con ritratto. — LABUS (Pietro).

Sulle associazioni di più condensatori fra loro, per l'aumento della elettrostatica tensione; Memoria del Prof. P. Volpicelli. Roma, 1855, 4.° — VOLPICELLI.

Sur l'association de plusieurs condensateurs entre eux, pour manifester les faibles doses d'électricité; lettre de Mr. P. Volpicelli, à Mr. Pouillet (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut I. de France.* Tome XLII). Paris, 1856, 8.°

Bulletin des séances de la Société Impériale et centrale d'Agriculture; compte rendu mensuel rédigé par M. Payen. 2.ème série. Tome XI, N.os 2 et 3. Paris, 1855, 8.° — PAYEN.

Numismatique et inscriptions Cypriotes; par H. de Luynes. Paris, Plon, frères, 1852, 1 vol. 4.° fig. — DELLA-MARMORA (Alberto).

Mémoire sur le sarcophage et l'inscription funéraire d'Esmunazar, roi de Sidon; par H. D'Albert de Luynes. Paris, Plon, 1856, 1 vol. 4.° fig.

Note sur le terrain nummulitique supérieur du Dego, des Carcare etc. dans l'Apennin ligurien; par le Prof. Eugène Sismonda. Turin, Imprimerie Royale, 1856, 4.° — E. SISMONDA.

De la météorologie dans ses rapports avec le choléra et l'épidémie de certains végétaux; par le Dr. Louis Savoyen. Chambéry, Bachet, 1856, 8.° — SAVOYEN.

CARUTTI — Storia del regno di Vittorio Amedeo II, scritta da Domenico Carutti. Torino, Paravia e Comp., 1856, 1 vol. 8.°

ANNONI-PARRAVICINI — L'ordine sociale, lavoro dell'Avv. Carlo Onorato Annoni-Parravicini. Nizza, 1856, 8.°

FAVRE. — Recherches sur les minéraux artificiels; par Alph. Favre (Tiré de la *Bibliothèque universelle de Genève*. Février 1856). 8.°

BERTI PICHAT — Istituzioni scientifiche e tecniche, ossia Corso teorico e pratico di agricoltura; di Carlo Berti-Pichat. Dispense 34-56. Torino, cugini Pomba, 1853-1856, 8.° gr.

SECCHI — Descrizione degli strumenti adoperati nella misura della base romana sulla via Appia; del P. A. Secchi. Roma, 1855, 4.° fig.

CANINA. — Ricerche sul preciso valore delle antiche misure romane di estensione lineare, dedotte in particolare dalle colonne Coclidi centenarie di Trajano e di Marco Aurelio, ed esposte per servire alla determinazione delle colonne migliarie lungo la prima parte della via Appia di recente ristabilita; del Commendatore Luigi Canina. Roma, Bertinelli, 1853, 4.° fig.

CONESTABILE — Di Giambattista Vermiglioli; de' monumenti di Perugia, Etrusca e Romana; della letteratura e bibliografia Perugina; nuove pubblicazioni per cura del Conte Giancarlo Conestabile. Parte prima: Della vita, degli studii, e delle opere di G. Battista Vermiglioli. - Parte seconda: Il sepolcro dei Volunni. Perugia, Bartelli, 1855, 2 vol. 4.° con atlante, fol.

CAGNONE e MOSCA. — Monumento alla memoria del Cav. Bernardino Drovetti nel camposanto di Torino. Torino, litogr. Giordana, Grand-Didier e Salussolia, 1856, 4.° fig.

WURSTEMBERGER. — Peter der zweite, Graf von Savoyen, Markgraf in Italien, sein Haus und sein Lande; von L. Wurstemberger. Erster Theil. Berne, 1856, 1 vol. 8.°

MALACARNE. — Rettificazione geometrica e rigorosa della periferia del circolo colla geometria elementare; di Giambatista Malacarne. Vicenza, 1856, 8.°

LADREY — Recherches sur les formes cristallines et les propriétés chimiques et physiques de l'acide titanique et d'autres oxydes isomorphes; par M. Ladrey (Extr. des *Mémoires de l'Académie de Dijon*). Dijon, 1854, 8.°

Rapport sur le sucrage des vendanges, présenté au Comité central d'agriculture du département de la Côte-d'or, par M. Ladrey (Extr. du *Journal d'agriculture de la Côte-d'or*). Dijon, 1854, 8.°

Congrès scientifique de France. Vingt-unième session. Dijon, 1855, 8.°

Rapporto della Commissione nominata dall'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti per lo studio della malattia dell'uva dell'anno 1855. Milano, 1856, 8.° — La Commissione

Sur la congélation de la vapeur vésiculaire et sur les flèches glaciales; par M. J. Fournet. Paris, 1856, 8.° — Fournet.

Note sur le refroidissement des 25 et 26 avril 1855, observé dans l'île de Sardaigne par M. J. Fournet (Extr. des *Annales de la Société d'Agriculture de Lyon*, août 1855). 8.°

Résumé des observations recueillies en 1855 dans le bassin de la Saône, par les soins de la Commission hydrométrique de Lyon. 8.° — La Commissione

Observations addressed, at the last anniversary, to the President and Fellows of the Royal Society, after the delivery of the Medals; by Charles Babbage. London, 1856, 8.° — Babbage.

Raccolta di scritti e documenti relativi alla storia dei progetti e delle opere per la navigazione a vapore, le strade ferrate, il telegrafo elettrico, la valigia delle Indie, ecc. in Italia; dell' Ingegnere Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, 8.° — Bruschetti.

Fouilles exécutées à Thèbes dans l'année 1855; textes hiéroglyphiques et documents inédits; par J.-B. Greene. Paris, Didot frères, 1855, 4.° max. fig. — Greene.

Quelques remarques sur la nomenclature générique des algues; par M. Aug. Le Jolis (Extr. du 4.e Vol. des *Mémoires de la Soc. Imp. des Sc. nat. de Cherbourg*). Cherbourg, 1856, 8.° — Le Jolis

Il Movimento, giornale quotidiano politico letterario dell'*Areopago*, n.i 40, 93 e 143. Genova, 1856, fol. — De Roseti.

Montesquieu et Machiavel; par Mr. Frédéric Sclopis. Paris, 1856, 8.° — Sclopis.

Scorsa di un lombardo negli Archivi di Venezia; di Cesare Cantù. Milano e Verona, 1856, 8.°

Des tumeurs blanches et de leur traitement; par Ch. Ballu. Paris, 1853, 8.° — Ballu.

Standard alphabet for reducing unwritten languages and foreign graphic systems to a uniform orthography in european letters; by Dr. R. Lepsius. London, 1855, 8.° — Lepsius.

Dell'orologio a pendolo di Galileo Galilei, e di due recenti divinazioni del meccanismo da lui immaginato (Dal Vol. di *Supplemento alle opere complete di Galilei edite da E. Albéri*). Firenze, 1856, 8.° fig. — Alberi.

Bibliografia Galileiana. Firenze, 1856, 8.°

BRIZI — Alcuni usi e costumi Sammarinesi, descritti dal Cav. Colonnello Oreste Brizi. Arezzo, 1856, 8.°

ROCCA — All'armata Sarda reduce dalla Crimea. Festeggiandosi con solenne teatrale spettacolo dal Municipio nella sera del 2 giugno 1856 l'arrivo in Savona del 5.° Battaglione provvisorio dei Bersaglieri; poesia dell'Avvocato A. G. Rocca, Savona, 1856, 4.°

FLECHIA. — Grammatica sanscrita, di Giovanni Flechia. Torino, Giacinto Marietti, 1856, 1 vol. 8.°

RENARD — Rapport sur la séance extraordinaire solennelle du 28 décembre 1855, à l'occasion du jubilé sémi-séculaire de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, publié par le Premier Secrétaire Dr. Renard. Moscou, 1856, 8.°

RIEDL VON LEUENSTERN — Anleitung zum Gebrauch des Rechnen (Rechne) schiebers, mit besonderer Berücksichtigung der Mass-, Monz-und Gewichts-Uerhältnisse des deutschen Zollvereins und der Nachbarstaaten, von C. Hoffmann; von Riedl Leuenstern. 1854. 4.°

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, von Dr. Eduard Heis, und Th. Jos. Eschweiler. I. Theil: *Planimetrie.* Kösn, 1855, von J. Riedl von Leuenstern. Wien, 1855, 4.° fig.

Zur versinnlichenden Darstellung der Zeitgleichung; von J. Riedl von Leuenstern. 4.° min. fig.

Metodo per trovare quattro radici reali oppure immaginarie di un'equazione numerica, facendo parte del trattato: *Bahnen Höherer Zahlengleichungen verschiedener Grade, von R. Riedel von Leuenstern. Wien*, 1852 (Estr. dagli *Ann. di Sc. mat. e fis. pubbl. in Roma*). Roma, 1855, 8.°

BRUSCHETTI — Le ferrovie per l'interno della città; di Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, 8.°

Sulla libertà del commercio e di navigazione. - Sul diritto di libera emigrazione spettante ai sudditi misti Sardo-Lombardi o Lombardo-Sardi; di Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, 8.°

COLLENZA — Risultamenti clinici nella cura degli infermi di cholera accolti nell'ospedale centrale della Real Marina nell'epidemia del 1855; pel Cavaliere Pietro Collenza. Napoli, 1856, 8.°

GUARINI PALMIERI e SCACCHI. — Memoria sull'incendio Vesuviano del mese di maggio 1855, fatta per incarico della Reale Accademia delle Scienze dai socii G. Guarini,

L. Palmieri ed A. Scacchi; preceduta dalla relazione dell'altro incendio del 1850, fatta da A. Scacchi. Napoli, 1855, 1 vol. 4.° fig.

Alcune osservazioni sopra taluni rimedi proposti contro alla malattia della vite, in continuazione di quelle già pubblicate dalla R. Accademia delle Scienze nel 1851; di G. Gasparrini (Estr. dal *Rendiconto dell'Accad. delle Scienze in Napoli*, 1856). 4.° — GASPARRINI.

Memoria sulla determinazione de'coefficienti nelle formole a differenze-differenziali e sull'applicazione di esse alla valutazione degli integrali Euleriani; di Giuseppe Zurria. Catania, 1854, 4.° — ZURRIA.

Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota, etc., ou correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII.^e siècle, relative à l'analyse supérieure, réimprimée sur l'édition originale de 1712, avec l'indication des variantes de l'édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par J.-B. Biot, et F. Lefort. Paris, Mallet-Bachelier, 1856, 1 vol. 4.° — FORTOUL, MINISTRO DELL'ISTR. PUBBLICA *in Francia*.

Della vita e degli scritti del conte Cesare Balbo; rimembranze di Ercole Ricotti, con documenti inediti. Firenze, Le Monnier, 1856, 1 vol. 12.° — RICOTTI.

Cenni necrologici del conte e commendatore Amedeo Avogadro di Quaregna e Ceretto; del D.^re comm. Benedetto Trompeo (Estr. dal *Giornale delle Sc. mediche della R. Accad. medico-chirurg. di Torino*, fasc. n.° 14, 31 luglio 1856). 8.° — TROMPEO.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, auf öffentliche kosten, herausgegeben von D.^r Jos. G. Böhm, und Franz Karlinski. Vierzehnter, fünfzehnter Jahrgangs. Prag, 1856, 1 vol. 4.° — BOEHM.

Ritratto del conte Amedeo Avogadro di Quaregna e Ceretto, Prof. di fisica, Membro della R. Accademia delle Scienze, nato il 9 agosto 1776, morto il 9 luglio 1856. Torino, lit. fratelli Doyen, 1856. — LA CONTESSA VEDOVA AVOGADRO.

Farmaco sicuro morfistricnico antiscrofoloso e antiscirroso, e ricettario razionale del farmaco stesso per prescriverlo ed usarlo con ogni vantaggio in via così medica come chirurgica; di G. Grimelli. Modena, 1856, 8.° — GRIMELLI.

Delle opinioni e dei giudizi di F. Arago intorno a G. Galilei che si contengono nella biografia da lui scritta del filosofo toscano e nei due primi tomi della sua astronomia popolare; esame del cav. Prof. Eugenio Albéri. Firenze, 1856, 8.° — ALBÉRI.

Berichtigungen der roemischen, griechischen, persischen, aegyptischen, — SEYFFARTH.

hebraeschen Geschichte und zeitrechnung Mythologie und alten Religionsgeschichte auf grund neuer historischer und astronomischer Huelfsmittel; von D.r G. Seyffarth. Leipzig, 1855, 1 vol. 8.° fig.

Mommsen. Die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der provinz Baetica; von Theodor Mommsen. Leipzig, 1855, 4.°

Wietersheim. Gedächtnissrede auf Seine Majestät Friedrich August König von Sachsen in der öffentlichen Sitzung der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, am 27 octobre 1854, gehalten von E. v. Wietersheim. Leipzig, 1854, 4.°

Calindri. Bollettino dell'istmo di Suez, con tavole illustrative; diretto da Ugo Calindri. N.° 1-12. Torino, 1856, 8.°

Gobbi. Quadro positivo, nè teorico nè empirico, del solo vero processo flogistico, dimostrato presso il letto dell' infermo e presso il cadavere contro gli attuali dannosi traviamenti di una superstite classe di medici controstimolisti; da Vincenzo Gobbi. Forlì, 1856, 8.°

D'Avezac. Grands et petits géographes grecs et latins; esquisse bibliographique des collections qui en ont été publiées, entreprises ou projetées; et revue critique du volume des petits géographes grecs, etc.; par M. D'Avezac. Paris, 1856, 8.°

Baldassini. Elogio del conte Domenico Paoli, fatto dal marchese Francesco Baldassini, per commissione del Municipio di Pesaro. Pesaro, 1856, 8.°

Paleocapa. Considerazioni sul protendimento delle spiaggie e sull'insabbiamento dei porti dell'Adriatico, applicate allo stabilimento di un porto nella rada di Pelusio; di P. Paleocapa (Estr. dalla *Rivista contemporanea*, anno III, Vol. VI). Torino, 1856, 1 vol. 8.°

Port. Essai sur l'histoire du commerce maritime de Narbonne; Mémoire qui a obtenu une médaille d'or au concours des antiquités nationales (1853); par M. Célestin Port. Angers, 1854, 1 vol. 8.°

Lamont Annalen der Königlichen Sternwarte bei München, auf öffentliche Kosten herausgegeben von D.r J. Lamont. VII-VIII Banden. München, 1854-1855, 2 vol. 8.°

Giebel. Bericht über die bisherige Thätigkeit und den gegenwärtigen Stand des Naturwissenschaftlichen Vereines für die Provinz Sachsen und Thüringen in Halle. Halle, 1855, 12.°

Hermann Ueber die Gliederung der Bevölkerung des Königreichs Bayern. Feltrede, vorgetragen in der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München, am 28 novembr 1855, zur Feier des Geburtsfestes Sr. Maj. des Königs; von D.r F. B. W. von Hermann. München, 1855, 4.°

Iscrizioni a memoria di alcuni illustri saluzzesi, solennemente inaugurate il dì otto settembre dell'anno 1856. Saluzzo, 1856, 1 vol. 4.° — Il Municipio di Saluzzo

La Cinéide ou la vache reconquise; poëme national héroï-comique en vingt-quatre chants; par l'Abbé Ch. du Vivier de Streel. Bruxelles, Goemaere, 1854, 1 vol. 8.° — Vivier de Streel.

Poésies Wallonnes; par l'auteur du *Pantalon trawé*. N.° 1, 2. Liége, 1842, 12.°

De Salutiorum gestis ad Salutienses, ad Pedemontium atque ad Italiam, Joplredi Alexandri Bossa elegiae. Taurini, 1856, 8.° — Bossa.

Distribution des prix au collége national de Chambéry, le 31 juillet 1856. Discours d'ouverture: Quelques observations sur l'histoire des sciences, et de la physique en particulier, considérée dans ses rapports avec l'éducation de la jeunesse et avec l'histoire générale de l'humanité; par Michel Saint-Martin. Chambéry, 1856, 8.° — Saint-Martin.

Le poëme de Pen-ta-our, extrait d'un Mémoire sur les campagnes de Ramsés II (Sésostris); par M. le Vicomte de Rougé. Paris, 1856, 8.° — De Rougé.

Recherches sur les formes cristallines et la composition chimique de divers sels; par M. C. Marignac (Extr. des *Annales des mines*, Tome IX). Paris, 1856, 8.° — Marignac.

Rendiconto statistico delle scuole comunali di mutuo insegnamento in Palermo per l'anno 1854; per Federico Lancia di Brolo. Palermo, 1855, 8.° — Lancia di Brolo.

Storia completa dell'*Entomibia Apum*, A. Cos. (nuovo genere d'insetti ditteri) e su i danni che arreca alle api da miele; Memoria di Achille Costa (Estr. dagli *Atti del R. Istituto d'incoraggiamento*, Vol. VII). 4.° fig. — Costa.

A. Costa. Memorie entomologiche (Estr. dagli *Annali dell'Accademia degli Aspiranti Naturalisti*, seconda serie, Vol. I, 1847). 8.°

Storia della Tentredine produttrice delle galle delle foglie del salcio (*Salix Russelliana*); Memoria di Achille Costa (Estr. dal Vol. VI. degli *Atti dell'Accademia Pontaniana*). Napoli, 1852, 4.° fig.

Storia della Bombice neustria, suoi costumi, danni che arreca, e mezzi per distruggerla; scritta per incarico del Reale Istituto d'incoraggiamento da Achille Costa. Napoli, 1851, 4.° fig.

L'Accademia Albertina di Belle Arti ed il marchese di Breme; di Angelo Bruneri. Torino, 1856, 8.° — Bruneri.

Una tavola intitolata: Copernico. Cratere della Luna come si vede col — A. Secchi.

grande refrattore di Merz all' Osservatorio del Collegio Romano, stando la Luna in età di 10 giorni. Scala di 60 miglia geografiche italiane. Roma 19 novembre 1855.

GRAN MAGISTERO DELL'ORDINE MAURIZ. Tavole statistiche concernenti il movimento e l'amministrazione degli ospedali dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro, pendente l'anno 1855. Torino, Marzorati, 1856, fol.

ZANTEDESCHI. Nuovi esperimenti riguardanti l'origine della elettricità atmosferica e dell'induzione elettro-statica dei conduttori solidi isolati; di Zantedeschi. Venezia, 1854, 8.° fig.

Descrizione di uno spettrometro, e degli esperimenti eseguiti con esso, risguardante i cambiamenti che si osservano nello spettro solare; di Francesco Zantedeschi. Padova, 1856, 8.° fig.

Del densiscopio differenziale di alcuni liquidi; del Prof. Francesco Zantedeschi (Estr. dal fasc. di febb. dell'anno 1856 della *Cl. di matem. e Sc. nat. dell'Accad. Imp. delle Scienze di Vienna*, Vol. XIX). 8.° fig.

Ricerche sulle leggi della capillarità; Memoria di M. E. cav. Prof. Fr. Zantedeschi. Venezia, 1856, 8.° fig.

Del moto rotatorio dell'arco luminoso dell'elettromotore Voltiano; nuove esperienze del Prof. Francesco Zantedeschi. Vienna, 1856, 8.° fig.

Delle differenze che intercedono fra gli effetti prodotti dalla luce e dal calorico sopra i cloruri e ioduri d'argento; Memoria II.ª dei signori Zantedeschi e Borlinetto. Vienna, 1856, 8.°

Cenni biografici di Francesco Zantedeschi, estratti dalla Galleria dei Naturalisti, pubblicata da Lenoir in Vienna nel 1856. Torino, tip. Botta, 8.°

BELLAVITIS. Sul calcolo approssimato degl' integrali d'ordine superiore; nota del Prof. Giusto Bellavitis. Venezia, 1856, 4.° gr.

Esposizione del metodo delle equipollenze; Memoria del Prof. Giusto Bellavitis (inserta nella parte 2.ª del Tomo XXV delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena*). Modena, 1854, 4.° fig.

Intorno alle conseguenze di un abbondante prodotto d'oro; osservazioni del M. E. Prof. Giusto Bellavitis (Estr. dal Vol. I, Serie 3.ª degli *Atti dell' Istituto Veneto di Sc., Lettere ed Arti*). Venezia, 1856, 8.°

Sulle unità delle varie quantità fisiche e sull' importanza ed uso delle teorie per raccogliere e coordinare i fenomeni fisici; discorso del M. E. Prof. Giusto Bellavitis (Estr. dal Vol. I, Serie 3.ª degli *Atti dell'Istituto Veneto di Sc., Lettere ed Arti*). Venezia, 1856, 8.°

Gl'inni di Proclo; tradotti e illustrati da Enrico Ottino. Torino, Stamperia Reale, 1856, 1 vol. 8.° — Ottino

Mémoire sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune; par Jean Plana (Extr. des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, Série II, Tome XVIII). Turin, Imprimerie Royale, 1856, 4.° — Plana.

Relazione del Congresso scientifico francese tenutosi in settembre 1856 nelle città della Rochelle e di Rochefort; per B. Bertini. Torino, 1856, 8.° — Bertini.

Sulle ferrovie a cavallo; nota di Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, 4 pag., 8.° — Bruschetti.

Sul telegrafo elettrico del Mediterraneo; proposta di Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, ½ fogl., 8.°

Gazzetta Militare di Torino. Anno III. N.° 135-141 (novembre 1856). 4.°

Le ferrovie per l'interno della città; sulle ferrovie a cavalli per le campagne; di Giuseppe Bruschetti. Torino, 1856, 8.°

Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse; von M. W. Drobisch. Leipzig, 1855, 8.° gr. — Drobisch.

Auseinandersetzung einer Zweckmässigen zur Berechnung der absoluten Störungen der Kleinen Planeten; von P. A. Hansen. Leipzig, 1856, 8.° gr. — Hansen.

Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere zurückführung der Stromintensitäts-messungen auf mechanisches Maass; von R. Kohlrausch und W. Weber. Leipzig, 1856, 8.° gr. — Kohlrausch e Weber.

Resultate aus beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen; von H. D'Arrest. Leipzig, 1856, 8.° gr. — D'Arrest.

Die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica; von Theodor Mommsen. Leipzig, 1855, 8.° gr. — Mommsen

De l'origine des diverses variétés ou espèces d'arbres fruitiers et autres végétaux généralement cultivés pour les besoins de l'homme; par Alexis Jordan. Lyon, 1853, 8.° — Jordan.

Mémoire sur l'*Ægilops triticoides*, et sur les questions d'hybridité, de variabilité spécifique, qui se rattachent à l'histoire de cette plante; par M. Alexis Jordan. Lyon, 1856, 8.°

Souvenirs d'un bibliothécaire ou une vie d'homme de lettres en province; par J. A. Monfalcon. Lyon, Nigon, 1853, manuscrit autographié, 1 vol., 4.° — Monfalcon.

Rapport fait à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres de l'Institut — De Longpérier.

Impérial de France, au nom de la Commission des Antiquités de la France; par M. Adrien de Longpérier. Paris, 1856, 4.°

Notice sur les monuments antiques de l'Asie, nouvellement entrés au Musée du Louvre; par M. Adrien de Longpérier (Extr. du N.° 15 de l'année 1855 du *Journal Asiatique*). Paris, 1855, 8.°

Note sur la forme de la lettre E dans les légendes de quelques médailles gauloises; par Adrien de Longpérier (Extr. de la *Revue Numismatique*, nouvelle Série, Tom. 1.^cr^, 1856). Paris, 8.°

Antiquités gauloises. Le guerrier mourant du Capitole; par Adrien de Longpérier (Extr. du *Bulletin Archéologique de l'Athenæum Français*, II.^e^ année, N.° 6, 1856). 8.° fig.

POWER Guida per la Sicilia; opera di Giovanna Power, nata Villeprenx. Napoli, Cirelli, 1842, 1 vol., 8.°

Observations physiques sur le poulpe de l'*Argonauta Argo*, commencées en 1832 et terminées en 1843; dédiées à M. le Professeur Owen par M.^me^ Jannette Power, née de Villeprenx. Paris, 1856, 8.°

CORVINI Dell'innesto nella peripneumonia o polmonera de' bovini; Memoria presentata all'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti pel concorso di fondazione Cagnola, ed onorata di premio d'incoraggiamento; del Dott. Corvini Lorenzo. Milano, Bernardoni, 1856, 1 vol., 8.°

LALANNE (Directeur-Gerente). La correspondance littéraire. Critique, Beaux-Arts, Sciences, érudition. 1.^ère^ année, N.° 1. Paris, 1856, 8.°

PERRENS. Le théâtre contemporain en Italie; par M.^r^ F.-T. Perrens (Extr. de la *Revue des Deux Mondes*. Livr. du 15 novembre 1856). Paris, 1856, 8.°

MORIN Leçons de mécanique pratique. Résistance des matériaux; par Arthur Morin. 2.^ème^ édition. Paris, 1857, 1 vol., 8.° fig.

CIBRARIO Albero Genealogico dei Reali di Savoia; del Cav. Luigi Cibrario, riemendato dopo la 3.^a^ edizione Lionese. Torino, Stamperia Reale, febbraio 1855, 1 foglio gr.

ALBINI Storia della legislazione in Italia, dalla fondazione di Roma sino ai nostri tempi, e in particolare nella Monarchia di Savoia; sommariamente esposta da P. L. Albini. Seconda edizione, migliorata ed accresciuta; Parte 1.^a^ Legislazione Romana; Parte 2.^a^ Legislazione del Medio Evo e dell'età moderna. Vigevano, Spargella e C.^a^, 1854 e 1856, 2 vol., 8.°

BONGHI Intorno alle maioliche di Castelli; di Diego Bonghi. Napoli, 1856, 4.°

CAP Études biographiques pour servir à l'histoire des Sciences; par Paul-Antoine Cap. Première Série. Chimistes-Naturalistes. Corbeil, Crété, 1857, 1 vol., 12.°

Meccanica. — Sopra un modello di macchina a vapore, inventato e costrutto dal sig. Giacomo Lusvergh; comunicazione del Prof. Paolo Volpicelli (Estr. dagli *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. Sessione VI del 22 settembre 1853). 4.° fig. — VOLPICELLI.

Algebra. — Proprietà dei numeri, osservata dal Prof. P. Volpicelli (Estr. dagli *Atti* come sopra). 4.°

Chemin de fer de Marseille au Rhône. Comparaison du tracé par la vallée de la Durance, et du tracé par la vallée du Rhône. Arles, Garcin, 1842, 8.° — GAZZERA.

Chronoscope nouveau de M. Gloesener. Paris, 1856, 8.° — GLOESENER.

Di Giambattista Vermiglioli; de' monumenti di Perugia etrusca e romana; della letteratura e bibliografia perugina, nuove pubblicazioni del Conte Giancarlo Conestabile. Parte 3.ª: Monumenti della necropoli del Palazzone circostanti al sepolcro de'Volumni. Perugia, Bartelli, 1856, 1 vol., 4.° con atlante fol. — CONESTABILE.

Cenni biografici del Commendatore Luigi Canina; di A. Coppi (inserti nel *Giornale di Roma*, N.° 291, 1856). Fol. — COPPI.

Développement du Lombric terrestre; par Jules d'Udekem (Extr. du Tom. XXVII des *Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers de l'Acad. R. de Belgique*). (Mémoire couronné le 15 décembre 1853). 4.° fig. — D'UDEKEM.

Histoire naturelle du Tubifex des ruisseaux; par Jules d'Udekem (Extr. du Tom. XXVI des *Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers de l'Acad. R. de Belgique*). 4.° fig.

Recherches sur le développement des Infusoires; par M. J. D'Udekem (Extr. du Tom. XXX des *Mémoires de l'Acad. R. de Belgique*). 4.° fig.

Descrizione delle macchine e procedimenti per cui vennero accordati attestati di privativa in conformità della Legge 12 marzo 1855, pubblicata d'ordine del sig. Ministro delle Finanze. Primo e secondo semestre, puntata 1.ª-2.ª, 1855. Torino, Marzorati, 1855, testo in-4.° Atlante in-4.° obl. — ISTITUTO TECNICO.

Almanaque náutico para el año 1857, calculado de órden de S. M. en el Observatorio de marina de la ciudad de S. Fernando. Cadiz, 1855, 1 vol. 4.° picc. — OSSERVATORIO DI MARINA *di S. Fernando.*

Descrizione del nuovo Osservatorio del Collegio Romano D. C. D. G., e Memoria sui lavori eseguiti dal 1852 a tutto aprile 1856; del P. Angelo Secchi. Roma, tip. delle Belle-Arti, 1856, 1 vol., 4.° fig. — OSSERVATORIO DEL COLLEGIO ROMANO.

OSSERVATORIO ASTRONOMICO *d'Oxford.*

Astronomical and meteorological observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the Year 1854; by Manuel J. Johnson. Vol. XV. Published by order of the Radcliffe Trustees. Oxford, 1856, 1 vol., 8.°

ACCADEMIA D'AGRIC., COMM. ED ARTI *di Verona.*

Memoria dell'Accademia d'Agricoltura, Commercio ed Arti di Verona. Vol. XXVIII-XXXII. Verona, 1851-1855, 5 vol., 8.° fig.

REALE ACCADEMIA MEDICO-CHIRURGICA *di Torino.*

Giornale delle scienze mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino. Dal n.° 10 del Vol. XXIII al n.° 24 del Vol. XXVII. Torino, 1855-1856, 8.°

R. ACCADEMIA DEI GEORGOFILI *di Firenze.*

Rendiconti delle adunanze della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze. Dal fasc. di *aprile* 1855 a quello di *luglio* 1856. Firenze, 1855-1856, 8.°

Continuazione degli atti della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze. Nuova serie, Vol. II, dispense 1-4; Vol. III, dispense 1.ª-4.ª Firenze, 1855-1856, 8.°

Sulla malattia delle uve. Rapporto generale della Commissione della Reale Accademia dei Georgofili, compilato dal Dottore Adolfo Targioni-Tozzetti. Firenze, Cellini, 1856, 1 vol. 8.° fig.

ISTITUTO IMP *di Francia.*

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; par MM. les Secrétaires perpétuels. Tom. XL, n.° 22-26; Tom. XLI, XLII et XLIII. Paris, 1855-1856, 4.°

Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France. Tom. XXVII, 1.ère partie. Paris, 1856, 4.°

Mémoires de l'Institut Impérial de France. Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Tom. XVIII, 1.ère partie. Paris, 1855, 4.°

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques. Tom. XIV. Paris, Imprimerie Impériale, 1856, 1 vol. 4.° fig.

Géographie physique. Expériences sur la direction des courants de l'océan Atlantique septentrional (Lettre de S. A. I. le Prince Napoléon à M. Élie de Beaumont (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut I. de France*, Tom. XLIII, 1856). 4.°

SOC. GEOLOGICA *di Francia.*

Bulletin de la Société Géologique de France. Deuxième série. Tom. XI, feuilles 46-50; Tome XII, feuilles 1-3, 12-65; et Tom. XIII, feuilles 1-19. Paris, 1854-1856, 8.°

Liste des Membres de la Société Géologique de France au 1.er mai 1856. Paris, 1856, 8.°

L'Istitutore. Giornale della Società d'istruzione e di educazione. Anno III, N.° 22-52. Torino, 1855, 8.° — La Società'.

Appendice all'Istitutore. N.° 2-9. Torino, 1855-1856, 8.°

Bullettino delle Scienze mediche della Società Medico-Chirurgica di Bologna. Serie IV. Dal fascicolo di *maggio* 1855 sino a quello di *dicembre* 1856. Bologna, 1855-1856, 8.° — Società' Medico-Chirurgica *di Bologna.*

Memorie della Società Medico-Chirurgica di Bologna. Vol. V, fasc. 4.° Bologna, 1855, 4.°

Annals of the Lyceum of natural history of New-York. Vol. III. New-York, 1828-1836, 8.° fig. — Liceo di St. nat. *di Nuova-York.*

The geographical and commercial Gazette. A monthly publication, devoted to physical, commercial and political geography, edited by an association of practical and scientific gentlemen. N.° 1-6. New-York, 1855, fol. fig. — La Società'.

Annales de la Société d'Agriculture de la Rochelle - 1853, n.° 18-20. La Rochelle, 1854, 8.° — Società' d'Agric. *della Rochelle.*

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Cherbourg. Tome 2.e Cherbourg, 1854, 1 vol. 8.° — Società' delle Scienze nat. *di Cherbourg.*

Annales des mines, ou recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent; rédigées par les Ingénieurs des mines, etc. 5.e série, Tom. VI, Livraisons 5.e et 6.e; Tom. VII-VIII, Livraisons 1.e-6.e; Tom. IX, Livr. 1.e-2.e Paris, 1854-1856, 8.° fig. — Amministrazione gen. delle Miniere *di Francia.*

Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon. Deuxième série. Tom. IV. Dijon, 1855, 1 vol. 8.° — Acc. delle Scienze *di Dijon.*

Journal d'agriculture publié par le Comité central d'Agriculture de la Côte-d'or. 18.e année. Dijon, 1855, 8.° — Comitato centrale d'Agricoltura *di Dijon.*

Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe, 1854, Heft I-III; 1855, Heft I-II; 1856, Heft I. Leipzig, 1854-1856, 4.° min. — R. Società' delle Sc. *di Lipsia.*

Berichte über die Verhandlungen der K. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philologisch-historische Classe, 1854, Heft I-VI; 1855, Heft I-IV; 1856, Heft I-II. Leipzig, 1854-1856, 4.° min. fig.

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, im april 1856, 1/4 di fogl. 4.° min.

ACCAD. DE'CURIOSI DELLA NATURA *di Breslavia*

Novorum Actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum. Vol. XXIV, Pars II. *Supplementum.* Vol. XXV, Pars I. Vratislaviae et Bonnae, 1854, 4.° fig.

Concours de l'Académie Impériale Léopoldo-Caroline des Naturalistes de Breslau, proposé par le Prince Anatole de Demidoff, à l'occasion de l'anniversaire du jour de naissance de S. M. l'Impératrice mère Alexandra de Russie, le 13 juillet (n. s.) 1856. Publié le 1.er juillet 1855. Florence, Le Monnier, 4.°

Preisfrage der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher. Ausgesetzt von dem Fürsten Anatol von Demidoff, Mitglied der Akademie (Beinamen Franklin), zur Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes Ihrer Majestät der verwittw. Kaiserin Alexandra von Russland, am 13 juli 1856, Bekannt gemacht den 1 juni 1855, 4.°

R. ACCADEMIA *di Savoia.*

Mémoires de l'Académie Royale de Savoie. Seconde série, Tome II Chambéry, 1854, 1 vol. 8.° fig.

SOCIETA' IMPERIALE D'AGRICOLT., ecc *di Lione.*

Annales des Sciences physiques et naturelles, d'agriculture et d'industrie, publiées par la Société Impériale d'Agriculture, etc. de Lyon. 2.ème série, Tom. VI, VII, Partie 1.ère Lyon, Barret, 1854-1855, 2 vol. 8.°

SOCIETA' LINNEANA *di Lione.*

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Années 1854-1855 (nouvelle série), Tome 2.e Lyon, 1855, 1 vol. 8.° fig.

ACCAD. IMPERIALE DELLE SCIENZE, B.-LETTERE ED ARTI *di Lione.*

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des Sciences. Nouvelle série, Tom. III-VI. Lyon, 1853-1856, 4 vol. 8.°

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des Lettres, Tom. III-IV. Lyon, Dumoulin, 1853-1854, 2 vol. 8.°

ACC. DELLE SCIENZE DELL'ISTITETO *di Bologna.*

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Tomi V-VI. Bologna, 1854-1855, 2 vol. 4.° fig.

Indices generales in Novos Commentarios Academiae Scientiarum Instituti Bononiensis. Bononiae, 1855, 4.°

Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Anno accademico 1853-1855. Bologna, 1854-1855, 8.°

Programma dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna pel concorso al premio Aldini, sul galvanismo, per l'anno 1857. Bologna, 1856, 4.°

Extrait du programme de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem, pour les années 1855 et 1856. Harlem, 1855-1856, 4.° — Società' Olandese delle Scienze *di Harlem.*

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. Tweede Verzameling, 11 Deel, Tweede Stuk. Haarlem, 1856, 4.° fig.

Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei; compilati dal Segretario. Anno VI, sessione 1.ª-5.ª, 1852-53. Roma, 1855-56, 4.° — Accad. Pontificia de'Nuovi Lincei.

Dissertazioni della Pontificia Accademia Romana di Archeologia. Tom. XIII. Roma, 1855, 1 vol. 4.° fig. — Pontificia Accad. Romana di Archeologia.

Journal of the Asiatic Society of Bengal; edited by the Secretary. New Series. N.° 7, 1854; N.° 1-7, 1855; N.° 1-3, 1856. Calcutta, 1854-1856, 8.° — Società' Asiatica *di Calcutta.*

Bibliotheca Indica, a collection of oriental works. N.r 36, 58-92, 102, 128, 130-131, 133-139. Calcutta, 1850-56, 8.° and 4.°

Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Floehaer Kohlenbassins im vergleich zu der Flora des ewickauer Steinkohlengebirges; gekrönte Preisschrift; von Hanns Bruno Geinitz. Leipzig, 1854, 1 vol. 8.°, mit XIV. Kupfertafeln; in gross Fol.° — Soc. Jablonowski *di Lipsia.*

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXV. Batavia, 1853, 1 vol. 4.° — Società delle Arti e Sc. *di Batavia.*

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land-en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen; onder redactie der Heeren D.r P. Bleeker, M.r L. W. C. Keuchenius, J Munnich en E. Netscher. Jaargang I, Aflevering 1-12. Batavia, 1852, 8.°

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indie, uitgegeven door de Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië. Derde Jaargang. Nieuwe serie. Deel I-II, IV-VI, Aflev. 1-4; Deel VII. Derde serie, Deel I, Aflev. 1-3. Batavia, 1851-1855, 8.° fig.

The Quarterly Journal of the Chemical Society of London. Vol. VIII-IX, N.r 30-35. London, 1855-1856, 8.° — Società' Chimica *di Londra.*

The Quarterly Journal of the Geological Society. Vol. XI, N.r 42-44; Vol. XII, N.r 45-47. London, 1855-56, 8.° fig. — Soc. Geologica *di Londra*

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Deel II. Amsterdam, 1855, 1 vol., 4.° fig. — R. Accademia delle Scienze *di Amsterdam*

Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Deel II, Stuk 3; Deel III, Stuk 1-2. Amsterdam, 1854-55, 8.° fig.

Koninklijk Besluit tot vorming der Akademie van Wetenschappen: —

Organiek reglement der Akademie. — Memorie van Toelichting, Ingediend door de staats-commissie. — Personele staat der Akademie op 28 april 1855. Amsterdam, 1855, 4.°

Catalogus der boekery, van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam. Aflevering I. Amsterdam, 1855, 8.°

IMPERIALE E REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana. Nuova serie. Tom. VI, fasc. 33-36; Tom. VII, fasc. 37-48. Milano, 1854-56, 4.° fig.

Memorie dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. V. Milano, Bernardoni, 1856, 1 vol. 4.° fig.

Programma di concorso pubblicato dall'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti. Milano, 1856, 4.°

Nuovo programma di concorso al premio di fondazione Cagnola, pubblicato dall'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti. Milano, 1856, 4.°

Storia e statistica dell'industria manifatturiera in Lombardia; di Giovanni Frattini. Memoria onorata del premio d'incoraggiamento dall'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti nell'anno 1856, Milano, Bernardoni, 1856, 1 vol. 8.°

Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. I, che abbraccia sino al giugno 1856. Milano, Bernardoni, 1856, 1 vol. 8.°

REALE SOCIETA' BORBONICA *di Napoli.*

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze della Società Reale Borbonica. Nuova serie. Anno IV; bimestri di gennaio-febbraio; luglio-agosto, settembre-ottobre. Anno V; bimestre di gennaio-febbraio. Napoli, Nobile, 1854-56, 4.° fig.

Elogio-storico di Macedonio Melloni; di Antonio Nobile. Napoli, G. Nobile, 1855, 4.°, con ritratto.

SOCIETA' IMPERIALE DEI NATURALISTI *di Mosca.*

Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, dédiés à S. M. l'Empereur Nicolas I. Tome IX, formant le Tome XV de la collection. Moscou, 1851, 1 vol. 4.° fig.

Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, publié sous la rédaction du Docteur Renard. Année 1854, n.° I-IV. Année 1855, N.° I. Moscou, 1854-55, 8.° fig.

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE *di Stoccolma.*

Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar, för år 1852-53. Stockholm, 1854-55, 2 vol. 8.° fig.

Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Argângen 1853-54. Stockholm, 1854-55, 2 vol. 8.° fig.

Acc. Imp. delle Sc. di Vienna.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe; Jahrgangs 1854-56. Band XIV, Heft III; Band XV, Heft I-III; Band XVI, Heft I-II; Band XVII, Heft I-III; Band XVIII, Heft I-II; Band XIX, Heft I-II; Band XX, Heft I. Wien, 1855-1856, 8.°

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Philosophisch-historischen Classe. Jahrgangs 1854-1856. Band XIV, Heft I-II: Band XV, Heft I-III; Band XVI, Heft I-II; Band XVII, Heft I-III; Band XVIII, Heft I-II; Band XIX, Heft I-II; Band XX, Heft I. Wien, 1855-1856, 8.°

Archiv für Kunde österreichischer Geschichts-Quellen. Herausgegeben von der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften. Band XIV, Hälfte I-II; Band XV, Hälfte I-II; Band XVI, Hälfte I. Wien, 1855-1856, 8.°

Notizenblat. Beilage zum Archiv für kunde österreichischer Geschichts-Quellen. Herausgegeben von der historischen Commission der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Wien, 1855, n.° 1-24; 1856, n.° 1-14, 8.°

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band IX-XI. Wien, 1855-1856, 3 vol. 4.° fig.

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. Band VI. Wien, 1855, 1 vol. 4.° fig.

Jahrbücher der K. K. Central-austalt für Meteorologie und Erdmagnetismus; von Karl Kreil. Band III-IV, Jahrgang 1851-1852. Herausgegeben durch die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Wien, 1855-1856, 2 vol. 4.°

Monumenta Habsburgica. Sammlung von Actenstücken und Briefen zur Geschichte des Hauses Habsburg in dem Zeitraume von 1473 bis 1576. Herausgegeben von der histor. Commission der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Erste Abtheilung: Das Zeitalter Maximilian's I. zweiter Band. Wien, 1855, 1 vol. 8.°

Verlags-Catalog, von Wilhelm Braumüller. Wien, 1855, 8.°

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschicht-Quellen. Herausgegeben von der historischen Commission der K. Akademie der Wissenschaften in Wien. *Diplomataria et Acta*, Band VIII-IX; Band XII, zweite Abtheilung; *Scriptores*, Band I. Wien, 1855-1856, 5 vol. 8.°

Almanach der K. Akademie der Wissenschaften. Sechster Jahrgang. Wien, 1856, 1 vol. 12.°

Soc.ᵀᴬ di Geografia *di Parigi.*

Bulletin de la Société de Géographie de Paris. 4.ᵉ série. Tomes IX-XI. Paris, 1855-1856, 3 vol. 8.°

Società d'Agric., Comm., Sc. ed Arti *del dipartimento della Marna.*

Procès-verbal de la séance publique de la Société d'agriculture, commerce, sciences et arts du département de la Marne, tenue à Châlons le 29 août 1855. Châlons, Laurent, 1855, 8.°

Museo di Storia naturale *di Francia.*

Archives du Muséum d'histoire naturelle, publiées par les Professeurs-Administrateurs de cet établissement. Tomes VII et VIII. Paris, 1853-1855, 2 vol., 4.° fig.

I. R. Istituto geologico *di Vienna.*

Abhandlungen der Kaiserlich-Königlichen geologischen Reichsanstalt. Band II. Wien, 1855, 1 vol., 4.° fig.

Jahrbuch der Kaiserlisch-Königlichen geologischen Reichsanstalt. 1854, V Jarhgang, n.° 3-4; 1855, VI Jahrgang, n.° 1-2. Wien, 1854-55, 4.° fig.

R. Accad. delle Sc *di Berlino.*

Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1854. Berlin, 1855, 1 vol. 4.° fig.

Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Erster Supplement-Band. Berlin, 1856, fol.

Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahren 1854 (*August-December*); 1855 (*Januar-December*). Berlin, 1854-56, 8.°

R. Società' *di Londra.*

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year 1855. Part I-II. London, Taylor and Francis, 1855, 4.° fig.

Proceedings of the Royal Society of London. Vol. VII. N.ʳ 8-18. London, 1855, 8.°

R. Società' *di Edimburgo.*

The Royal Society of London, 30 th. november 1855. London, 1855, 4.°

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXI. Part. II, for the session 1854-55. Edinburgh, 1855, 4.° fig.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Session 1854-55. Vol. III, n.° 45. Edinburgh, 1855, 8.°

I. R. Accademia di Sc., Lett ed Arti *di Padova.*

Rivista periodica dei lavori della I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova. Vol. III. Padova, Sicca, 1854-55, 8.°

Programma di concorso proposto dall'I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova. Padova, 1856, 4.°

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Tom. XXVIII-XXIX. Bruxelles, 1854-55, 2 vol. 4.° fig. — R. Accad. di Sc., Lett. e Belle-Arti *del Belgio.*

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Tom. XXVI, 1854-55. Bruxelles, 1855, 1 vol. 4.° fig.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8.°, Tom. VI, 2.ème partie. Bruxelles, 1855, 8.°

Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Tom. XXI, 2.ème partie; Tom. XXII, 1.ère partie. Bruxelles, 1854-55, 2 vol. 8.°

Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1855. 21.ème année. Bruxelles, 1855, 1 vol. 18.°

Bibliographie Académique, ou liste des ouvrages publiés par les Membres, Correspondants et Associés résidents de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts de Belgique. 1854. Bruxelles, 1855, 8.°

Annuaire de l'Observatoire Royal, par le Directeur A. Quetelet. 1855. Bruxelles, 1854, 18.° — Quetelet.

Jahresbericht der Wetteraner Gesellschaft für die gesammte Naturkunde zu Hanau über die Gesellschaftsjahre von August 1853 bis dahin 1855. Hanau, 1855, 1 vol. 8.°, und kart. — Soc. Wetteraviana dei Naturalisti *di Hanau.*

Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchatel. Tom. III.e Neuchatel, 1853, 8.° — Societa' di Sc. nat. *di Neuchatel.*

Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchatel. Tome IV. Premier cahier. Neuchatel, 1856, 8.° fig.

Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Tomo I. Tercera serie, *Ciencias naturales;* Tomo I.°, Parte 3.ª Madrid, Aguado, 1854, 4.° — Reale Accademia delle Scienze *di Madrid.*

Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Tom. II, 1.ª serie, *Ciencias exactas;* Tom. I, Parte 1.ª Madrid, Aguado, 1853, 4.°

Resumen de las Actas de la Real Academia de Ciencias de Madrid en el año academico de 1851 à 1852, y 1852 à 1853, leidos en el dias 8 y 14 octubre por el Secretario perpetuo Doctor Don Mariano Lorente. Madrid, Aguado, 1853-54, 2 opusc. 8.°

Programa de la Real Academia de Ciencias de Madrid para la adjudication de premios en el año 1856. Madrid, 1855, 4.°

The Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXII, part. VI, — R. Accademia *d' Irlanda*

Polite literature; Vol. XXIII, part. I, *Science*. Dublin, Gill, 1855-56, 4.° fig.

Proceedings of the Royal Irish Academy, for the years 1854-56. Vol. VI. Part. II-III. Dublin, Gill, 1855-56, 8.°

An Essay on the probability of Saul, Heniah, Abishai, Jehoshaphat, Jehohanan, and Amessias, son of Zichri, having been the Hycsos rulers, Salatis, Beon, Apachnas, Apophis, Jonias, and Assis, with a Table of Synchronisms: constructed according to the statements of the Gentiles, as to the Jews having been the *Captive Shepherds* or Yellow *Hycsos* the hereditary rivals and enemies of the *Athomites* the *Red*, or *Monumental Egyptians*, who are herein identified with the Edomites, or *Red-men* of the Hebrew Scriptures. Compiled by Edward Clibborn, to illustrate his *Essais on the individualities of Esau and Saul with Sesostris and Salatis*. Dublin, 1844, in-8,° and in-fol.°

SOCIETA' LINNEANA *di Londra.*

The Transactions of the Linnean Society of London. Vol. XXI, part. IV. London, 1855, 4.° fig.

Proceedings of the Linnean Society of London, n.° 59-66. London, 1854-55, 8.°

List of the Linnean Society of London. London, 1855, 8.°

Address of Thomas Bell, the President, together with obituary notices of deceased members, by John J. Bennett, the Secretary, read at the anniversary meeting of the Linnean Society on thursday, may 24, 1855. London, 1855, 8.°

OSSERVATORIO FISICO CENTRALE *di Russia.*

Annales de l'Observatoire physique central de Russie, publiées par ordre de Sa Majesté l'Empereur Nicolas I. sous les auspices de S. Exc. M.r de Brock; par A.-T. Kupffer. Année 1852. S.t-Pétersbourg, 1855. 1 vol. 4.°

Compte-rendu annuel adressé à S. Exc. M.r de Brock, par le Directeur de l'Observatoire physique central, A.-T. Kupffer. Année 1853-54. Supplément aux Annales de l'Observatoire physique central, pour l'année 1852-53. S.t-Pétersbourg, 1854-55, 4.°

R. ACCAD. DELLE SC. *di Baviera.*

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Siebenten Bandes, dritte Abtheilung. München, 1855, 4.°

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Siebenten Bandes, zweite und dritte Abtheilung. München, 1854-55, 4.°

Abhandlungen der historischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Siebenten Bandes, erste und dritte Abtheilung. München, 1855-56, 4.°

Almanach der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1855. München, 1855, 12.°

Rede über das hohe Geburtsfest Sr. Maj. des Königs Maximilian II und die Veränderung im Personalstande der Königlichen Akademie der Wissenschaften; gehalten von Friedrich von Thiersch. München, 1855, 4.°

Rede in der öffentlichen Sikung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu ihrer 96 Stiftungsfeier; gehalten von Friedrich von Thiersch. München, 1855, 4.°

D.r Lorenz Hübner's biographische charakteristik, vorgetragen in der öffentlichen Sikung der K. Akademie der Wissenschaften zu München am 15 juni 1822; von Joseph Wissmayr. München, 1855, 4.°

Friedr. Wilh Joseph v. Schelling. Denkrede, vorgetragen in der öffentlichen Sikung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, zur Feier ihres sechs und neunzigsten Stiftungstages am 28 märz 1855; von D.r Hubert Beckers. München, 1855, 4.°

Denkrede auf die Akademiker D.r Thaddäus Siber und D.r Georg Simon Ohm, im auszuge vorgetragen in der öffentlichen Sikung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, zur Feier ihres sechs und neunzigsten Stiftungstages am 28 märz 1855; von D.r Lamont. München, 1855, 4.°

Smithsonian contributions to Knowledge. Vol. VII. City of Washington, 1855, 1 vol. 4.° fig. — Istit. Smithsoniano di Washington.

Eighth annual report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures, and condition of the institution up to january 1, 1854, and the Proceedings of the Board up to july 8, 1854. Washington, 1854, 1 vol. 8.°

Smithsonian Report. On the construction of catalogues of libraries, and their publication by means of separate, stereotyped titles, with rules and examples; by Charles C. Jewet. 2.d edition. Washington, 1853, 1 vol. 8.°

Ninth annual report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures, and condition of the institution up to january 1, 1855, and the Proceedings of the Board up to february 24, 1855. Washington, 1855, 1 vol. 8.°

GOVERNO *di Washington*

Report of the Commissioner of Patents for the year 1853. Part. I, Arts and Manufactures; Part II, Agriculture. Washington, 1854, 2 vol. 8.° fig.

Report of the Commissioner of Patents for the year 1854, Arts and Manufactures. Vol. I, Text. Washington, 1855, 1 vol. 8.°

Ninth annual report of the Board of Agriculture of the State of Ohio, to the Governor, for the year 1854. Columbus, 1855, 1 vol. 8.°

SOC. AGR. *di Michigan.*

Transactions of the State of Michigan agricultural Society; with reports of county agricultural Societies, for 1853, Vol. V. Lansing, 1854, 1 vol. 8.°

ACCAD. AMERICANA D'ARTI E SCIENZE.

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. New series, Vol. I-III and IV, Part. I. Cambridge and Boston, 1833-49, 4 vol. 4.° fig.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. III, from May, 1852, to January, 31, 1855. Cambridge and Boston, 1853-1855, 8.°

SOC. FILOS. AMERIC. *di Filadelfia.*

Proceedings of the American Philosophical Society of Philadelphia. Vol. VI, n.° 51-52 Philadelphia, 1854, 8.°

SOCIETA' DI FISICA E DI STORIA NATUR. *di Ginevra.*

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Tom. XIV, Partie 1.ère Genève, Fick, 1855, 4.° fig.

LA DIREZIONE DELLA SOC PEL SOCC. DEGLI ANNEGATI *a Amsterdam.*

Aperçu historique au sujet de la Société pour secourir les noyés, instituée à Amsterdam; par J. A. Kool. Tradnit du hollandais. Amsterdam, 1855, 1 vol. 8.° fig.

R. SOCIETA' ASIATICA *di Londra.*

The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. Vol. XV, Part. 2; Vol. XVI, Part. 2. London, 1855-1856, 8.°, with 3 illustrative Maps.

ISTITUZIONE REALE *della Gran Bretagna.*

Notices of the meetings of the Members of the Royal Institution of Great Britain. Part. V. November, 1854; july, 1855. London, 1855, 8.°

ASSOC. BRITANNICA PER L'AVANZAMENTO DELLE SCIENZE.

Report of the twenty-fourth meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Liverpool in september 1854. London, 1855, 1 vol. 8.° fig.

Report to be presented by the Parliamentary Committee to the British Association for the Advancement of Science at Glasgow, on the question, Whether any measures could be adopted by the Government or Parliament that would improve the position of Science or its Cultivators in this Country. London, 1855, 8.°

SOC. DELLE SCIENZE *di Finlandia.*

Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. IV, et Tomi V fasciculus I. Helsingforsiae, Früs, 1856, 4.° fig.

Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. I-III, 1838-56. Helsingfors, 1853-56, 4.° fig.

Observations faites à l'Observatoire magnétique et météorologique de Helsingfors, sous la direction de Jean Jacques Nervander. Première section: *Observations magnétiques*, Vol. I-IV; Deuxième section: *Observations météorologiques*, Vol. I-IV. Helsingfors, Gottlund, 1850, 4.°

Annales Academici 1851-1852. Lugduni-Batavorum, 1854, 1 vol., 4.° — Accademia *di Leida.*

Abhandlungen, herausgegeben von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Ersten Bandes zweite Lieferung; zweiten Bandes erste Lieferung. Frankfurt, A. M., 1855-1856, 4.° fig. — Societa' Senchenbergiana.

Schriften der Universität zu Kiel, aus dem Jahren 1854-1855. Band I-II. Kiel, 1855-1856, 2 vol. 4.° — L' Universita' *di Kiel.*

Mémoires et documents publiés par la Société d'Histoire de la Suisse Romande. Tome XIV, 1.ère Livr., 8.° — Societa' di Storia della Svizzera Romanda.

Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena. Tom. XXV, Parte 2.ª Modena, 1855, 1 vol. 4.° fig. — Societa' Italiana delle Scienze *di Modena.*

Memorie dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. VI. Venezia, 1856, 1 vol. 4.° fig. — I. R. Istituto *Veneto.*

SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIA STORICA

dei lavori fatti dalla Classe di Scienze Fisiche e Matematiche della Reale Accademia delle Scienze nell'anno 1855

scritta

dal Professore

EUGENIO SISMONDA

SEGRETARIO AGGIUNTO DI ESSA CLASSE

Letta nell'adunanza del giorno 21 dicembre 1856.

Onorevolissimi Colleghi,

Seguendo una consuetudine, che per la sua antichità e per la non mai interrotta osservanza si può ormai chiamare dovere, io Vi presento oggi, Colleghi onorevolissimi, la storia dei lavori Accademici fatti da questa Classe di Scienze fisiche e matematiche nel periodo del trascorso anno 1855.

Parecchie altre volte io già ebbi l'onore di compiere presso di Voi simile ufficio, e sempre mi vi accinsi con quella fidanza e con quel piacere che è naturale sentimento in chi sa di avere presenti per ascoltarlo gli Autori stessi dei lavori, di cui egli debbe render conto, ed i quali perciò possono emendare la sua narrazione ove avvenga che sia men che esatta e fedele. Ma oggi non è più così! Più non sono qui accolti tutti quelli che concorsero ai lavori, dei quali mi incumbe di parlare; nel volgere dei pochi mesi, che le autunnali ferie ci tennero divisi, due Membri di questa Classe scesero nella tomba, voglio dire il Conte Amedeo Avogadro di Quaregna, ed il Cavaliere Giacinto Provana di Collegno, morti quegli in Torino il giorno 9 luglio, questi a Baveno il giorno 29 settembre ultimo scorso.

Eletto Socio residente di quest'Accademia fin dall'anno 1819 e Direttore della nostra Classe per poco men di tre lustri, il Conte Avogadro fu uno degli Accademici più operosi, e fino agli ultimi giorni di sua vita continuò con mente giovane e con instancabile lena a lavorare intorno alle

Scienze fisico-chimiche da Lui predilette. Molte di sue Memorie ornano i Volumi di quest'Accademia; così quelle col titolo:

Nouvelles considérations sur la théorie des proportions déterminées dans les combinaisons, et sur la détermination des masses des molécules des corps; Vol. XXVI, Serie prima, 1821.

Sur la manière de ramener les composés organiques aux lois ordinaires des proportions déterminées; ivi.

Sur la construction d'un voltimètre multiplicateur, et sur son application à la détermination de l'ordre des métaux relativement à leur électricité par contact; Vol. XXVII, 1823.

Sur l'affinité des corps pour le calorique, et sur les rapports d'affinité qui en résultent entre eux; Vol. XXVIII, 1824, e XXIX, 1825 (due Memorie distinte).

Sur la densité des corps solides et liquides comparés avec la grosseur de leurs molécules, et avec leurs nombres affinitaires; Vol. XXX, 1826, e XXXI, 1827 (due distinte Memorie).

Comparaison des observations de M.r Dulong *sur les pouvoirs réfringens des corps gazeux, avec les formules de relation entre ces pouvoirs et les affinités pour le calorique, déduites des chaleurs spécifiques;* Vol. XXXIII, 1829.

Remarques sur la loi de la force élastique de l'air par rapport à la densité dans le cas de compression sans perte de calorique, et sur celle de la chaleur spécifique de l'air par rapport à la température et à la pression; ivi.

Mémoire sur les pouvoirs neutralisans des différens corps simples, déduits de leurs proportions en poids dans les composés neutres qui en sont formés; Vol. XXXIV, 1830.

Mémoire sur la force élastique de la vapeur du mercure à différentes températures; Vol. XXXVI, 1833.

Nouvelles recherches sur le pouvoir neutralisant de quelques corps simples; Vol. XXXIX, 1836.

Expériences sur quelques points douteux relatifs à l'action capillaire; Vol. XL, 1838.

Mémoire sur les volumes atomiques des corps composés; Vol. VIII, Serie seconda, 1846.

Mémoire sur les volumes atomiques et sur leur relation avec le rang que les corps occupent dans la série électro-chimique; ivi.

Troisième Mémoire sur les volumes atomiques. — Détermination des nombres affinitaires des différents corps élémentaires par la seule considération de leur volume atomique et de celui de leurs composés; Vol. XI, 1851.

Quatrième Mémoire sur les volumes atomiques des corps liquides à leur température d'ébullition; nombres affinitaires qui s'en déduisent pour quelques-uns des corps élémentaires; Vol. XII, 1852.

Finalmente nel Tomo XIII è stampata l'ultima Memoria letta dall'Avogadro in quest'aula Accademica, quella cioè intitolata: *Mémoire sur les conséquences qu'on peut déduire des expériences de M.r* Regnault *sur la loi de compressibilité des gaz.*

Altri parecchi scritti dell'Avogadro si trovano pubblicati nella parte fisica delle Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, di cui esso era uno dei quaranta Membri ordinarii; tali sono:

— *Memoria sopra la relazione che esiste tra i calori specifici ed i poteri refringenti delle sostanze gazose;* Vol. 18, anno 1818.

— *Sulla determinazione delle quantità di calorico che si sviluppano nelle combinazioni per mezzo dei poteri refringenti de' componenti, e de' composti;* ivi.

— *Nuove considerazioni sulle affinità dei corpi pel calorico, calcolate per mezzo dei loro calori specifici, e dei loro poteri refringenti allo stato gazoso;* Vol. 19, 1823.

— *Nouvelle considération et calculs relatifs à la chaleur spécifique du gaz etc.;* ivi.

— *Memoria sui calori specifici di corpi solidi e liquidi;* Vol. 20, 1832.

— *Saggio di teoria matematica della distribuzione dell'elettricità sulla superficie dei corpi conduttori nell' ipotesi dell'azione induttiva esercitata dalla medesima sui corpi circostanti, per mezzo delle particelle dell'aria frapposta;* Vol. 23, 1844.

— *Proposizione di un nuovo sistema di nomenclatura chimica;* Memoria divisa in due parti, stampate la prima nel vol. 23, la seconda nel 24, 1850.

Incontransi pure varie scientifiche scritture dell'Avogadro nel *Journal de physique de la Méthérie* dal 1806 in poi, negli *Annales de chimie et de physique*, nella *Biblioteca italiana*, nella *Bibliothèque universelle*, nel *Giornale di Pavia* ed in altri periodici.

Il suo lavoro principale si è la *Fisica dei corpi ponderabili* pubblicata

dal 1837 al 1841, opera in 4 grossi Volumi, dedicata a S. M. il Re Carlo Alberto, sotto i cui auspici venne essa in luce. Insomma dall'anno 1806, in cui l'Avogadro esordì nella carriera di scrittore colle sue *Considerazioni sopra i corpi non conduttori di elettricità*, fino all'anno 1853 nel quale la chiuse coll'ultima Memoria letta, come già dissi, in questo recinto *Sur les conséquences qu'on peut déduire des expériences de M.r* Regnault *sur la loi de compressibilité des gaz*, egli non cessò di scrivere a profitto della scienza, ed a sempre maggior lustro del proprio nome.

E mentre preparava tanti e sì svariati lavori, il Conte Avogadro attendeva ancora a varii uffici: dettò lezioni di fisica sublime nella R.ª Università dall'avvenimento di Re Carlo Alberto al Trono, che ristabilì tale cattedra, fino all'anno 1850, in cui esso dovette abbandonarla per ragioni di salute; coprì inoltre la carica, dall'anno 1824 fino al dì di sua morte, di Mastro-Uditore nella R.ª Camera dei Conti, mostrando eguale zelo ed eguale dottrina sì nell'arduo ufficio dell'Insegnante, che nella dilicata carica di Magistrato.

L'altro Collega, che lamento estinto, il Cavaliere Giacinto Provana di Collegno, fu ad un tempo uomo di scienza e politico; ogni maniera di virtù cittadine era in lui eminente, sicchè ben non saprei dire se maggiore fosse la fede e la fermezza d'animo contro i capricci della fortuna, o la nobiltà del carattere, o il sentimento della giustizia, o l'affetto per la patria. Giovinetto abbracciò la carriera delle armi, che gli eventi politici del 1821 l'obbligarono ad abbandonare insieme colla patria, dalla quale si tenne lontano finchè non la seppe retta con quella forma di governo, che fu mai sempre il supremo de' suoi voti.

Passò i primi tempi del suo esiglio, militando per la causa della libertà, in Portogallo, in Ispagna, in Grecia; recossi quindi in Francia, vi studiò la Geologia, e nominato Professore di questa scienza a Bordeaux, attese a quest'ufficio per parecchi anni, preparando in tale periodo una preziosa serie di lezioni, le quali, col titolo di *Elementi di geologia pratica e teorica*, vennero stampate dal Pomba nel 1847, ed in cui, oltre ai principii generali della scienza, trovi esposte in semplice e chiara forma tutte quelle cose, che meglio valgono a far conoscere il suolo d'Italia. Altri lavori geologici pubblicò il Collegno, come:

— *Essai géologique sur les collines de Superga, près de Turin;* Mém. de la Soc. Géol. de France, Vol. II, 1835.

— *Sulla giacitura del carbon fossile in Europa, ossia delle località ove riscontrare si può con certezza questo combustibile;* Milano, 1838.

— *Note sur les chances de succès que présenterait la continuation du sondage de la place Dauphine;* Bordeaux, 1841.

— *Sur le métamorphisme des roches de sédiment, et en particulier sur celui des dépots de combustible;* Bordeaux, 1842.

— *Mémoire sur la circulation des eaux souterraines dans le Sud-Ouest de la France;* Annales des Sciences géologiques par M. Rivière, Paris, 1842.

— *Sur les terrains diluviens des Pyrénées;* ivi, 1843.

— *Essai d'une classification des terrains tertiaires du département de la Gironde;* Bordeaux, 1843.

— *Mémoire sur les terrains stratifiés des alpes lombardes;* Bull. de la Soc. Géol. de France, 2.ème Série, Vol. I, 1843-44.

— *Nota sui terreni dei contorni della Spezia;* Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie 2.da, Vol. XII, 1852.

È ancora opera del Collegno, oltre ai lavori sovra menzionati, ed a molti articoli scientifici stampati principalmente nel citato *Bulletin de la Société Géologique de France*, una carta geologica della Penisola, lavoro questo, egli è vero, per la massima parte di mera compilazione, essendo esso fondato, siccome nota lo stesso Collegno, su quanto gli altri Geologi italiani già avevano fatto di pubblica ragione, ciascuno con descrizioni particolareggiate della propria provincia, ma lavoro nondimeno che fu accolto dai Dotti con riconoscenza, come quello che avea il pregio di riassumere, per così dire, i risultamenti degli studii di molti, sparsi in molte Memorie accademiche non facili a procacciarsi, e di presentarli coordinati giusta le teorie geologiche allora più generalmente professate.

Rientrato definitivamente in patria allorchè, come dissi, la seppe venuta a quella forma di governo, per promuovere la quale nel 1821 avea dovuto andarne esigliato, il Cav. Giacinto Provana di Collegno si vide tosto chiamato dalla volontà del Re non meno che dal desiderio de' suoi concittadini a varie eminenti cariche, a cui la sua fama di uomo politico e militare naturalmente l'additava. Quindi è che nel 1848, epoca che cancellò molte ruggini antiche, fu promosso al grado di Maggior Generale, e nominato a Senatore del Regno; nell'istesso anno, recatosi a Milano, vi fu dal Governo provvisorio incaricato del portafoglio della Guerra, collo speciale mandato di allestire il Corpo detto poi di Armata Lombarda;

nel 1852 venne prescelto ad Inviato straordinario e Ministro plenipotenziario di S. M. a Parigi, e nel 1855 ebbe il comando generale della Divisione di Genova, cariche queste due ultime, che coprì per poco tempo, volontariamente dismettendosene per motivi, che fanno l'elogio della sua modestia e della sua prudenza.

Io non entro in maggiori particolari intorno alla vita del Conte Avogadro e del Cav. di Collegno, perchè il mio intendimento non è di tessere qui la loro biografia, ma solo di non lasciarmi sfuggire l'opportunità di gettare un fiore sulla tomba di questi illustri nostri Colleghi, e di notare i punti più spiccati della loro carriera, onde dimostrare quali erano gli uomini, che noi abbiamo avuto la sventura di perdere nelle passate ferie.

E quando, invece di limitarmi a quelle della nostra Classe, lamentar qui volessi le perdite tutte fatte dall'Accademia nel citato breve periodo, altri due nomi illustri io dovrei qui ricordare, cioè l'erudito Autore degli *Studi critici sovra la storia d'Italia ai tempi del Re* Ardoino, il Cav. Luigi Provana del Sabbione, e'l dottissimo illustratore dei templi, del foro, e di tutti i meravigliosi edifizi dell'antica Roma, il Commend. Luigi Canina, ambidue Membri della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche di quest'Accademia, e morti quegli in Torino il giorno 27 luglio, questi in Firenze il 17 ottobre p. p. Ma io lascio ad altri, versato negli studii, che questi distinti ingegni coltivarono con tanta gloria, l'onore di rendere alla loro memoria quel tributo di lode, che ben le è dovuto, e passo tosto a render conto dei lavori fatti da Voi, onorevolissimi Colleghi, tenendo nella mia narrazione l'ordine stesso, col quale essi si succedettero, e non prefiggendomi altra mira che quella di riuscire espositore chiaro e fedele.

7 gennaio.

Il Cav. Sobrero, condeputato col Cav. Cantu', fa relazione su una domanda sporta al R. Governo dai signori D. Schiapparelli e B. A. Rossi, diretta ad ottenere il privilegio *per la fabbricazione di un concime particolare da essi denominato* Lingottina.

È la *Lingottina* un concime artificiale polveroso, inodoro, facile a trasportarsi, contenente sotto picciol volume buona copia di materiali fertilizzanti, di composizione stabile, e capace per siffatte proprietà di essere

impiegato nell'agricoltura con maggior vantaggio che non lo sono gli altri concimi generalmente in uso.

Giusta le indicazioni date dai Postulanti, su cento parti contiene:

1.° Deiezioni umane, sangue, ecc. evaporati ad $\frac{1}{3}$ ..... 50.
2.° Solfato o cloridrato d'ammoniaca ..... 8.
3.° Carbone animale con solfato di calce ..... 25.
4.° Solfato di calce deacquificato ..... 5.
5.° Ceneri contenenti silicati di potassa ed altri ..... 5.
6.° Solfato di soda ..... 5.
7.° Solfato di ferro o muriato di manganese ..... 1.
8.° Olio empireumatico animale ..... 1.

Il procedimento seguito dai Ricorrenti nella preparazione del concime in discorso sta nel disinfettare escrementi umani, sangue, acque del gaz ecc. col mezzo di sali metallici e di carbone animale poroso misto con materie terrose e saline, quale ottiensi dalla distillazione secca delle ossa, dei cuoi logori, delle lane, ecc., e nell'unire a tale miscuglio il solfato ed il cloridrato d'ammoniaca ricavati dalla distillazione delle sovra nominate materie solide animali.

Osserva la Giunta Accademica non avervi nel riferito procedimento alcuna novità, essendo esso fondato su principii di chimica tecnica a tutti noti; tuttavia essa fa considerare alla Classe, che nel nostro paese non esiste per anco un'officina, nella quale i detti materiali concimanti, così dissimili tra loro per consistenza, per natura, e per ricchezza di principii fertilizzanti, si trattino in modo, che senza perdere di loro efficacia, rendansi per la forma polverosa, per la diminuita mole, per la costanza delle proporzioni e per altri caratteri, capaci di soddisfare meglio ai bisogni dell'agricoltura.

Enumerando i vantaggi della fabbricazione della *Lingottina*, il Relatore annovera pur quello di far desistere forse dalla costruzione in questa città di canali sotterranei pei quali si guida a perdersi nel letto del Po un'immensa quantità di sostanze che possonsi volgere a benefizio dell'agricoltura. A questo proposito il Cav. Cavalli osserva essere in parte già soddisfatto il voto della Commissione, poichè il Municipio deliberò che fossero sospesi i lavori di costruzione dei canali destinati appunto a trascinar nel Po le materie in questione, fino a tanto che si conoscessero i risultamenti delle operazioni, che sarà per intraprendere la società della *Lingottina*. Nella relazione è inoltre detto che *non mancano i ritrovati dell'arte, pei*

quali queste materie, senza pregiudizio della pubblica igiene, si conservano, e trasportate nell'officina, si convertono in concimi. Intorno a quest'espressione il Cav. Menabrea domanda schiarimenti al Relatore, temendo che con essa si voglia tacitamente proporre l'uso di latrine portatili, come praticasi nella contea di Nizza, a Marsiglia, ecc. Il Relatore, e secolui il condeputato Cav. Cantu' rispondono che le loro parole non mirano a suggerire l'adozione di un mezzo a preferenza di un altro, ma solo ad invitare le Autorità competenti a non lasciar più andar perdute nel Po le già più volte nominate materie, e ad utilizzarle con uno di quei mezzi di disinfezione e di adunamento delle medesime già adottati nelle grandi capitali d' Europa, e che hanno per iscopo di conciliare la pubblica igiene e la comodità delle famiglie coi vantaggi, che possonsi ricavare dall'impiego, come concime, delle materie fecali e di quelle altre, colle quali i sig.ri Rossi e Schiapparelli intendono appunto di alimentare la loro industria.

Al postutto la Giunta conchiude proponendo in favore dei sig.ri Rossi e Schiapparelli la concessione del chiesto privilegio, conclusione che la Classe approva con tutti i voti.

28 gennaio.

Nel dare alla Classe comunicazione del carteggio, il Segretario Aggiunto legge particolarmente due lettere del sig. Ministro dell' Interno, indiritte al Presidente dell'Accademia. Nella prima di esse, in data 8 gennaio 1855, la R. Accademia delle Scienze è invitata ad intervenire al solenne *Te Deum* che il Governo avea stabilito che si cantasse il giorno 9 del detto mese nella Cattedrale in rendimento di grazie perchè S. M. la Regina Regnante avea dato felicemente alla luce un Principe Reale; nella seconda lettera, in data 19 pure gennaio, l'Accademia è invitata ad assumere un segno di lutto per la morte di S. M. la Regina Maria Teresa, avvenuta il giorno 12 dello stesso mese di gennaio.

Il Presidente Barone Plana, togliendo come occasione dalla lettura di queste lettere, notifica alla Classe, che il Consiglio d'Amministrazione dell'Accademia fattosi interprete dei sentimenti dell'intiero Corpo Accademico, avea testè fatto un *Indirizzo* a S. M. il Re, per esprimere alla M. S. la parte, che l'Accademia delle Scienze prendeva alle sue afflizioni per la morte delle due Regine Maria Teresa, e Maria Adelaide. La Classe

approva l'idea del Consiglio d'Amministrazione, come approva il tenore dell'*Indirizzo*, che il Segretario Aggiunto legge, e che è concepito nei seguenti termini:

SIRE,

Quanto più le scienze e le lettere ingentiliscono l'animo, ed affinano il sentimento, tanto più la Vostra Accademia delle Scienze sente e partecipa quel vivo dolore, che ora Vi affligge per le due gravissime perdite fatte. Ma se nella Famiglia della Vostra Reggia perdeste due vite preziose, Voi, nel lutto sincero ed universale della grande famiglia del Regno, acquistaste una nuova testimonianza di quell'intima unione, che da secoli collegandoci colla Vostra Stirpe rende comuni le prosperità e le sventure.

Tale condoglienza, ossia cotanto affetto dei Vostri popoli per Voi, valga a temperare il Vostro dolore, e possa, dopo un primo tributo di giuste lacrime, ridestare in Voi tal coraggio morale, che pareggi quello militare, di cui deste sì splendide prove.

Firmato

Per la Reale Accademia delle Scienze

PLANA.

Dopo ciò il Cav. SOBRERO, deputato col Cav. SISMONDA (Angelo) riferisce sul merito di una domanda sporta al R. Governo dall'Ingegnere sig. F. FISCHER, all'oggetto di ottenere un privilegio per la *fabbricazione di un combustibile artificiale.*

Tale combustibile, destinato ad uso delle locomotive, dei piroscafi, delle officine da ferro, dei focolari domestici ecc., componesi, giusta quanto asserisce il ricorrente sig. FISCHER, 1.° di lignite e d'antracite sole od insieme mescolate; 2.° di lignite e d'antracite miste con carbone di terra, il tutto ridotto in piccoli frantumi con apposita macchina triturante, quindi mescolato con acqua e bitume del gaz, della resina o d'altra sostanza agglomerante, poscia mercè forte compressione convertito in forma di pani, i quali, prima di essere applicati ad uno dei sovra mentovati usi, vengono ancora sottoposti in un forno all'azione del necessario calore per discacciarne le parti volatili.

Osserva la Giunta Accademica che l'esposto procedimento del signor Fischer è quello ordinariamente seguito in Francia ed in Inghilterra nella fabbricazione dei così detti *combustibili agglomerati*, fabbricazione eziandio già stata tentata nel nostro paese, ove il metodo è noto a tutti quelli, che si occupano di chimica industriale.

Però essa Giunta, mentre non iscorge alcuna novità nel metodo, ammette questo pregio nei meccanismi proposti dal sig. Fischer, e conchiude proponendo che gli sia concesso un privilegio per l'esclusivo impiego dei meccanismi descritti e disegnati nel suo ricorso, libera del resto rimanendo nei RR. Stati la fabbricazione di combustibili agglomerati per quel che riguarda la natura e le proporzioni dei materiali, che ad essa possono servire.

L'Accademico Prof. Richelmy legge un suo lavoro intitolato: *Nota sul criterio della stabilità dell'equilibrio dei corpi natanti.*

(Questo lavoro è stampato nel Vol. XV, pag. 445).

Da ultimo in questa stessa adunanza il Comm. Moris legge successivamente due Memorie del Prof. Patrizio Gennari col titolo la prima di *Plantarum ligusticarum centuria II.ª*, *Repertorio Florae ligusticae addenda*, l'altra di *Cryptogamae vasculares ligusticae seu Equisetacearum, Marsileaceaarum, Lycopodiacearum ac Filicum in agro ligustico hucusque detectarum synopsis.*

18 febbraio.

Il Cav. Botto, condeputato col Cav. Menabrea e col Comm. Mosca fa relazione su una domanda di privilegio dell'Ingegnere Cav. Gaetano Bonelli, Direttore dei telegrafi elettrici dello Stato, per *una nuova disposizione telegrafica da lui ideata e detta* **Telegrafo delle locomotive.**

Questa nuova disposizione telegrafica proposta dall'Ingegnere Bonelli tende a mettere le locomotive delle ferrovie in comunicazione durante la corsa, tra di loro e cogli uffici telegrafici, e questi alla lor volta in comunicazione sia tra di loro, sia colle locomotive.

A tal fine l'Autore colloca ed isola lungo la ferrovia un conduttore di resistenza minima, come ad esempio una forte sbarra di ferro, dispone su ciascuna locomotiva una macchina telegrafica a un solo filo, colla spira comunicante mercè un cursore a molla colla sbarra anzidetta e colle

ruotaie ossia col suolo. Eguale disposizione stabilisce nelle macchine dei singoli uffici telegrafici, per modo che le rispettive loro spirali sieno messe in rapporto col suolo e colla sbarra ad un tempo.

Chi conosce le leggi, dice la Giunta, della derivazione delle correnti elettriche, e la conduttricità della terra, facilmente si persuade che in grazia delle accennate disposizioni, se un ufficiale telegrafico preposto ad una qualsiasi di quelle macchine darà corso ad una corrente tra il conduttore e la terra, questa si propagherà alle altre macchine, le metterà in azione, e servirà così tanto per trasmettere come per ricevere dispacci nelle stazioni mobili e fisse esistenti lungo la linea.

E dopo fatte molte considerazioni sui particolari di questo sistema del Cav. Bonelli, la Giunta mostrasi d'avviso che esso, convenientemente svolto ed applicato, valga a raggiugnere il suo scopo; quindi conchiude dichiarandolo degno di essere messo sotto la protezione di un privilegio.

Il Cav. Sobrero, condeputato col Cav. Cantu', fa rapporto su una domanda di privilegio del sig. Francesco Sciandra, di Pamparato, per una *nuova foggia di forni ad uso della fabbricazione del vetro.*

La modificazione proposta dal sig. Sciandra essenzialmente consiste in crogiuoli fusorii doppi, vale a dire divisi per metà da un diaframma verticale avente inferiormente un foro, che mette in comunicazione le due capacità, cosicchè caricando successivamente, a misura che si vuota, la capacità destinata alla fusione, si può senza interruzione avere nell'altra la materia fusa ed atta ad essere lavorata.

I Commissarii, senza portar giudizio sull'utilità pratica di questa innovazione, e considerando semplicemente che crogiuoli a doppia capacità per l'accennato uso non vennero finora, per quanto loro consta, nè proposti, nè impiegati nel nostro paese, conchiudono per la concessione al sig. Francesco Sciandra del chiesto privilegio.

Il Prof. Richelmy, deputato col Colonnello Cavalli, riferisce su una domanda di privilegio sporta dal sig. Gio. Battista Herman, per una *macchina destinata alla macinatura delle biade, ed alla preparazione dell'olio d'olivo.*

Riconobbe la Giunta Accademica, che questa macchina denominata dal Ricorrente *Moteur-Negrier*, perchè inventata dal sig. Negrier, non è altro che un molino ordinario mobile per la forza degli animali, con

qualche modificazione però nel numero, nella disposizione e nella grandezza relativa delle ruote dentate ad imboccamento piano, le quali, asserisce il Ricorrente, ed ammette la Giunta, sono combinate in modo da diminuire gli attriti e dare alla macchina una velocità maggiore.

Senza farsi mallevadori del buon successo di questo meccanismo, i Commissarii, sulla considerazione ch'esso non è in contraddizione coi principii della scienza, e che, per quel ch'essi sanno, non trovasi ancora in uso nei RR. Stati, conchiudono con favorevolmente accogliere la domanda del sig. Herman.

Da ultimo il Prof. Sismonda (Eugenio), deputato col Prof. De Filippi, riferisce sul merito di una breve Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia dall'autore il sig. Barone Enrico Aucapitaine, Archibugiere francese nel Battaglione indigeno a Blidah, in Algeria, e distinta col titolo di: *Notice sur les Mollusques lithophages.*

L'Autore esordisce con un cenno sull'importanza dello studio dei molluschi, sotto l'aspetto di scienza applicata alla geologia, ed osserva come il fenomeno della perforazione delle roccie operata da alcuni di questi molluschi, detti perciò *Litofagi*, sia una prova dei movimenti toccati alle coste del Mediterraneo e d'altri mari, in conseguenza dei quali movimenti tratti più o meno estesi di litorale si sarebbero alternativamente trovati or sopra or sotto delle adiacenti acque, siccome è a tutti noto essere avvenuto al litorale del golfo di Napoli, ove le colonne del tempio di Serapide mostransi ad una certa altezza bucherate da molluschi del genere delle Foladi. Entra quindi nella discussione intorno alla maniera, colla quale animali sì deboli, come sono le Foladi, le Venerupi, le Sassicave e simili Litofagi debbono procedere per poter intaccare e bucare calcari, basalti ed altre roccie di considerevole durezza. E qui, prima di emettere la propria opinione, l'Autore espone storicamente quanto in proposito hanno detto Adanson, Bonanni, Réaumur, De la Faille, Fleuriau de Bellevue, Caillaud ed altri naturalisti, i quali alla perfine hanno spiegato il fenomeno altri meccanicamente, altri chimicamente, quelli cioè supponendo che i molluschi Litofagi colle scabrosità del proprio guscio alla maniera di una lima intacchino le roccie; questi supponendo nei detti animali la facoltà di secernere un umore acido capace di agire chimicamente sulle medesime e di disaggregarle.

Fatta così la storia delle opinioni emesse sul fenomeno in questione

dai Malacologi che il precedettero in simile studio, il sig. Aucapitaine manifesta poi la sua teoria, che dice appoggiata alle proprie osservazioni, e la quale consiste nel ripetere il fatto, in generale dall'azione chimica, e per alcune specie di Litofagi, dalle due azioni combinate, cioè meccanica e chimica ad un tempo.

I Commissarii fanno notare che il sig. Aucapitaine non dimostra l'esistenza e la natura del supposto acido, non dice quali organi il producano, come per altra parte non indica la forma particolare dei mezzi meccanici, che in alcuni Litofagi coadiuverebbero l'azione dell'acido.

Le ricerche del sig. Hancók sul medesimo argomento, e delle quali il sig. Aucapitaine non fa parola nella parte storica del suo scritto, darebbero, a parere dei Commissarii, una più plausibile spiegazione del fenomeno (escludendo affatto l'intervento dell'azione chimica) se è vera l'esistenza di uno stromento particolare nella parte anteriore del piede e del mantello dei Litofagi, nei quali organi infatti il sig. Hancók asserisce di aver veduto molti corpicciuoli silicei, agenti a guisa delle asperità di una lima.

La Classe, dopo udita la sovra esposta relazione dei Commissarii, vota ringraziamenti verso il sig. Aucapitaine per la comunicazione fatta all'Accademia, e dà al suo Segretario l'incarico di porgere nella *Notizia storica* un cenno della medesima, a soddisfare il qual mandato mira appunto il riferito sommario.

4 marzo.

Il Segretario Aggiunto comunica alla Classe il carteggio, e legge una lettera del Prof. Cav. Francesco Zantedeschi, di Padova, nella quale esso Prof. Zantedeschi cerca di rivendicare a sè la priorità dell'idea di costruire *telegrafi elettro-magnetici delle stazioni e delle locomotive delle ferrovie* contro quanto sul medesimo argomento propose il Cav. Gaetano Bonelli, e prega l'Accademia a voler far risultare ne' suoi Atti questa protesta di esso Prof. Zantedeschi, e la presentazione contemporaneamente fatta della circolare stampata in Padova addì 27 gennaio 1855 col titolo: *Telegrafo elettro-magnetico delle stazioni ecc.*, e di una tavola a stampa, in cui è dimostrato il suo sistema, e ciò a tutela dei diritti, che il Prof. Zantedeschi crede avere sull'invenzione di *formare*

(sono sue parole) *dei convogli in corsa e delle stazioni con binarii, o guide ferrate, tanti circoli chiusi di continua corrispondenza telegrafica.*

La Classe aderisce alla preghiera del Prof. Zantedeschi, quella cioè d'inserire negli Atti Accademici cotesta protesta, ma dichiara ad un tempo che non intende erigersi a giudice della questione.

Finita la comunicazione del carteggio, si passa alle operazioni per la nomina di un *Membro straniero* per la Classe fisico-matematica, in surrogazione del defunto Cav. Prof. Macedonio Melloni; riesce eletto il distinto matematico sig. Luigi Poinsot, Grande Ufficiale della Legion d'onore, Socio dell'Istituto di Francia, ecc.

Dopo ciò il Cav. Sobrero, deputato col Cav. Sismonda (Angelo), riferisce su una domanda di privilegio fatta al R. Governo dal sig. Luigi Dall'Orto per una *nuova foggia di forno per la fabbricazione del vetro.*

Il Ricorrente propone crogiuoli ampi più del consueto, disposti nel forno in guisa, che la fiamma non possa toccare la materia vitrea, che si dee lavorare. La fiamma lambisce tutt'attorno i crogiuoli, e per mezzo di opportuni canali è quindi condotta a disperdersi per un camino munito di registri allo scopo di moderare l'intensità della combustione.

La Giunta lascia che l'esperienza giudichi se questo sistema sia così economico, come il sig. Dall'Orto assevera, ma secolui ammette il vantaggio che con siffatta maniera di forno la materia non può venir alterata dal contatto della fiamma. Quindi, per quest'ultima ragione e per non constarle che un forno identico già sia conosciuto ed in uso in Piemonte, essa Giunta favorevolmente accoglie la domanda del sig. Dall'Orto.

Il Cav. Cavalli, condeputato col Cav. Botto, fa relazione su una domanda pure di privilegio, del sig. Gioanni Pietro Jeantin, di Ciamberì, per *materassi elastici di nuova forma.*

La novità di siffatti materassi sta nell'aggiunta di un intreccio di molle a elice cilindriche, mercè cui vengono insieme riuniti, nella parte lor superiore, i doppi coni in fil di ferro, che impiegansi nell'ordinaria costruzione dei così detti *materassi elastici.*

I Commissarii non credono che la sovra mentovata aggiunta possa gran fatto aumentare la cedevolezza del materasso; tuttavia, riconoscendola per una novità, propongono in favore del sig. Jeantin la concessione della chiesta privativa.

Lo stesso Cav. Cavalli, deputato col Cav. Menabrea, fa rapporto su una domanda di privilegio del sig. Fortunato Maneglia, Capo d'officina nelle ferrovie dello Stato per *nuove aggiunte da esso fatte al suo sistema già privilegiato di sospensione e trazione dei veicoli ad uso delle ferrovie.*

Le nuove combinazioni meccaniche proposte dal sig. Maneglia essendo fondate sugli stessi principii, su cui poggia il sistema, pel quale già ottenne una privativa, ed avendo lo stesso scopo, quello cioè di regolare a piacimento l'elasticità dei mezzi di sospensione dei veicoli, la Giunta giudica equo ed utile che il già ottenuto privilegio venga eziandio esteso a queste nuove aggiunte.

25 marzo.

Il Prof. Sismonda (Eugenio), condeputato col Prof. De Filippi, riferisce sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia, per la stampa nei Volumi Accademici, dal sig. Eugenio Truqui, Ufficiale consolare di S. M., e che porta per titolo: *Anthicini insulae Cypri et Syriae.*

L'Autore illustra in questo suo scritto gl'insetti coleotteri della famiglia degli Anticini, che esso ebbe l'opportunità di raccogliere nel periodo di tempo, che per la sua qualità di Ufficiale consolare abitò l'isola di Cipro, e percorse una parte della Siria. A quarantatre ascendono le specie ivi descritte, tra le quali sedici nuove per la scienza, distinte dall'Autore col nome di: *Notoxus rubetorum — Anthicus glabellus — A. erro — A. fatuus — A. incomptus — A. villosulus — A. cerastes — A. phoenicius — A. ornatus — A. armatus — A. scurrula — A. aspelius — A. sidonius — A. Lafertei — A. gorgus — Ochthenomus bivittatus.*

Osserva la Giunta che questa famiglia di Coleotteri già ebbe un accuratissimo illustratore nel sig. Laferté, sicchè l'aggiugnere, come ha fatto il sig. Truqui, sedici specie nuove alla *Monographia Anthicorum* del predetto Autore è non dubbia prova di molta diligenza nelle ricerche, e di molta perspicacia nello studio delle forme; riconosce inoltre la Giunta nella Memoria del sig. Truqui esattezza nelle descrizioni, e preziose dilucidazioni di sinonimia; quindi la dichiara meritevole di essere stampata nei Volumi dell'Accademia, ed a tal fine conchiude proponendone la lettura alla Classe.

In quest'adunanza l'Accademico Cav. Cavalli termina la lettura incominciata nella precedente tornata di un suo lavoro intitolato: *Memoria su varii perfezionamenti militari che comprende alcuni cenni sui cannoni caricantisi dalla culatta, e sui cannoni rigati per l'artiglieria da fortezza, d'assedio, campale, e di mare, e dissertazioni relative ai mezzi di accrescere la mobilità dell'artiglieria, e di semplificare l'amministrazione ed il carreggio tutto, e sul conseguente aumento della potenza degli eserciti di terra e delle armate di mare.*

(È stampata nel Vol. XVII, pag. 1).

25 aprile.

Il Segretario Aggiunto dà alla Classe la solita comunicazione del carteggio, e tra parecchie altre lettere ne legge una del sig. Ministro dell'Interno indiritta al Presidente dell'Accademia, e nella quale si annunzia che S. M., in udienza del giorno 1.° del corrente mese di aprile, si è degnata di approvare la nomina fatta dall'Accademia, nella tornata del giorno 4 marzo ultimo scorso, del Matematico sig. Luigi Poinsot, Socio dell'Instituto di Francia, Grande Ufficiale della Legion d'onore, ecc. a *Membro straniero* di quest'Accademia per la Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Lo stesso Segretario Aggiunto presenta quindi due lavori manoscritti inviati all'Accademia dal Commendatore Dott. Carlo Carron du Villards, Ispettore del Corpo medico militare della repubblica messicana, ecc. da Puerto-Rico, Antille spagnuole, e col titolo l'uno di *Catalogue des plantes qui naissent spontanément dans l'isle de Saint-Thomas*, l'altro di *Memoria sopra l'influenza dello strabismo nell'esercizio di varie professioni.*

La Classe gradisce l'omaggio del sig. Carron du Villards, e delibera che dei nominati scritti facciasi onorevole menzione nella *Notizia storica* dei lavori Accademici, al quale scopo mira appunto il seguente ragguaglio:

Il *Catalogue des plantes*, siccome asserisce lo stesso Autore nella prefazione del suo scritto, è opera del Reverendo Pastore I.-P. Knox, il quale soggiornò 10 anni nella detta isola di S. Tomaso.

Questo catalogo, disposto per ordine alfabetico, abbraccia le specie seguenti:

Abrus precatorius, Linn.
Acacia acantholoba, H. and B.
» *acicularis*, H. and B.
» *Catechu*, W.
» *farnesiana*, W.
» *flexuosa*, H. and B.
» *glauca*, W.
» *latisiliqua*, W.
» *Lebbeck*, W.
» *macracanthoïdes*, Bert.
» *macrostachya*, Reich.
» *nigricans*, P. B.
» *nudiflora*, W.
» *obtusa*, H. and B.
» *parvifolia*, W.
» *platyloba*, Bert.
» *procera*, W.
» *Salinarum*, DC.
» *sarmentosa*, Desv.
» *Westiana*, DC.
Acalypha corchorifolia, W.
» *reptans*, Sw.
Acanthophlora Thierii, Lam.
Acetabularia crenulata, Lmrx.
Achyranthes aspera, Linn.
Acnistus cauliflorus, Schott.
Acrocomia fusiformis, Sweet.
Acrostichum aureum, Linn.
Adenanthera pavonina, Linn.
Adenostemma Swartzii, Cass.
Adhatoda custachiana, DC.
» *carthaginensis*, DC.
» *lithospermifolia*, Jacq.
» *periplocifolia*, DC.
» *sphaerosperma*, DC.
Adiantum cuneatum, Lgsd. and Fisch.
» *denticulatum*, Sw.
» *falcatum*, Sw.
» *intermedium*, Sw.
» *rhomboideum*, H. B. and K.
» *striatum*, Sw.
» *tenerum*, Sw.
Æchmea paniculata, R. and P.
Ægiphyla martinicensis, Linn.
» *trifida*, Sw.
Æschynomene americana, Linn.
» *sensitiva*, Sw.
Agati coccinea, Desv.
» *grandiflora*, Desv.
Agave americana, Linn.
» *mexicana*, Lmck.
» *vivipara*, Linn.
Ageratum conyzoides, Linn.
Allamanda cathartica, Linn.
Allium ascalonicum, Linn.
» *Cepa*, Linn.
» *Porrum*, Linn.
» *Scorodoprasum*, Linn.
Allosorus dealbatus, Presl.
Aloe vulgaris, DC.
Alpinia nutans, Rosc.
Alsidium Seaforthii, Ag.
» *triangulare*, T. Ag.
Alternanthera Richardii, DC.
» *sessilis*, R. Br.
Althaea rosea, Cav.
Alysicarpus vaginalis, DC.
Amarantus paniculatus, DC.
» *spinosus*, L.
Amaryllis Atamasco, Linn.
» *Belladonna*.
» *equestris*, Ait.
» *formosissima*, Linn.
» *pumilio*, Ait.
Amblogyna polygonoides, DC.
Ambrosia artemisiaefolia, Linn.
Amerimnum Brownei, Sw.
Ammannia sanguinolenta, Sw.
Amomum sylvestre, Sw.
Amyris sylvatica, Jacq.
Anacardium occidentale, Linn.
Andira inermis, H. B. and K.
Andromeda fasciculata, Sw.
Andropogon alopecuroides, Linn.
» *bicolor*, Roxb.
» *cernuus*, Roxb.
» *Ischaemum*, Linn.
» *saccharatus*, Roxb.
» *Schoenanthus*, Linn.
» *Sorghum*, Brot.
Anethum graveolens, Linn.
Anguria trilobata, Linn.
Anona Cherimolia, Mill.
» *cinerea*, Dunal.

Anona glabra, Linn.
» *laurifolia*, Dunal.
» *muricata*, Linn.
» *palustris*, Linn.
» *reticulata*, Linn.
» *squamosa*, Linn.
Anthacanthus armatus, DC.
» *spinosus*, DC.
» » *horridus*.
Anthephora elegans, Schreb.
Antherilium Rohrii, Vall.
Apium graveolens, Linn.
Arachis hypogaea, Linn.
Areca oleracea, Jacq.
Ardisia coriacea, Sw.
Argemone mexicana, Linn.
Argothamnia candicans, Sw.
Aristida capillacea, Lam.
» *plumosa*, Linn.
» *stricta*, Mich.
Aristolochia anguicida, Linn.
» *trilobata*, Linn.
Arrhostoxylum coccineum N. et E.
Artocarpus incisa, Linn. f.
Arum hederaceum, Linn.
» » *majus*, Ducourt.
» *lingulatum*, Linn.
» *pictum*, Linn.
Arundo Donax, Linn.
Asclepias curassavica, Linn.
Asparagus officinalis, Linn.
Aspidium Plumierii, Prest.
» *trifoliatum*, Sw.
Asplenium pumilum, Sw.
Averrhoa carambola, Linn.
» *Bilimbe*, Linn.
Avicennia nitida, Jacq.
» *tomentosa*, Jacq.
Bambusa arundinacea, Willd.
Banisteria dichotoma, Linn.
» *emarginata*, Cav.
» *floribunda*, DC.
» *periplocaefolia*, Desf.
Batatas edulis, Chois.
» *pentaphylla*, Chois.
» *quinquefolia*, Chois.
Batis maritima, Linn.
Banhinia pubescens, DC.
Beloperone nemorosa, DC.
Beta vulgaris, Linn.
Bidens bipinnata, Linn.
» *heterophylla*, Ort.
» *leucantha*, W.
» *pilosa*, Linn.
» *portoricensis*, Spr.
Bignonia Unguis, Linn.
Bixa Orellana, Linn.
Blechnum occidentale, L.
» *angustifolium*, R. Br.
» *Brownii*, Juss.
Bletia verecunda, R. Br.
Boerhavia decumbens, Vahl.
» *erecta*, Linn.
» *hirsuta*, Linn.
» *paniculata*, Rich.
» *scandens*, Linn.
Bombax septenatum, Jacq.
Bontia daphnoides, Linn.
Borassus flabelliformis, Linn.
Borreria densiflora, DC.
» *spinosa*, Champ.
» *stricta*, Meyer.
» *verticillata*, Meyer.
Borrichia arborescens, DC.
» *frutescens*, DC.
Brassica Napus, Linn.
» *oleracea capitata*, Linn.
» » *crispa*, Linn.
» *Rapa*, Linn.
Bromelia Ananas, Linn.
» *Pinguin*, Linn.
Broussonetia Plumieri, Spr.
» *tinctoria*, Kunth.
Brunfelsia americana, Linn.
» *undulata*, Sw.
Brya Ebenus, DC.
Bryonia ficifolia, Lam.
Bryophyllum calycinum, Salisb.
Bucida Buceras, Linn.
Bumelia reclinata, Vent.
» *retusa*, Sw.
Bunchosia media, DC.
» *nitida*, DC.
» *polystachya*, DC.

Bursera gummifera, Jacq.
Byrsonima coriacea, DC.
» *laevigata*, DC.
» *lucida*, DC.
» *spicata*, DC.
Caesalpina Coriaria, W.
» *glandulosa*, Bert.
» *Sappan*, Linn.
Cajanus flavus, DC.
Cakile aequalis, L'Herit.
» *americana*, Nutt.
Caladium arborescens, Vent.
» *esculentum*, Vent.
» *seguinum*, Vent.
Calendula officinalis, Linn.
Calliopsis bicolor, Reich.
Callisia repens, Loff.
Calonyction speciosum, Chois.
Calophyllum Calaba, Jacq.
Calatropis aspera, R. Br.
» *gigantea*, DC.
» *procera*, R. Br.
Calycophyllum coccineum, DC.
Calyptranthes Chytraculia, Sw.
Campyloneurum Phyllitidis, Presl.
» *reperis*, Presl.
Canavalia ensiformis, DC.
Canella alba, Murr.
Canna coccinea, Ait.
» *glauca*, Linn.
» *indica*, Ait.
» *occidentalis*, Bosc.
Caperonia palustris, Hil.
Capparis amygdalina, Lam.
» *Breynia*, Linn.
» *cynophallophora*, Linn.
» *Eustachiana*, Jacq.
» *ferruginea*, Linn.
» *intermedia*, H. B. and K.
» *pauciflora*, H. B. and K.
» *saligna*, Vahl.
» *spinosa*, Linn.
» *tenuisiliqua*, Jacq.
» *torulosa*, Sw.
Capraria biflora, Linn.
Capsicum annuum, Linn.
» *baccatum*, Linn.
Capsicum frutescens, Linn.
Cardiospermum Corindum, Linn.
» *Halicacabum*, Linn.
Carica Papaya, Linn.
Carolinea alba, Lodd.
Casearia parviflora, W.
» *ramiflora*, Vahl.
Cassia alata, Linn.
» *bicapsularis*, Linn.
» *Chamaecrista*, Linn.
» » *stricta*, Schrank.
» *frutescens*, Mill.
» *glandulosa*, Linn.
» *hecatophylla*, DC.
» *macrophylla*, Kunth.
» *nictitans*, Linn.
» *obovata*, Coll.
» *obtusifolia*, Linn.
» *occidentalis*, Linn.
» » *glabra*, DC.
» » *aristata*, DC.
» *prostrata*, H. and B.
» *riparia*, H. B. and K.
» *Tora*, Linn.
» *viminea*, Linn.
Castela depressa, Turp.
Catasetum tridentatum, Hook.
Cattleia labiata, Lind.
Caulerpa clavifera, Ag.
» *cupressoides*, Ag.
» *pennata*, Lamrx.
» *plumaris*, Ag.
» *prolifea*, Ag.
» *Selago*, Ag.
» *urifera*, Ag.
Caulinia guadalupensis, Spr.
Ceanothus colubrinus, Lam.
» *ferreus*, DC.
» *laevigatus*, L'Herit.
» *reclinatus*, L'Herit.
» *Sarcomphalus*, DC.
Cecropia peltata, Linn.
Celosia argentea, Linn.
» *cristata*, DC.
» *paniculata*, Linn.
Celtis aculeata, Sw.
» *australis*, L.

Cenchrus echinatus, Linn.
» *laevigatus*, Trin.
» *tribuloides*, Linn.
Ceramium diaphanum, Roth.
» *rubrum*, Ag.
» » *nitens*, Ag.
Cereus lanuginosus, Haw.
» *peruvianus*, Haw.
» *strictus*, DC.
» *triangularis*, Haw.
Cestrum citrifolium, L'Her.
» *diurnum*, Linn.
» *laurifolium*, L'Her.
» *nocturnum*, Linn.
» *vespertinum*, Linn.
Chamissoa altissima, Humb. B.
Chenopodium anthelminthicum, Linn.
» *spathulatum*, Lieb.
Chiococca racemosa, Jacq.
» » *laxiflora*, DC.
Chloris cruciata, Sw.
» *radiata*, Sw.
Chomelia fasciculata, Swartz.
Chondria papillosa, Ag.
Chrysobalanus Icaco, Linn.
Chrysophyllum Cainito, Linn.
» *glabrum*, Jacq.
» *microcarpum*, Sw.
» *rugosum*, Sw.
Cissampelos Pareira, Linn.
Cissus acida, Linn.
» *obovata*, Vahl.
» *ovata*, Lam.
» *sicyoides*, Linn.
» *trifoliata*, Jacq.
Citharexylon cinereum, Linn.
» *quadrangulare*, Jacq.
» *villosum*, Jacq.
Citrus Aurantium, Risso.
» *buxifolia*, Poir.
» *decumana*, Linn.
» *Limonum*, Risso.
» *medica*, Risso.
Claytonia perfoliata, Donn.
Cleome pentaphylla, DC.
» *pubescens*, Sims.
» *spinosa*, Linn.
Cleome triphylla, DC.
Clibadium asperum, DC.
» *erosum*, DC.
Clitoria Plumieri, Turp.
» *Ternatea*, Linn.
» *virginiana*, Linn.
Clusia alba, Linn.
» *rubra*, Linn.
Coccocypselum spicatum, Kunth.
Coccoloba barbadensis, Jacq.
» *excoriata*, Linn.
» *latifolia*, Lam.
» *microstachya*, W.
» *nivea*, Jacq.
» *obtusifolia*, Jacq.
» *punctata*, Linn.
» *uvifera*, L.
Cocos nucifera, Linn.
Codium elongatum, Ag.
Coffea arabica, L.
Coix Lacryma, Linn.
Comelina communis, Linn.
» *elegans*, Humb.
» *gracilis*, R. and P.
» *longicaulis*, Jacq.
Comocladia ilicifolia, Sw.
Conferva aerea, var. *occ.*, Martens.
» *clavata*, Ag.
» *dispansa*, Ag.
» *distans*, var. *subtilis*, Linn.
» *membranacea*, Ag.
» *trichotoma*, Ag.
Conocarpus erectus, H. B. and K.
» » *arborea*, DC.
Conostegia procera, Don.
Convolvulus nodiflorus, Desr.
Corchorus acutangulus, Lam.
» *hirsutus*, Linn.
» *hirtus*, Linn.
» *siliquosus*, Linn.
Cordia elliptica, Sw.
» *Gerascanthus*, Jacq.
» *Myxa*, Linn.
» *macrophylla*, Linn.
» *sulcata*, DC.
» *ulmifolia*, Juss.
» » *ovata*, DC.

Corypha umbraculifera, Linn.
Crataeva gynandra, Linn.
» *Tapia*, Linn.
Crescentia acuminata, H. B. and K.
» *cucurbitina*, Linn.
» *Cujete*, Linn.
Cribraria purpurea, Alb. and Schw.
Crinum erubescens, Ait.
Crossandra infundibuliformis, N. ab E.
Crotalaria incana, Linn.
» *latifolia*, Linn.
» *mucronata*, Desv.
» *retusa*, Linn.
» *verrucosa*, Linn.
» » *obtusa*, DC.
Croton astroites, Ait.
» *balsamiferum*, Linn.
» *betulinum*, Vahl.
» *bixioides*, Vahl.
» *chamaedryfolium*, Lam.
» *corylifolium*, Lam.
» *diffusum*, Rich.
» *discolor*, Rich.
» *flavens*, Linn.
» *trilobatum*, Willd.
Cucumis Anguria, Linn.
» *Citrullus*, Ser.
» *flexuosus*, Linn.
» *Melo maltensis*, Linn.
» *sativus*, Linn.
Cucurbita Melopepo, Linn.
» *Pepo*, Linn.
Cuscuta americana, Linn.
» *corymbosa*, R. and P.
» *racemosa minuta*, Chois.
Cycas revoluta, Thunb.
Cynodon Dactylon, Pers.
Cyperus brunneus, Sw.
» *distans*, Linn.
» *Ehrenbergii*, Kunth.
» *elegans*, Linn.
» *ferox*, Rich.
» *Haspan*, Linn.
» *ligularis*, Linn.
» *odoratus*, L.
» *rotundus*, L.
» *tenuis*, Sw.
Cyperus viscosus, Ait.
Dactyloctenium aegyptiacum, Willd.
Dahlia variabilis, Desf.
Dalechampia scandens, Linn.
Datura arborea, L.
» *fastuosa*, L.
» *Metel*, L.
» *Stramonium*, Linn.
Daucus Carota, Linn.
Davallia aculeata, Sw.
Desmanthus depressus, H. and B.
» *punctatus*, Willd.
» *virgatus*, DC.
Desmodium axillare, DC.
» *incanum*, DC.
» *molle*, DC.
» *oblongifolium*, DC.
» *reptans*, DC.
» *Scorpiurus*, Desv.
» *spirale*, DC.
» *supinum*, DC.
» *tortuosum*, DC.
» *triflorum*, DC.
Dianthus chinensis, Linn.
» *Caryophyllus*, Linn.
Dichromena ciliata, Vahl.
» *leucocephala*, Michx.
Dictyota atomaria, Greville.
» *dichotoma*, Lamrx.
» *linearia*, Grev.
Digenia simplex, Ag.
Dioscorea alata, Linn.
» *bulbifera*, Linn.
» *sagittata*, Poir.
» *sativa*, Linn.
Distictis lactiflora, DC.
Distreptus spicatus, Cass. and Less.
Ditaxis fasciculata, Juss.
Dodecatheon Meadia, Linn.
Dodonaea viscosa, Linn.
Dolichos luteus, Swartz.
» *sesquipedalis*, Linn.
» *sphaerospermus*, DC.
» *vexillatus*, H. B. and K
Dracaena ferrea, Linn.
Dracontium lanceaefolium, Jacq.
Drepanocarpus lunatus, Meyer.

Drymaria cordata, W.
Duranta Plumieri, Linn.
Ecastaphyllum Brownei, Pers.
Echites agglutinata, Jacq.
» *biflora*, Linn.
» *circinalis*, Sw.
» *Thomasiana*, DC.
» *nitida*, Vahl.
» *suberecta*, Jacq.
Egletes domingensis, Cass.
» *glabrata*.
Ehretia Beureria, Linn.
» *tinifolia*, Linn.
Eleocharis capitata, Brown.
» *geniculata*, Brown.
» *interstincta*, Brown.
» *mutata*, Brown.
Elephantopus mollis, H. B. and K.
Eleusine mucronata, Mhlbrg.
» *indica*, Gaertn.
Emilia sonchifolia, DC.
Epidendrum bicornutum, Sw.
» *bifidum*, Aubl.
» *ciliare*, Linn.
» *elongatum*, Jacq.
Eranthemum acanthodes, Spr.
» *bicolor*, Schranck.
Erechtites hieracifolia, Raf.
Erigeron canadense, Linn.
» *jamaicense*, L.
» *laevigatum*, Vest.
» *spathulatum*, Vest.
Eriodendrum infractuosum, DC.
» *caribaeum*, Don.
Erithalis fruticosa, Linn.
Erythrina Corallodendron, Linn.
» *glauca*, W.
» *Crista galli*, Linn.
» *speciosa*, Andr.
Erythroxylum areolatum, Linn.
Eugenia axillaris, Poir.
» *buxifolia*, W.
» *cordata*, DC.
» *disticha*, DC.
» *floribunda*, West.
» *foetida*, Pers.
» *fragrans*, W.
Eugenia lancea, Poir.
» *ligustrina*, W.
» *lineata*, DC.
» *Michelii*, Lam.
» *Pimenta*, DC.
» *procera*, Poir.
» *Pseudo-psidium*, Jacq.
» *sessiliflora*, DC.
» *virgultosa*, DC.
Eupatorium atriplicifolium, Vahl.
» *canescens*, Vahl.
» *macranthum*, Sw.
» *odoratum*, Linn.
» *repandum*, W.
Euphorbia Antiquorum, Linn.
» *articulata*, Lam.
» » *rotundifolia*, Kr.
» *cotinifolia*, Linn.
» *geniculata*, Ortg.
» *glabrata*, Vahl.
» *heterophylla*, Linn.
» *hypericifolia*, Linn.
» *linarifolia*, Willd.
» *nereifolia*, Linn.
» *obliterata*, Jacq.
» *petiolaris*, Linn.
» *pilulifera*, Linn.
» *prostrata*, Ait.
» *punicea*, Sw.
Eustachys petraea, Desv.
Euxolus oleraceus, Moq.
» *viridis*, Moq.
Evolvulus linifolius, Linn.
» *nummularius*, Linn.
Excoecaria lucida, Sw.
Exogonium filiforme, Chois.
Exostemma caribaeum, R. and Sch.
Faramea odoratissima, DC.
Ficus laevigata, Vahl.
» *pedunculata*, Ait.
» *carica*, Linn.
» *serrata*, Linn.
Fimbristylis ferruginea, Vahl.
» *spadicea*, Vahl.
Fischera scandens, DC.
Foeniculum vulgare, Gaertn.
Furcellaria acanthophora, Ag.

Gaertnera vaginata, Lam.
Galactia pendula, Pers.
Gardenia florida, Linn.
» » fl. *pleno*.
» *latifolia*, Ait.
Genipa americana, Linn.
Geophila reniformis, Ch. and Schl.
Gloxinia speciosa, Lodd.
Glycine striata, L. fil.
Gomphrena globosa, Linn.
Goniopteris crenata, Presl.
» *megalodes*, Schk.
» *tetragona*, Presl.
Gonzalea panamensis, Pers.
» *spicata*, DC.
Gordonia Haematoxylon, Sw.
Gossypium barbadense, Linn.
» *herbaceum*, Linn.
Gouania domingensis, Linn.
» *tomentosa*, Jacq.
Graptophyllum hortense, N. ab E.
Guajacum officinale, Linn.
Guazuma ulmifolia, Linn.
Guettarda elliptica, Sw.
» *parviflora*, Vahl.
» *scabra*, Lam.
Guilandina Bonduc, Ait.
» » *minor*.
Gymnogramme calomelanos, Kaulf.
» *peruviana*, Desf.
» *tartarea*, Desv.
Gynandropsis pentaphylla, Linn.
Haematoxylon campechianum, Linn.
Halopteris scolopendrina, Presl.
Halyseris delicatula, Ag.
» *polipodioides*, Ag.
Hamelia patens, Jacq.
Hebeclinium macrophyllum, DC.
Helianthus annuus, Linn.
» *multiflorus*, Linn.
Helicteres jamaicensis, Jacq.
» *Isora*, Linn.
» *verbascifolia*, Link.
Heliophytum indicum, DC.
» *parviflorum*, DC.
Heliopsis buphthalmoides, Dunal.
Heliotropium curassavicum, Linn.
» *fruticosum*, Linn.
» *peruvianum*, Linn.
Herpestis Monnieria, H. B. and K.
» *stricta*, Schrad.
Heteropteris purpurea, H. B. and K.
Hibiscus Abelmoschus, Linn.
» *bifurcatus*, Cav.
» *cannabinus*, Linn.
» *domingensis*, Jacq.
» *esculentus*, Linn.
» *maculatus*, Desv.
» *micans*, Cav.
» *mutabilis*, Linn.
» *phoeniceus*, W.
» *rosa sinensis*, Linn.
» *sabdariffa*, Linn.
» *tiliaceus*, L.
Hippocratea ovata, Lam.
Hippomane Mancinella, Linn.
Holosteum diandrum, Sw.
Hudsonia tomentosa, Nutt.
Hura crepitans, L.
Hutchinsia pericladus, Ag.
Hydrangea Hortensia, DC.
Hymenaea Courbaril, Linn.
Hypnea musciformis, Lmrx.
Hyptis brevipes, Poir.
» *capitata*, Jacq.
» *ebracteata*, R. Br.
» *pectinata*, Poit.
» *verticillata*, Jacq.
Jacquemontia violacea, Chois.
Jacquinia arborea, Vahl.
» *armillaris*, Jacq.
Jambosa vulgaris, DC.
Isachne dubia, Kunth.
Jasminum arborescens, Roxb.
» *azoricum*, Linn.
» *hirsutum*, Linn.
» *officinale*, Linn.
» *pubescens*, Willd.
» *revolutum*, Linn.
Jatropha Curcas, Linn.
» *gossypifolia*, Linn.
» *Manihot*, Linn.
» *multifida*, Linn.

Icica altissima, Aubl.
Illecebrum Achyrantha, W.
Impatiens Balsamina, Linn.
Indigofera Anil, Linn.
Inga cinerea, H. and B.
» *heterophylla*, W.
» *laurina*, W.
» *purpurea*, W.
» *unguis cati*, W.
Jonidium strictum, Vent.
Ipomoea Dumetorum, Willd.
» *fastigiata*, Sweet.
» *incarnata*, Chois.
» *Pes caprae*, Sw.
» *setifera*, Poir.
» *sagittata*, Desf.
» *sinuata*, Ort.
» *triloba*, Linn.
» *tuberosa*, Linn.
» *umbellata*, Meyer.
» *ventricosa*, DC.
Iresine aggregata, DC.
» *crassifolia*, DC.
» *elatior*, Rich.
» *vermicularis*, DC.
Isolepis articulata, N. ab Es.
» *pallidiflora*, DC.
Isotoma longiflora, DC.
» *hiria*, Vahl.
Jussiaea acuminata, Sw.
» *erecta*, Linn.
» » *plumeriana*.
» *dodecandra*, DC.
Ixora stricta, Roxb.
Kallstroemia maxima, W. and A.
Kiesera sericea, Reinw.
Killinga pumila, Mx.
Lablab vulgaris, Sav.
» » *albiflorus*, DC.
Lactuca canadensis, Linn.
» *sativa*, Linn.
Lagerstroemia Reginae, Roxb.
Lagetta lintearia, Lam.
Laguncularia racemosa, Gaert.
Lantana polyacantha, DC.
» *crocea*, Jacq.
» *involucrata*, Linn.
Laurencia papillosa, Grenvill.
Lappago racemosa, Gaert.
Laurus coriacea, Sw.
Lawsonia alba, Lam.
Leonotis nepetaefolia, R. Br.
Leonurus sibiricus, Linn.
Lepidium virginicum, L.
Leria albicans, DC.
» *nutans*, DC.
Leucas martinicensis, R. Br.
Liagora pulverulenta, Ag.
» *viscida*, Ag.
Linociera compacta, R. Br.
Liparis labiata, Spr.
Lithobrochia pedata, Presl.
Loasa triloba, Juss.
Lomentaria ovalis, Endl.
Lonchitis aurita, Linn.
Lonicera flava, Sims.
Loranthus occidentalis, Linn.
» *pauciflorus*, Sw.
Lorentea humifusa, Less.
Lourea Vespertilionis, Desv.
Lycopersicum esculentum, Dun.
Malachra capitata, Linn.
» *radiata*, Linn.
Malpighia coccifera, Linn.
» *fucata*, Ker.
» *glabra*, Linn.
» *punicifolia*, Linn.
» *setosa*, Berter.
» *urens*, Linn.
Malva americana, Linn.
» *capitata*, Linn.
» *spicata*, Linn.
Mammea americana, Linn.
Mangifera indica, Linn.
Mappa tanaria, Spr.
Maruntha arundinacea, Linn.
Marginaria angustifolia, Presl.
» *incana*, Presl.
» *piloselloides*, Presl.
» *serpens*, Presl.
Melastoma nodosa, Desr.
Melia azedarach, L.
» *sempervirens*, Sw.
Melicocca bijuga, Linn.

Melocactus communis, Link.
» » *oblongus*.
» » *macrocephalus*.
Melochia pyramidata, Linn.
» *tomentosa*, Linn.
Melothria pendula, Linn.
Menais topiaria, Linn.
Mentha crispa, Linn.
» *piperita*, Linn.
» *viridis*, Linn.
Metastelma parviflorum, R. Br.
Miconia pyramidalis, DC.
Microrhynchus nudicaulis, Less.
Mikania gonoclada, DC.
Milium lanatum, R. and Sch.
Mimosa Ceratonia, Linn.
» *pudica glabrata*, DC.
Mirabilis dichotoma, Linn.
» *Jalapa*, Linn.
Mollugo bellidifolia, Ser.
Momordica Charantia, Linn.
» » *abbreviata*, Sw.
Morinda citrifolia, Linn.
Moringa pterosperma, Gaertn.
Morisonia americana, Linn.
Mouriria guianensis, Aubl.
Morus tinctoria, Linn.
Mucuna pruriens, DC.
» *urens*, DC.
Mühlenbergia tenuissima, Kunth.
Muntingia Calabura, Linn.
Musa paradisiaca, Linn.
» *rosacea*, Jacq.
» *Sapientum*, Linn.
Myginda latifolia, Sw.
» *Rhacoma*, Sw.
Myrcia acris, DC.
Myrospermum frutescens, Jacq.
Myrtus communis, Linn.
» *salutaris*, H. B. and K.
Nama jamaicensis, Linn.
Nasturtium officinale, R. Br.
Nicotiana Tabacum, L.
Nerium Oleander, Linn.
Neurolaena lobata, R. Br.
Nyctanthes Sambac, L.
Obione cristata, Moq.
Obione portulacoides, Moq.
Ocymum Basilicum, L.
» » *thyrsiflorum*, DC.
Olea europaea, Linn.
Oncidium altissimum, Sm.
» *Cebolleta*, Sw.
» *Papilio*, Lindl.
» *pulchellum*, Hook.
Opuntia curassavica, Mill.
» *Ficus indica*, Haw.
» *monacantha*, DC.
» *polyantha*, Haw.
» *pusilla*, Salm.
» *spinosissima*, Mill.
» *vulgaris*, Mill.
Oplismenus colonus, H. and B.
Origanum Majorana, Linn.
Ormosia dasycarpa, Jacks.
Oxalis corniculata, Linn.
» *Lyoni*, Pursh.
» *pilosiuscula*, H. B.
Padina pavonia, Lamrx.
Paederia erecta, Roxb.
Pachystachys coccinea, Nees.
Palicourea Pavetta, DC.
Pancratium caribaeum, Linn.
» *undulatum*, Kunth.
Pandanus adoratissimus, L. fil.
Panicum anceps, Mich.
» *aquaticum*, Poir.
» *carthaginensis*, Sw.
» *divaricatum*, Linn.
» *distachyum*, Linn.
» *Jumentorum*, Pers.
» *molle*, Sw.
» *maculatum*, Aubl.
» *oryzoides*, Sw.
» *pilosum*, Sw.
» *repens*, Sw.
» *sulcatum*, Aubl.
Parkinsonia aculeata, Linn.
Parmelia Roccella, Ach.
Parthenium Hysterophorus, Linn.
Paspalum caespitosum, Flügg.
» *conjugatum*, Berg.
» *glabrum*, Poir.
» *gracile*, Rudg.

Paspalum laxum, Lam.
» *notatum*, Flügg.
» *virgatum*, Linn.
Passiflora angustifolia, Sw.
» *foetida*, Cav.
» *hibiscifolia*, Lam.
» *laurifolia*, Linn.
» *maliformis*, Linn.
» *minima*, Jacq.
» *multiflora*, Linn.
» *pallida*, Linn.
» *pubescens*, H. B. and K.
» *quadrangularis*, Linn.
» *rubra*, Linn.
» *suberosa*, Linn.
» *tuberosa*, Jacq.
Paullinia carthagenensis, Jacq.
» *pinnata*, Linn.
Pavonia Spinifex, W.
» » *ovalifolia*, DC.
Pectidium punctatum, Less.
Pectis ciliaris, Linn.
Pedilanthus padifolius, Poit.
» *tithymaloides*, Poit.
Pelargonium fissifolium, Pers.
» *peltatum*, Ait.
» *zonale*, Willd.
Pelexia adnata, Spr.
Pereskia aculeata, Mill.
Persea gratissima, Gaertn.
» *Leucoxylon*, Spr.
Petiveria alliacea, Linn.
Petrea volubilis, Linn.
Petroselinum sativum, Hoffm.
Phaseolus lathyroides, Linn.
» *lunatus*, Linn.
» *multiflorus*, Lamk.
Pharbitis violacea, Boj.
Pharus glaber, H. and B.
» *latifolius*, Linn.
Phlox ovata, Linn.
Phoenix dactylifera, Linn.
Phyllanthus falcatus, Sw.
» *Niruri*, Linn.
Physalis angulata, Linn.
» *barbadensis*, Lam.
Picramnia pentandra, Sw.
Pictetia squamata, DC.
Pilocarpus pauciflorus, St-Hil.
» *racemosus*, Vahl.
Piper acuminatum, Linn.
» *aequale*, Vahl.
» *Amalago*, Linn.
» *amplexicaule*, Sw.
» *asperifolium*, R. and P.
» *discolor*, Sw.
» *glabellum*, Sw.
» *obtusifolium*, Linn.
» *pellucidum*, Linn.
» *peltatum*, Linn.
» *scandens*, Vahl.
Pisum sativum, Linn.
Piscidia carthagenensis, Jacq.
» *Erythrina*, Linn.
Pisonia aculeata, Linn.
» *discolor*, Spr.
» *nigricans*, Sw.
» *subcordata*, Sw.
Pitcarnia angustifolia, Ait.
» *bromeliaefolia*, Ait.
» *latifolia*, Ait.
Pleopeltis aurea, Presl.
Plocaria dura, Nees.
» *multipartitus*, Nees.
» *purpurascens*, Nees.
Plumbago capensis, Thunb.
» *rosea*, Linn.
» *scandens*, Linn.
Plumeria alba, Linn.
» *rubra*, Linn.
Poa ciliaris, Linn.
Poinciana pulcherrima, Linn.
Polyanthes tuberosa, Linn.
Polypodium alatum, Linn.
» *auriculatum*, Presl.
» *flavo-punctatum*, Kaulf.
Polystachya luteola, Hook.
Polystichum auriculatum, Presl.
Portlandia grandiflora, Linn.
Portulaca oleracea, Linn.
» *pilosa*, Linn.
» » *subglabra*, Linn.
» *rubricaulis*, H. B. et K.
Pothos acaulis, Linn.

Pothos cordatus, Linn.
» *crassinervius*, Jacq.
» *macrophyllus*, Sw.
Priva echinata, Juss.
» *mexicana*, Pers.
Psidium aromaticum, Aubl.
» *pomiferum*, Linn.
» *pumilum*, Vahl.
Psychotria laxa, Sw.
» *Brownei*, Spr.
Pteris Plumerii, W.
Pterocaulon virgatum, DC.
Pteropsis angustifolia, Dev.
Punica Granatum, Linn.
» *nana*, Linn.
Pyrethrum sinense, DC.
Quamoclit hederaefolia, Chois.
» *coccinea*, Moench.
» *vulgaris*, Chois.
Quassia amara, Linn. fil.
Rajania cordata, Linn.
Randia latifolia, Lam.
» *Mussaenda*, DC.
Raphanus sativus, Linn.
Rauwolfia nitida, Linn.
Redoutea heterophylla, Vent.
Reseda odorata, Linn.
Rhapis flabelliformis, Ait.
Rhipsalis Cassytha, Gaertn.
» *parasitica*, DC.
Rhizophora Mangle, Linn.
Rhynchosia caribaea, DC.
» *minima*, DC.
» *reticulata*, DC.
Rhytiglossa pectoralis, N. ab E.
» *reptans*, N. ab E.
» *secunda*, N. ab E.
» *sessilis*, N. ab E.
Ricinus communis, Linn.
Rivea tiliaefolia, Chois.
Rivina humilis, Linn.
» *laevis*, Linn.
» *octandra*, Linn.
» *purpurascens*, Schrad.
Rondeletia pilosa, Sw.
Rosa damascena, Linn.
» *semperflorens*, Curt.
Rosa sempervirens, Linn.
» *Thea*, var.
Ruellia clandestina, Linn.
» *serpens*, Linn.
» *tuberosa*, Linn.
Rumex vesicarius, Linn.
Ruppia maritima, Linn.
Russelia juncea, Zucar.
Sabinea florida, DC.
Saccharum officinarum, Linn.
Salvia calaminthaefolia, Vahl.
» *coccinea*, Linn.
» *fulgens*, Cav.
» *occidentalis*, Sw.
» *serotina*, Linn.
» *tenella*, Sw.
Sambucus canadensis, Linn.
Samyda serrulata, Linn.
Sapindus frutescens, Aubl.
» *saponaria*, Linn.
» *stenopterus*, DC.
Saponaria officinalis, Linn.
Sapota Achras, Mill.
Sarcostemma swartzianum, DC.
Sargassum bacciferum, Ag.
» *piluliferum*, Kunth.
» *vulgare*, Ag.
Scaevola Plumerii, Vahl.
Schaefferia frutescens, Jacq.
Schoepfia arborescens, R. et S.
Schwenckia, spec.
Scleria communis, Kunth.
» *hirtella*, Sw.
» *filiformis*, Sw.
» *Flagellum*, Sw.
» *latifolia*, Sw.
Scolosanthus versicolor, Vahl.
Scoparia dulcis, Linn.
Sechium edule, Sw.
Securidaca virgata, Sw.
Serjana lucida, Schum.
Sesamum indicum, Linn.
Sesuvium Portulacastrum, Linn.
Setaria gracilis, H. et B.
» *imberbis*, Roem.
Sida abutiloides, Jacq.
» *althaeifolia*, Sw.

Sida americana, Linn.
» *angustifolia*, Lam.
» *arborea*, Linn. fil.
» *arguta*, Sw.
» *asiatica*, Linn.
» *bivalvis*, Cav.
» *carpinifolia*, Linn. fil.
» *ciliaris*, Linn.
» *crassifolia*, L'Herit.
» *foetida*, Cav.
» *glutinosa*, Cav.
» *graveolens*, Roxb.
» *hederaefolia*, Cav.
» *hermannioides*, H. B. and K.
» *jamaicensis*, Cav.
» *paniculata*, Linn.
» *permollis*, W.
» *pubescens*, Cav.
» *pyramidata*, Cav.
» *repanda*, Roth.
» *retrofracta*, DC.
» *rhombifolia*, Linn.
» *Sessei*, Lag.
» *spinosa*, Linn.
» *umbellata*, Linn.
» *viscosa*, Linn.
Sinapis alba, Linn.
» *lanceolata*, Cav.
» *nigra*, Linn.
Sisyrinchium palmifolium, Linn.
» *plicatum*, Spr.
Solanum ambiguum, Dun.
» *Balbisii*, Dun.
» *conocarpum*, Rich.
» *diphyllum*, Linn.
» *esculentum*, Dun.
» *incanum*, Linn.
» *Maccai*, Dun.
» *mammosum*, Linn.
» *micracanthum*, Lamk.
» *nigrum*, Linn.
» *ovigerum*, Dun.
» *polyacanthum*, Lamk.
» *polygamum*, Vahl.
» *Richardi*, Dun.
» *racemosum*, Linn.
» *scandens*, Linn.
Solanum torvum, Sw.
» *verbascifolium*, Linn.
Sonchus ciliatus, Lam.
Sparganophorus Vaillantii, Gaertn.
Spermacoce articularis, Lin. fil.
» *prostrata*, Aubl.
» *radicans*, Aubl.
» *tenuior*, Linn.
Sphaerococcus acicularis, Ag.
» *corneus crinalis*, Ag.
» *crispus*, Ag.
» *rigidus*, Ag.
» *spinellus*, Ag.
Spigelia anthelmia, Linn.
Spondias dulcis, Forst.
» *lutea*, Linn.
» *purpurea*, Linn.
Sporobolus pungens, Kunth.
» *tremulus*, Kunth.
» *virginicus*, Kunth.
Spyridia clavulata, Ag.
Stachytarpheta cajennensis, Vahl.
Stapelia marmorata, Jacq.
Stemodia maritima, Linn.
Stenotaphrum americanum, Schrank.
Stillingia sebifera, Mx.
Stipa tortilis, Desf.
Stylosanthes procumbens, Sw.
» *viscosa*, Sw.
Suriana maritima, Linn.
Synedrella nodiflora, Gaertn.
Symplocos martinicensis, Jacq.
Tabernaemontana macrophylla, Poir.
Tagetes erecta, Linn.
» *patula*, Linn.
Talinum crassifolium, W.
» *patens*, W.
Tamarindus indica, Linn.
» *occidentalis*, Gaertn.
Tecoma Leucoxylon, Mart.
» *pentaphylla*, Juss.
» *radicans*, Juss.
» *stans*, Juss.
Tephrosia littoralis, Pers.
Terminalia Catappa, Linn.
» *latifolia*, Linn.

Tetrapteris citrifolia, Pers.
Tetrazygia angustifolia, DC.
» *elaeagnoides*, DC.
Thevetia nereifolia, DC.
Thespesia populnea, Corr.
Thunbergia alata, Hook.
» *capensis*, Retz.
Thymus vulgaris, Linn.
Typha angustifolia, Sw.
» *canescens*, Sw.
» *fasciculata*, Sw.
» *flexuosa*, Sw.
Tournefortia bicolor, Sw.
» *canescens*, H. B. and K.
» *cymosa*, Linn.
» *foetidissima*, DC.
» *gnaphalodes*, Br.
» *hirsutissima*, Linn.
» *laevigata*, Lam.
» *micropylla*, Berter.
» *scabra*, Lam.
» *volubilis*, Linn.
Toxocarpus Wightianus, DC.
Trachodes intybacea, Schw.
Tradescantia discolor, Ait.
Tragia angustifolia, Linn.
» *infesta*, Mart.
» *Mercurialis*, Linn.
» *urens*, Linn.
» *volubilis*, Linn.
Tribulus cistoides, Linn.
» *maximus*, Linn.
Trichilia emarginata, n. sp.
» *moschata*, Sw.
» *spondioides*, Sw.
Trichosanthes anguina, Jacq.
Trinax parviflora, Sw.
Triopteris jamaicensis, Linn.
Triphasia monophylla, DC.
» *trifoliata*, DC.
Triumfetta Lappula, Linn.
» *procumbens*, Forst.
» *semitriloba*, Linn.
Tropaeolum majus, Linn.
Turbinaria denudata, Borg.
Turnera ulmifolia, Linn.
» » *angustifolia*, DC.

Ulva compressa, Linn.
» *Lactuca*, Ag.
» *latissima*, Ag.
» *reticulata*, Forsk.
Urena reticulata, Cav.
» *sinuata*, Linn.
» *Swartzii*, DC.
Urochloa fasciculata, Kunth.
Urtica betulaefolia, Sw.
» *ciliata*, Sw.
» *latifolia*, Rich.
» *macrophylla*, Thunb.
» *nummulariifolia*, Sw.
» *portulacina*, Linn.
» *serpyllacea*, Kunth.
» *trianthemoides*, Sw.
Valonia intricata, Ag.
Varronia abyssinica, DC.
» *calyptrata*, DC.
Verbena jamaicensis, Linn.
Vernonia arborescens, Sw.
» *fruticosa*, Sw.
» *linearis*, Spr.
» *obtusifolia*, Less.
» *rigida*, Sw.
Vinca rosea, Linn.
Vitex Agnus castus, Linn.
» *Negundo*, Linn.
Vitis vinifera, Linn.
Volkameria aculeata, Linn.
Waltheria americana, Linn.
» *elliptica*, Cav.
Wedelia carnosa, Rich.
Xanthium spinosum, Linn.
» *macrocarpum*, DC.
» » *glabratum*, DC.
Yucca gloriosa, Linn.
» *acuminata*, Swet.
Zanthoxylum Clava Herculis, Linn.
» *Pterota*, H. B. et K.
» *spinosum*, Sw.
» *tragodes*, DC.
Zea mays, Linn.
Zingiber officinale, Rosc.
Zinnia multiflora, Linn.
Zornia reticulata, Smith.
Zostera oceanica, Linn.

Nella Memoria *Sopra l'influenza dello strabismo nell'esercizio di varie professioni*, il sig. Carron du Villards col ragionamento, e colla citazione di molti fatti dimostra, nel primo capitolo, come lo strabismo eserciti una funesta influenza in chi abbraccia l'arte militare per la ragione principalmente che esso è di ostacolo alla giusta mira dell'arma.

Nel secondo capitolo accenna ai danni che la detta fisica imperfezione arreca a chi professa l'arte drammatica, pel motivo che lo strabismo, di qualunque specie sia, altera essenzialmente la fisionomia, dandole un'espressione d'incertezza, di stupidità, di corruccio, ecc., mentre non v'ha esercizio di altra arte che richiegga tanta sicurezza ed espressione nello sguardo quanta ne vuole la drammatica.

Nel capitolo terzo il sig. Carron du Villards applica le considerazioni da lui fatte dell'influenza dello strabismo nella carriera drammatica a tutti i casi, in cui l'uomo deve presentarsi al pubblico ed arringarlo, e qui parla degli oratori sacri e profani, degli avvocati, dei professori, ecc.

Alla fine poi della Memoria esso presenta un resoconto di 700 operazioni di strabismo da lui fatte a Nancy, Metz, e Luxembourg.

Il Cav. Colonnello Menabrea legge una sua Memoria intitolata: *Lois générales de divers ordres de phénomènes dont l'analyse dépend d'équations linéaires aux différences partielles tels que ceux des vibrations et de la propagation de la chaleur.*

(È stampata nel Vol. XVI a pag. 373).

Il Segretario Aggiunto Prof. Eugenio Sismonda legge pur esso una sua Memoria col titolo: *Note sur le terrain nummulitique supérieur du Dego, des Carcare, etc. dans l'Apennin Ligurien.*

(È anche stampata nel suddetto Volume a pag. 443).

In questa stessa adunanza si legge ancora un lavoro stato rassegnato all'Accademia dal sig. Eugenio Truqui, Ufficiale Consolare di S. M., avente per titolo: *Anthicini insulae Cypri et Syriae.*

(È pure stampato nel citato Volume a pag. 339).

29 aprile.

Il Segretario Aggiunto legge successivamente due lettere, l'una del

Presidente del Senato del Regno in data 26 aprile, l'altra del Presidente della Camera dei Deputati colla data 25 aprile, ambedue indiritte al Presidente dell'Accademia, e nelle quali si ringrazia questa pel dono fatto alle due Camere di una copia di tutti i Volumi (ad eccezione dell'XI.°, Serie 1.ª) di *Memorie*, che essa Accademia mandò in luce dalla sua fondazione al giorno d'oggi.

Dopo ciò il Cav. De Filippi legge: *Deuxième Mémoire pour servir à l'histoire génétique des Trématodes.*

(È stampata nel Vol. XVI a pag. 419).

Da ultimo il Prof. Richelmy legge: *Méthodes pour transformer et simplifier des fonctions algébriques ou transcendantes déduites de différents procédés d'interpolation.*

(Questo lavoro è stampato nel Vol. XVII a pag. 245).

20 maggio.

Il Segretario Aggiunto fa la consueta presentazione degli stampati di vario genere inviati in dono od in cambio all'Accademia dai rispettivi Autori o Editori dopo l'ultima tornata, e chiama particolarmente l'attenzione della Classe sulla Carta geologica dell'India del distintissimo Geologo inglese il sig. Belas G. B. Greenough, la cui recente perdita è altamente lamentata da tutti i dotti che il conobbero, e da questa Reale Accademia delle Scienze, che si onorava di annoverarlo tra i suoi più distinti Socii corrispondenti.

Si legge quindi una lettera del sig. Ministro delle Finanze in data del giorno 3 del corrente mese di maggio, nella quale esso sig. Ministro, mentre notifica all'Accademia, che è entrata in vigore la nuova legge in data 12 marzo ultimo scorso sulle privative industriali, a tenore della qual legge le invenzioni per cui viene chiesto privilegio non sono più sottomesse dal Governo ad un preventivo esame, prega il Presidente dell'Accademia a voler trasmettere al Ministero delle Finanze quelle domande di privilegio, che ancora trovinsi in corso di esame presso le Commissioni Accademiche.

Le domande, che, per incarico ricevuto dalla Classe, il Segretario

ritirò dalle Giunte Accademiche, e trasmise al sig. Ministro delle Finanze, in obbedienza alla sovramentovata lettera ministeriale, sono le seguenti:

Arnoux - *per un nuovo metodo di traimento ecc.*;

Bartlett - *per una macchina per aprire gallerie nei monti;*

Benati e Gastaldon - *per un sistema di locomozione a tubo propulsore idraulico;*

Bouvet (padre) - *per una macchina per impastare;*

Chabert - *per una macchina per fabbricare mattoni;*

Debenedetti e Comp.ª - *per miglioramenti nella fabbricazione del fosforo e dell'acido fosforico;*

Defontaine-Moreau - *pel trattamento delle materie filamentose;*

Delorenzi e Henfrey - *per un nuovo sistema di ferrovie, e per un meccanismo per salire e discendere i piani inclinati;*

Magnat e Mauby - *per un nuovo sistema per rendere impossibili gli incontri dei convogli sulle ferrovie;*

Pascal - *per un nuovo motore da applicarsi alle macchine a vapore;*

Signorile - *per un nuovo metodo di fabbricare il cemento a presa rapida, nella provincia di Casale;*

Taverna - *per un apparecchio atto ad ovviare alle rotture delle sale delle ruote dei vagoni;*

Wood-Whitaker - *per una guernitura di cardi a denti curvi.*

Il Cav. Botto annunzia alla Classe di aver attuata l'idea di un telegrafo elettro-magnetico ad un solo filo, mercè cui due stazioni possono corrispondere fra di loro contemporaneamente, ed a voce espone pure brevemente il principio teorico, su cui si fonda la costruzione di simile apparecchio del quale un modello già trovasi in azione nel teatro destinato alle esperienze di fisica nella Regia Università. Fatta questa comunicazione, esso Cav. Botto, all'oggetto di prender data sulla sua invenzione, consegna al Segretario, perchè sia conservato negli Archivii dell'Accademia, un piego suggellato, su cui stanno scritte le seguenti parole: *Schema di un telegrafo elettro-magnetico a un solo filo, con cui si possono trasmettere e ricevere dispacci contemporaneamente, ecc.*

Il Cav. Cantu' fa pur esso una comunicazione verbale, ed annunzia alla Classe di aver ottenuto, mediante la luce elettrica, l'istantanea

reazione chimica del gaz cloro e del gaz idrogeno, siccome si ottiene coll'azione della luce solare.

Asserisce di voler dare alle sue indagini su questo proposito maggiore estensione, e di ragguagliare poi la Classe intorno a quei risultamenti, che sarà per ottenere.

Finalmente leggesi una Memoria manoscritta dei signori Roberto Devisiani, Professore di Botanica nell'Università di Padova, e Abramo Massalongo, Prof. di storia naturale nel Ginnasio liceale di Verona, avente per titolo: *Flora dei terreni terziarii di Novale nel Vicentino*, e sulla quale, da apposita Commissione Accademica, già era stato fatto favorevole rapporto in una delle precedenti tornate.

(È stampata nel Vol. XVII a pag. 199).

10 giugno.

Il Segretario Aggiunto presenta alla Classe una medaglia in rame coll'effigie di S. E. il Cav. Cesare Di Saluzzo, alla cui memoria, in segno di riverenza e di affetto, essa medaglia è intitolata *dagli Allievi dell'Accademia Militare*, di cui il Saluzzo fu benemerito Governatore. Nel fare tale presentazione, il Segretario Aggiunto legge una lettera del Cav. Pettinengo, Presidente della Commissione promotrice del conio della detta medaglia, nella quale esso offre in dono all'Accademia l'esemplare sovra nominato.

Il Cav. Menabrea comunica alla Classe una lettera del Cav. Faa di Bruno, in data di Parigi 9 maggio p. p., in cui esso Faa di Bruno annunzia di avere trovato, studiando la teoria delle perturbazioni dei pianeti, un teorema generale di analisi di qualche importanza, che si riserva di pubblicare tosto che ne abbia tratto alcune conseguenze. In siffatta lettera il Cav. Faa di Bruno espone la formola da lui rinvenuta, e che ha per oggetto di dare il termine generale dello svolgimento di una funzione intiera elevata ad una potenza espressa da un esponente qualunque; esso osserva che finora le formole più generali conosciute a questo riguardo sono le formole di *recussione*, il cui uso è molto circoscritto a cagione delle loro complicazioni.

Per dare poi un'applicazione del suo teorema, l'Autore verifica la sua formola nel caso delle funzioni ellittiche di prima specie.

Udita la sovra esposta comunicazione, il Presidente Barone Plana dichiara che ad ogni evento il teorema enunciato dal Cav. Faa di Bruno non ha che fare colle perturbazioni dei pianeti, e che la formola da esso proposta non può essere di un'applicazione utile per la determinazione di simili perturbazioni.

Il Cav. Cantu' verbalmente notifica alla Classe, che aderendo alla istanza fattagli dal chiar.^mo^ Dottore Giacomo Bologna, Ispettore delle acque minerali di Recoaro, prese a studiare la natura del sedimento di quelle acque, e che vi riconobbe la coesistenza del cloro, del bromo e dell'iodio allo stato di combinazione salina, siccome già ebbe a riconoscerla in quasi tutte le acque minerali del Piemonte, non che di altri paesi, come in quelle di Vichy in Francia, e di Loëche in Isvizzera, in cui altri Chimici invano aveano ricercato l'esistenza del bromo e dell'iodio.

La notizia della presenza di questi due efficaci principii nelle celebrate acque di Recoaro potendo giovare a rendere ragione della loro potenza medicamentosa, ed a chiarire il loro modo di agire sull'economia animale nella cura delle malattie, per le quali sono raccomandate, il Cav. Cantu' fa fin d'ora per tali motivi l'esposta comunicazione alla Classe, riservandosi di farle conoscere a suo tempo i risultamenti delle ulteriori indagini, che esso proponesi di compiere sullo stesso argomento.

Finalmente il Segretario Aggiunto, Prof. Eugenio Sismonda, incomincia la lettura della *Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe di Scienze fisiche e matematiche nel corso dell'anno* 1854.

1.° luglio.

Si legge una lettera del sig. Ministro dell'Interno in data 22 giugno ultimo scorso, nella quale si notifica al Presidente dell'Accademia, che S. M., in udienza del giorno 21 del detto mese di giugno, si è degnata di approvare la nomina fatta dalla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del Prof. Cav. Domenico Capellina a Membro residente dell'Accademia per la Classe suddetta.

L'Accademico Cav. Cantu' fa alla Classe la seguente comunicazione:

« Nell'adunanza del giorno 3 aprile 1854, io ebbi l'onore di far

conoscere a questa Reale Accademia come l'acido solforico e l'acido cloridrico contengano sempre dell'arsenico, e come fossero insufficienti i mezzi sino a quel momento proposti dai Chimici per sceverarli interamente da questa sostanza, indicando il metodo, con cui mi era riuscito di giungere felicemente ad ottenere quest'importantissimo risultato.

» Le mie sperienze erano state instituite sugli accennati acidi del nostro commercio, i quali provengono per lo più dalle fabbriche del nostro paese. Ma era pur necessario di estendere quest'indagine anche all'acido solforico ed all'acido cloridrico, che si fabbricano all'estero con modificati procedimenti, locchè io feci seguendo lo stesso metodo, e colle stesse cautele, ed i risultati, che ne ottenni, furono senza eccezione affermativi.

» E quindi trattati collo stesso procedimento di depurazione, che già ebbi a far conoscere, ho ottenuto il medesimo felice successo.

» Da questi risultati io fui naturalmente indotto a credere, che l'arsenico non solamente accompagna lo zolfo ricavato dalle piriti, come taluno opina, ma anche quello dei vulcani, e forse di tutte le specie o varietà di zolfo, e di tutti i solfuri metallici.

» Di fatto avendo proceduto a questa investigazione sopra alcune varietà di zolfo e sopra diversi solfuri metallici nativi, che io avea a mia disposizione, ho potuto convincermi, che la mia induzione era fondata sul vero.

» Posso anche dire, conseguentemente al risultato di molte sperienze fatte sopra minerali di varia natura, che l'arsenico si trova nel regno minerale assai più frequentemente, che non siasi creduto sinora. »

Lo stesso Cav. Cantu' espone inoltre alcune sue osservazioni intorno al procedimento chimico, che oggidì si pratica quasi generalmente nella ricerca dell'arsenico, quando esso trovasi associato a materie organiche, nel qual caso per disinfettarle, o per distruggerle, o per altro scopo, si fa uso, oltre all'acido solforico, anche del cloro, e dell'acido cloridrico.

Al qual riguardo egli crede di poter asserire, appoggiato ai risultati ottenuti da apposite sperienze, che con siffatto modo di operare sulle materie organiche, infette d'arsenico, abbia sempre luogo un parziale deperdimento d'arsenico, che si volatilizza allo stato di cloruro, e ragionevolmente anche di bromuro, e di ioduro.

Da ciò egli ha potuto persuadersi con induttivo ragionamento, e

quindi convincersi col fatto dell'esperienza, che la frequente presenza dei cloruri, non che dei bromuri, e dei ioduri nelle materie organiche, sia pure altra causa di perdita dello stesso principio venefico, che si ha in mira di rintracciare.

Per queste ragioni egli crede essere necessario, onde evitare un sì grave inconveniente, di raccogliere esattamente i prodotti vaporosi condensabili, che si svolgono durante la carbonizzazione, e la successiva reazione della materia carbonizzata coll'acido cloro-nitrico per mezzo di un apposito apparato, che si debbe mantener freddo per tutto il tempo dell'operazione, coll'aiuto d'un miscuglio di ghiaccio pesto e sal marino; nei quali prodotti si debbe poi fare ricerca dell'arsenico col saggio di Marsh, e con quegli altri mezzi, che la scienza propone per constatare l'esistenza di questo principio.

Il Cav. Botto presenta alla Classe e consegna particolarmente al Segretario, perchè il conservi negli Archivii dell'Accademia, un piego suggellato, su cui leggesi: *Nota per pigliar data, riguardante una nuova estensione data al sistema telegrafico a doppia e contemporanea trasmissione mercè di un solo filo conduttore, sistema di cui è cenno nella scheda già presentata dall'Autore, ecc.*

Questo piego suggellato, che il Segretario Aggiunto riceve dalle mani del sig. Cav. Botto, porta la data del giorno 1.° luglio 1855.

Finalmente il Presidente Barone Plana legge un suo lavoro intitolato: *Mémoire sur l'application du principe de l'équilibre magnétique à la détermination du mouvement qu'une plaque horizontale de cuivre, tournant uniformément sur elle-même, imprime par réaction:*

Ou à une aiguille aimantée, assujettie à lui demeurer parallèle:

Ou à une aiguille d'inclinaison mobile dans un plan vertical fixe.

(È stampata nel Vol. XVII a pag. 101).

8 luglio.

Il Cav. Angelo Sismonda, condeputato col Conte Avogadro e col Segretario Aggiunto Prof. Eugenio Sismonda, fa relazione su una Memoria manoscritta, rassegnata all'Accademia, per la stampa ne' suoi Volumi, dall'Autore il Prof. sig. Quintino Sella, Memoria intitolata: *Studii sulla mineralogia sarda.*

In questo suo accuratissimo lavoro il Prof. Sella fa conoscere sei diverse *geminazioni*, ossia riunioni regolari di cristalli, provenienti, pel maggior numero, dalle Alpi piemontesi.

La prima (seguendo l'ordine giusta il quale trovansi descritte) è una geminazione di calcare, di Traversella, di cui è asse lo spigolo del romboedro $22\bar{1}$, ovvero la normale alla faccia del romboedro 411.

Nella seconda si scorge una geminazione di quarzo, di provenienza sconosciuta, di cui è asse lo spigolo del romboedro primitivo, o del suo inverso, ovvero la perpendicolare al romboedro 110, od al suo inverso.

La terza presenta una geminazione di quarzo, di Traversella, che ha per asse quello della zona formata dall'incontro di una faccia del romboedro primitivo coll'adiacente faccia del suo inverso.

La quarta è una geminazione di quarzo, del Delfinato, che dicesi avere per asse la normale alla faccia dell'isoesloedro $52\bar{1}$.

La quinta è costituita da una geminazione a penetrazione di pirite, di Valdieri, ad asse parallelo allo spigolo del tetraedro.

Osserva la Giunta che non tutte le enunciate geminazioni sono nuove per la scienza, ma che tuttavia il lavoro del Prof. Sella non è meno importante ove riproduce geminazioni già note, che ove ne dà a conoscere delle nuove, poichè a proposito di quelle egli rileva le mende, nelle quali incorse chi il precedette in tale studio, allorchè volle fissare il piano di rotazione dei due cristalli associati.

Essa Giunta pertanto conchiude proponendone la lettura alla Classe, affinchè questa ne voti poscia la stampa nei Volumi dell'Accademia; e conseguentemente all'approvazione del rapporto, la Memoria del Prof. Sella è immediatamente letta.

(Trovasi stampata nel Vol. XVII a pag. 289).

Da ultimo il Segretario Aggiunto, Prof. Eugenio Sismonda, ripiglia e termina la lettura della *Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe nel periodo dell'anno* 1854.

(È stampata nel Vol. XV a pag. LXI).

16 dicembre.

Il Vice-Presidente Conte Alberto Della Marmora comunica alla Classe un brano di una lettera scrittagli dal sig. De-Vecchi, Capitano nel Corpo

Reale dello Stato Maggiore Generale, dal campo di Kamara 20 agosto 1855, e nella quale questi il ragguaglia di alcune osservazioni geologiche da esso fatte nelle ore di ozio nei dintorni di Balaklava e di Kamara.

Raccogliesi da tali osservazioni del Capitano De-Vecchi, che le rupi delle dette regioni sono formate di un calcare d'aspetto analogo a quello del Capo della Caccia, e più ancora a quello di S. Antioco da lui osservati in Sardegna, e che in esso stanno sepolte grosse *Ippuriti*, *Caprotine* ed altri fossili cretacei. Al calcare compatto sovra accennato sono associati grandi banchi di un'arenaria biancastra calcareo-quarzosa con *Pettini*, *Lime*, ecc. Le cime poi più alte di quel sistema constano d'immensi banchi di un conglomerato durissimo, che al sig. De-Vecchi sembra molto recente, e sul quale hannovi ciottoli di granito e di protogina erratici.

Si raccoglie inoltre dalla citata lettera, che la spiaggia di Sebastopoli è, geologicamente parlando, una spiaggia emersa analoga a quella di Cagliari: infatti, visitando il Capitano De-Vecchi le trincee dal lato della baia delle Quarantene, le trovò aperte in gran parte nel terreno terziario, ed a contatto di questo scorse una terra bruna e grassa, nella quale rinvenne accumulate *Ostriche*, *Mitili*, e pezzi di stoviglie, come appunto si osserva lungo la strada, che in Sardegna conduce alla villa *Arcais*. Colle conchiglie e colle stoviglie trovò pure tali ammassi di ossa da rappresentare una vera *breccia ossea*, e da rendere così più evidente l'analogia geologica tra le nominate due spiaggie emerse nel periodo storico, di Cagliari cioè e di Sebastopoli. Due sole differenze vi notò il Capitano De-Vecchi, e queste sono: 1.° che a Cagliari la breccia ossea è intieramente separata dalla spiaggia emersa con conchiglie e stoviglie, mentre a Sebastopoli tutto è stato insieme commisto in fondo del mare; 2.° che la spiaggia emersa di Cagliari è assai più elevata al disopra del livello del mare, che non quella delle *Quarantene*, la cui maggiore altezza non oltrepassa venti metri.

Da ultimo il Segretario Aggiunto legge una Memoria manoscritta dell'Accademico nazionale non residente il Cav. Giuseppe De Notaris intitolata: *Micromycetes italici novi vel minus cogniti, Decas IX.*

(È stampata nel Vol. XVI a pag. 457).

MÉMOIRE

sur la formation de l'équation du quatrième *degré, et celle du* sixième *degré, desquelles dépend la solution littérale de l'équation générale du* cinquième *degré, suivant la méthode proposée par* Lagrange *en 1771*

PAR

JEAN PLANA

Une méthode qui, en dernière analyse, fait dépendre la solution de l'équation générale du cinquième degré de la solution d'une autre équation *complète* du sixième degré parait inutile à considérer. Et cela, avec d'autant plus de raison, que dans l'état actuel de la science, il a été démontré par Abel et d'autres Géomètres, que la solution littérale de l'équation du cinquième degré est impossible par des expressions radicales. Mais, si l'on fait abstraction de cette impossibilité, qui doit être implicitement communiquée à toutes les méthodes que l'on pourrait imaginer, il est au moins curieux de savoir, si l'analyse algébrique offre des moyens praticables pour opérer la transformation dont Lagrange a démontré simplement la possibilité sans prévoir les obstacles que l'on aurait rencontré dans l'exécution des calculs qui sont indispensables pour former les coefficiens des deux équations auxquelles sa méthode réduit la recherche des racines de l'équation du cinquième degré.

On verra dans ce Mémoire qu'il y a une fonction type à laquelle on peut réduire toutes les fonctions qui concourent à la formation de

ces coefficiens, et que la somme des *six* valeurs différentes dont est susceptible la fonction type peut toujours être déterminée par des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation du cinquième degré. Et afin de développer plus clairement cette idée, avant d'exposer les calculs qu'il faudra exécuter, je vais faire voir, avec le langage algébrique, en quoi consiste la question, envisagée sous le point de vue propre à faire mesurer, par la pensée, toute la profondeur de l'abîme dans lequel on serait entraîné si l'on entreprenait d'achever le calcul des coefficiens des deux équations ; l'une du quatrième, et l'autre du sixième degré, considérées par LAGRANGE.

§ I.

Soit

$$[1] \ldots\ldots \qquad x^5+mx^4+nx^3+px^2+qx+r=0$$

l'équation générale du cinquième degré, dont je représente les cinq racines par

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5 .$$

Tous ceux qui connaissent la théorie de LAGRANGE savent, que la solution de l'équation [1] dépend, de prime abord, de la solution d'une autre équation du quatrième degré, de la forme

$$[2] \ldots\ldots \qquad \theta^4-\theta^3F_1+\theta^2F_2-\theta F_3+F_4=0 ,$$

où les quatre coefficiens F_1, F_2, F_3, F_4 sont exprimés par des fonctions rationnelles des racines inconnues X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ; et des quantités connues m, n, p, q, r. Pour énoncer ce principe d'une manière plus explicite, nous ferons

$$F_1=f_1(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ; \qquad F_2=f_2(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ;$$

$$F_3=f_3(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ; \qquad F_4=f_4(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) .$$

En outre on sait, que ces quatre fonctions ont la propriété caractéristique de présenter seulement *six valeurs* différentes, en faisant toutes les permutations possibles entre les cinq lettres X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Et on démontre, que les six valeurs différentes sont précisément celles que l'on obtient en ne faisant aucune permutation à l'égard des deux

racines X_1, X_2, et faisant seulement les permutations entre les trois racines X_3, X_4, X_5.

Et comme les six valeurs

$$F_1^{\mathrm{I}},\quad F_1^{\mathrm{II}},\quad F_1^{\mathrm{III}},\quad F_1^{\mathrm{IV}},\quad F_1^{\mathrm{V}},\quad F_1^{\mathrm{VI}}$$

de F_1 étant formées, on obtient les six valeurs correspondantes de chacune des trois autres fonctions F_2, F_3, F_4 par les mêmes permutations faites dans le même ordre, on doit regarder comme *semblables* les quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, conformément à la définition de LAGRANGE ainsi conçue: « Si l'on a plusieurs fonctions des mêmes quantités, on « appellera fonctions *semblables* celles qui varient en même temps, ou « demeurent les mêmes, lorsqu'on y fait les mêmes permutations entre « les quantités dont elles sont composées, de manière qu'elles puissent « être désignées d'une manière analogue » (*Voyez page* 192 *du Volume de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année* 1771).

Quelque soit le nombre des fonctions *semblables* ainsi définies, après en avoir choisi une à volonté, on peut exprimer toutes les autres par des fonctions rationnelles de celle-ci, dès qu'on aura formé l'équation qui donne, par ses racines, toutes les valeurs dont elle est susceptible. En appliquant ce principe aux fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, et observant que F_1 doit être la plus simple des quatre, on conçoit qu'il est possible d'avoir les valeurs de F_2, F_3, F_4, exprimées par F_1. De sorte que, si une telle transformation était effectivement opérée, l'on aurait

$$F_2=\psi(F_1)\ ;\qquad F_3=\psi'(F_1)\ ;\qquad F_4=\psi''(F_1)\ ,$$

et l'équation [2] serait réduite à celle-ci;

$$[3]\ \ldots\ldots\ \theta^4-\theta^3F_1+\theta^2\psi(F_1)-\theta\psi'(F_1)+\psi''(F_1)=0\ .$$

De plus, on serait en possession de l'équation du sixième degré;

$$[4]\ \ldots\quad F_1^6-AF_1^5+BF_1^4-CF_1^3+DF_1^2-EF_1+F=0\ ,$$

où les coefficiens sont des fonctions de m, n, p, q, r, qui aurait pour racines les *six* valeurs dont est susceptible la fonction

$$F_1=f_1(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)\ .$$

LAGRANGE, qui a formé l'expression de F_1, a trouvé que, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$[5] \ldots\ldots P = X_1^3(X_2X_5+X_3X_4)+X_2^3(X_1X_3+X_4X_5)$$
$$+X_3^3(X_1X_5+X_2X_4)+X_4^3(X_1X_2+X_3X_5)$$
$$+X_5^3(X_1X_4+X_2X_3) ;$$

$$[6] \ldots\ldots Q = X_1(X_2^2X_5^2+X_3^2X_4^2)+X_2(X_1^2X_3^2+X_4^2X_5^2)$$
$$+X_3(X_1^2X_5^2+X_2^2X_4^2)+X_4(X_1^2X_2^2+X_3^2X_5^2)$$
$$+X_5(X_1^2X_4^2+X_2^2X_3^2) ,$$

l'on a

$$[7] \ldots\ldots F_1 = X_1^5+X_2^5+X_3^5+X_4^5+X_5^5-120.r+10(2P+3Q) .$$

La partie $X_1^5+X_2^5+X_3^5+X_4^5+X_5^5-120.r$ de cette valeur de F_1 étant une quantité que l'on peut exprimer par les coefficiens m, n, p, q, r ne peut avoir qu'une seule valeur. De sorte que la multiplicité des valeurs de F_1 tombe sur la fonction des racines $2P+3Q$. D'après cette considération, LAGRANGE a fait $z=2P+3Q$, et au lieu de l'équation [4], il a envisagé l'équation analogue du sixième degré qui aurait z pour inconnue. Mais sur ce point il y a un meilleur choix à faire, en observant, que les deux fonctions P et Q étant *semblables*, il suffirait de former l'équation qui donne les *six* valeurs de P, puisque il est possible d'avoir ensuite la valeur de Q en fonction de P. Alors, en représentant par

$$[8] \ldots\ldots P^6-A'P^5+B'P^4-C'P^3+D'P^2-E'P+F'=0$$

l'équation du sixième degré, dont les racines sont les *six* valeurs différentes que présente la fonction P par la permutation des racines X_3, X_4, X_5, l'on aura à former les valeurs de

$$P^2 , \quad P^3 , \quad P^4 , \quad P^5 , \quad P^6$$

pour pouvoir calculer, à l'aide des formules de WARING et de NEWTON, les coefficiens de l'équation [8] par les coefficiens de l'équation [1].

Ce calcul dévoile une complication énormément croissante, et même des difficultés pour son exacte exécution. Mais la complication serait, sans comparaison, plus grande si l'on prenait pour inconnue de l'équation du sixième degré le binome $2P+3Q$, puisque alors on aurait à former l'expression analytique des puissances

$$(2P+3Q)^2, \quad (2P+3Q)^3, \quad \ldots\ldots\ldots (2P+3Q)^6 .$$

Pour se persuader, que de tels calculs ne sont pas faciles à exécuter, il suffira de remarquer, que LAGRANGE s'est trompé, même en formant la valeur de la première puissance $2P+3Q$, en fonction des coefficiens de l'équation [1]: assertion qui sera prouvée dans ce Mémoire en remontant à la cause radicale de l'erreur (Lisez le § VII).

En supposant formée l'équation [8], il faudra s'attacher à la formation des quatre coefficiens de l'équation [2]; et c'est en cela, que la longueur du calcul est épouvantable dans toute la force du terme. En effet, il faut d'abord exprimer ces quatre coefficiens par l'intermédiaire de quatre autres fonctions des racines qui ne sont *pas semblables;* mais qui produisent des fonctions semblables par leurs combinaisons, faites conformément aux formules que nous donnerons. Et ces fonctions *semblables* ont toutes pour type la fonction suivante des cinq racines X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Soient λ, μ, ζ, β quatre exposans entiers positifs, y compris zéro, et

$$a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta$$

un terme quelconque du polynome, composé de vingt termes, que je représente par

$$\Sigma a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta = \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) .$$

Si l'on fait

$$[9] \ldots\ldots \quad \Sigma a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta = \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) =$$

$$X_2^\lambda X_1^\mu X_3^\zeta X_4^\beta + X_4^\lambda X_2^\mu X_1^\zeta X_3^\beta + X_1^\lambda X_3^\mu X_4^\zeta X_2^\beta + X_3^\lambda X_4^\mu X_2^\zeta X_1^\beta$$
$$+ X_3^\lambda X_1^\mu X_5^\zeta X_2^\beta + X_5^\lambda X_2^\mu X_3^\zeta X_1^\beta + X_2^\lambda X_3^\mu X_1^\zeta X_5^\beta + X_1^\lambda X_5^\mu X_2^\zeta X_3^\beta$$
$$+ X_4^\lambda X_1^\mu X_2^\zeta X_5^\beta + X_1^\lambda X_2^\mu X_5^\zeta X_4^\beta + X_5^\lambda X_4^\mu X_1^\zeta X_2^\beta + X_2^\lambda X_5^\mu X_4^\zeta X_1^\beta$$
$$+ X_5^\lambda X_1^\mu X_4^\zeta X_3^\beta + X_4^\lambda X_3^\mu X_5^\zeta X_1^\beta + X_1^\lambda X_4^\mu X_3^\zeta X_5^\beta + X_3^\lambda X_5^\mu X_1^\zeta X_4^\beta$$
$$+ X_3^\lambda X_2^\mu X_4^\zeta X_5^\beta + X_5^\lambda X_3^\mu X_2^\zeta X_4^\beta + X_4^\lambda X_5^\mu X_3^\zeta X_2^\beta + X_2^\lambda X_4^\mu X_5^\zeta X_3^\beta ;$$

on aura formé une fonction des racines qui ne pourra avoir que les six valeurs différentes

$$\Omega'(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ; \qquad \Omega''(X_1, X_2, X_3, X_5, X_4) ;$$

$$\Omega'''(X_1, X_2, X_4, X_5, X_3) ; \qquad \Omega^{IV}(X_1, X_2, X_4, X_3, X_5) ;$$

$$\Omega^{V}(X_1, X_2, X_5, X_3, X_4) ; \qquad \Omega^{VI}(X_1, X_2, X_5, X_4, X_3) ;$$

obtenues par la permutation des trois racines X_3, X_4, X_5. Toute autre permutation que l'on voudrait faire redonnera une des six que nous venons de définir. Par exemple, la permutation de X_1 en X_4 et de X_4 en X_1 donne

$$\Omega(X_4, X_2, X_3, X_1, X_5) = \Omega^{V}(X_1, X_2, X_5, X_3, X_4) .$$

La permutation de X_2 en X_1 et de X_1 en X_2 donne

$$\Omega(X_2, X_1, X_3, X_4, X_5) = \Omega^{VI}(X_1, X_2, X_5, X_4, X_3) ;$$

et ainsi de toute autre permutation.

Il suffira de connaître les quatre exposans λ, μ, ζ, β pour que la valeur individuelle des fonctions de ce genre soit connue. En posant, par exemple, $\lambda = 3$; $\mu = 1$; $\zeta = 1$; $\beta = 0$ on obtient la valeur de $2P$ telle qu'elle est fournie par l'équation [5]. Et en faisant $\lambda = 1$; $\mu = 2$; $\zeta = 2$; $\beta = 0$ on aura la valeur de $2Q$ telle qu'elle est fournie par l'equation [6].

Cela posé on trouvera que, *après* avoir exécuté les multiplications indiquées dans les expressions *primitives* de F_2, F_3, F_4, on obtient pour chacune d'elles une expression *linéaire* (à l'égard des fonctions Ω) de la forme

$$M + H'\Omega_{(1)} + H''\Omega_{(2)} + H'''\Omega_{(3)} + \text{etc.} ;$$

où M, H', H'', H''', etc. sont des quantités connues par les coefficiens de l'équation [1], et des coefficiens numériques absolus qui sont introduits par la nature des développemens que l'on est forcé d'exécuter.

Le résultat d'un tel calcul sera celui de présenter l'équation [2] sous cette forme ;

$$[10] \ldots\ldots \quad 0 = \theta^4 - \theta^3 \left\{ F_1 \right\} + \theta^2 \left\{ M + \Sigma H_{(i)} \Omega_{(i)} \right\}$$
$$- \theta \left\{ M' + \Sigma G_{(k)} \Omega_{(k)} \right\} + \left\{ M'' + \Sigma E_{(g)} \Omega_{(g)} \right\} ;$$

où M, M', M'' sont des quantités connues, et

$$\Sigma H_{(i)} \Omega_{(i)} ; \qquad \Sigma G_{(k)} \Omega_{(k)} ; \qquad \Sigma E_{(g)} \Omega_{(g)}$$

l'ensemble des termes dont chacun est donné par la somme de vingt termes semblables à ceux qu'on voit dans le second membre de l'équation [9].

Maintenant il faut observer, que non seulement les puissances de P;

$$P, \quad P^2, \quad P^3, \quad P^4, \quad \text{etc.}$$

peuvent être exprimées par des fonctions semblables à la fonction

$$\Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$$

d'une manière *linéaire*, mais que même les produits

$$P \,.\, \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ;$$

$$P^2 \,.\, \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ;$$

$$P^3 \,.\, \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) ;$$

etc.

partagent la même propriété fondamentale. De sorte que l'on pourra appliquer à la fonction Q, et à chacune des fonctions Ω, qui entrent dans l'équation [10], la formule de Lagrange pour les exprimer par des fonctions rationnelles de P (Lisez les pages 207–212 de son Mémoire publié dans le Volume de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1771).

Alors l'équation [10] sera ramenée à la forme

$$[11] \ldots \quad \theta^4 - \theta^3 \Phi_1(P) + \theta^2 \Phi_2(P) - \theta \Phi_3(P) + \Phi_4(P) = 0 ;$$

$\Phi_1(P)$, $\Phi_2(P)$, $\Phi_3(P)$, $\Phi_4(P)$ étant des fonctions de P; et la solution de l'équation du cinquième degré sera réduite à la solution des deux équations [8] et [11]. Toutefois il est essentiel d'observer, que, pour atteindre ce but, on sera forcé de calculer la somme des six valeurs

de la fonction $\Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ par les coefficiens de l'équation [1]; ce qui exige l'emploi de cette formule de WARING. Soit

$$S_{(i)} = X_1^i + X_2^i + X_3^i + X_4^i + X_5^i \ ;$$

en désignant par

$$S.\Sigma a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta = S.\Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$$

la somme des six valeurs de la fonction Ω qui est composée par 120 termes, l'on a

$$(12) \ldots . \quad S.\Sigma a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta = S.\Omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) =$$

$$S_{(\beta)} \left| \begin{array}{l} S_{(\lambda)} \cdot S_{(\mu)} \cdot S_{(\zeta)} - S_{(\lambda+\mu)} \cdot S_{(\zeta)} - S_{(\lambda+\zeta)} \cdot S_{(\mu)} \\ - S_{(\mu+\zeta)} \cdot S_{(\lambda)} + 2 S_{(\lambda+\mu+\zeta)} \end{array} \right|$$

$$+ 2 S_{(\mu)} \cdot S_{(\lambda+\zeta+\beta)} + 2 S_{(\zeta)} \cdot S_{(\lambda+\mu+\beta)} + 2 S_{(\lambda)} \cdot S_{(\mu+\zeta+\beta)}$$

$$+ S_{(\mu+\zeta)} \cdot S_{(\lambda+\beta)} + S_{(\lambda+\zeta)} \cdot S_{(\mu+\beta)} + S_{(\lambda+\mu)} \cdot S_{(\zeta+\beta)}$$

$$- S_{(\mu)} \cdot S_{(\zeta)} \cdot S_{(\lambda+\beta)} - S_{(\lambda)} \cdot S_{(\zeta)} \cdot S_{(\mu+\beta)}$$

$$- S_{(\lambda)} \cdot S_{(\mu)} \cdot S_{(\zeta+\beta)} - 6 S_{(\lambda+\mu+\zeta+\beta)} \ .$$

Comme il importe dans cette recherche d'avoir les racines de l'équation du 4.ème degré sous la forme la plus simple dont elles sont susceptibles en fonction des coefficiens, explicitement, on verra au § VI que je présente ces racines sous une forme nouvelle qui a sur l'ancienne l'avantage d'être délivrée de toute quantité auxiliaire.

Cela posé, si l'on ajoute aux réflexions précédentes, que l'équation [10] doit renfermer 453 termes, qui, chacun, donnent plusieurs fonctions semblables à celle qui constitue le second membre de l'équation [9], on ne balancera pas à regarder comme impraticable le calcul auquel entraîne cette méthode de LAGRANGE. En outre, on ne balancera pas à juger un tel calcul incapable, par l'excessive complication du résultat définitif, de fournir des lumières nouvelles sur la nature des racines de l'équation générale du cinquième degré.

Peut être, je me trompe; mais je présume que LAGRANGE aurait

conçu de sa théorie une opinion moins avantageuse, s'il avait entrepris de la développer au de-là des généralités qui peuvent être saisies sans aucun calcul pénible. Mais pour en sonder la profondeur, il faudra inventer des moyens d'exécution supérieurs à ceux dont j'ai connaissance. On doit, ce me semble, éviter la formation des deux équations de LAGRANGE; car en l'essayant sur des équations du 5ème degré, dont on sait d'avance que les racines peuvent être exprimées d'une manière finie, par des quantités radicales, on se voit forcé de rétrograder vers le principe de VANDERMONDE pour éviter les calculs impraticables exigés pour la formation de l'équation du 4.ème degré, et y voir la propriété particulière qui fournit les racines que l'on demande sans l'intermédiaire de l'équation du 6.ème degré qui, en pareil cas, est soluble.

Même avec les imperfections dont mon travail portera l'empreinte, il pourra peut-être servir pour épargner à d'autres des efforts inutiles, et les garantir de certaines illusions capables de causer la perte d'un temps précieux. C'est sous ce rapport, qui me paraît philosophique, que je me décide à publier ce Mémoire, quoique les résultats qu'il renferme ne soient qu'une très-faible partie de ceux qu'il faudrait calculer pour amener à son dernier terme la formation des coefficiens des deux équations dont j'ai clairement défini les formes primitives et subséquentes.

§ II.

Soient 1, α, α^2, α^3, α^4 les cinq racines de l'équation $x^5-1=0$. En posant

$$[1]\ldots\ldots\begin{cases}\theta' = (X_1+\alpha X_2+\alpha^2 X_3+\alpha^3 X_4+\alpha^4 X_5)^5 ;\\ \theta'' = (X_1+\alpha^2 X_2+\alpha^4 X_3+\alpha X_4+\alpha^3 X_5)^5 ;\\ \theta''' = (X_1+\alpha^3 X_2+\alpha X_3+\alpha^4 X_4+\alpha^2 X_5)^5 ;\\ \theta^{IV} = (X_1+\alpha^4 X_2+\alpha^3 X_3+\alpha^2 X_4+\alpha X_5)^5 ;\end{cases}$$

il est évident que l'on a

$$5X_1=(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ;$$

$$5X_2=(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ;$$

$$5X_3=(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ;$$

$$5X_4=(X_1+X_4+X_3+X_2+X_5)+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ;$$

$$5X_5=(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ .$$

Mais, pour faire disparaître l'espèce d'identité que ces équations, ainsi écrites, présentent, il suffira de remarquer, qu'en vertu de l'équation

$$-m=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5\ ;$$

nous avons

$$[2]\ \ldots\ldots\ \begin{cases} 5X_1=-m+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ; \\ 5X_2=-m+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ; \\ 5X_3=-m+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ; \\ 5X_4=-m+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ ; \\ 5X_5=-m+\alpha\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{I}}}+\alpha^2\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{II}}}+\alpha^3\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{III}}}+\alpha^4\sqrt[5]{\theta^{\mathrm{IV}}}\ . \end{cases}$$

Maintenant, si l'on considère θ^{I}, θ^{II}, θ^{III}, θ^{IV} comme les quatre racines d'une équation du quatrième degré, représentée par

$$[3]\ \ldots\ldots\ \theta^4-T\theta^3+U\theta^2-Z\theta+Y=0\ ,$$

il faudra pouvoir déterminer les quatre coefficiens T, U, Z, Y en fonction des coefficiens de l'équation [1] du I.er §, pour en conclure les racines X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 à l'aide des formules [2]. Or l'on a

$$T=\theta^{\mathrm{I}}+\theta^{\mathrm{II}}+\theta^{\mathrm{III}}+\theta^{\mathrm{IV}}\ ;$$

$$2U=T^2-(\theta^{\mathrm{I}\,2}+\theta^{\mathrm{II}\,2}+\theta^{\mathrm{III}\,2}+\theta^{\mathrm{IV}\,2})\ ;$$

$$Z=\theta^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{III}}+\theta^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{IV}}+\theta^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{III}}\theta^{\mathrm{IV}}+\theta^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{III}}\theta^{\mathrm{IV}}\ ;$$

$$Y=\theta^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{III}}\theta^{\mathrm{IV}}\ ;$$

et en posant

$$S'_{(1)}=\theta^{1}+\theta^{II}+\theta^{III}+\theta^{IV}\ ;\qquad S'_{(2)}=\theta^{1\,2}+\theta^{II\,2}+\theta^{III\,2}+\theta^{IV\,2}\ ;$$

$$S'_{(3)}=\theta^{1\,3}+\theta^{II\,3}+\theta^{III\,3}+\theta^{IV\,3}\ ;\qquad S'_{(4)}=\theta^{1\,4}+\theta^{II\,4}+\theta^{III\,4}+\theta^{IV\,4}\ ;$$

$$[4]\ \ldots\ldots\ \begin{cases} T=S'_{(1)}\ ; \\ U=\dfrac{TS'_{(1)}-S'_{(2)}}{2}\ ; \\ Z=\dfrac{US'_{(1)}-TS'_{(2)}+S'_{(3)}}{3}\ ; \\ Y=\dfrac{ZS'_{(1)}-US'_{(2)}+TS'_{(3)}-S'_{(4)}}{4}\ . \end{cases}$$

Donc, la formation des coefficiens de l'équation [3] dépend de celle des quatre quantités $S'_{(1)}$, $S'_{(2)}$, $S'_{(3)}$, $S'_{(4)}$.

Pour cela, il faut développer la cinquième puissance du polynome qui est seulement indiquée dans le second membre des équations [1]. Soit, en général;

$$[5]\ \ldots\ldots\qquad \theta=(X_1+\alpha X_2+\alpha^2X_3+\alpha^3X_4+\alpha^4X_5)^5\ ;$$

l'on aura, après avoir exécuté ce développement, un résultat de la forme

$$[6]\ \ldots\ldots\qquad \theta=\Pi+\alpha\xi^{1}+\alpha^2\xi^{II}+\alpha^3\xi^{III}+\alpha^4\xi^{IV}\ ,$$

à cause que $\alpha^5=1$, $\alpha^{5+k}=\alpha^k$; où Π, ξ^{1}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV} sont des fonctions entières et rationnelles des racines X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Cela posé, les équations [1] seront équivalentes à celles-ci ;

$$[7]\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \theta^{1}=\Pi+\alpha\ \xi^{1}+\alpha^2\xi^{II}+\alpha^3\xi^{III}+\alpha^4\xi^{IV}\ ; \\ \theta^{II}=\Pi+\alpha^2\xi^{1}+\alpha^4\xi^{II}+\alpha\ \xi^{III}+\alpha^3\xi^{IV}\ ; \\ \theta^{III}=\Pi+\alpha^3\xi^{1}+\alpha\ \xi^{II}+\alpha^4\xi^{III}+\alpha^2\xi^{IV}\ ; \\ \theta^{IV}=\Pi+\alpha^4\xi^{1}+\alpha^3\xi^{II}+\alpha^2\xi^{III}+\alpha\ \xi^{IV}\ . \end{cases}$$

Quelles que soient les valeurs des fonctions Π, ξ^{1}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV}, la simple inspection des équations [5] et [6] démontre que, en posant $\alpha=1$, l'équation

$$-m^5=(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)^5 .$$

doit être équivalente à celle-ci ;

[8] ..... $$-m^5=\Pi+\xi^{\mathrm{I}}+\xi^{\mathrm{II}}+\xi^{\mathrm{III}}+\xi^{\mathrm{IV}} .$$

Donc, en sommant l'équation [8] avec les quatre équations [7], il est évident que l'on a

$$S'_{(i)}-m^5=5\Pi ,$$

puisque la racine α de l'équation $x^5-1=0$ donne

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0 .$$

Il suit de là que

[9] ..... $$T=5\Pi+m^5 .$$

En faisant le carré, le cube, et la quatrième puissance des deux membres de l'équation [6], on formera ensuite quatre équations semblables aux équations [7], et une équation semblable à l'équation [8], desquelles on déduira les valeurs de $S'_{(2)}$, $S'_{(3)}$, $S'_{(4)}$ exprimées par les fonctions Π, ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV}. En effet ; soit en général

[10] ..... $$S^i=\Pi_{(i)}+\alpha\xi^{\mathrm{I}}{}_{(i)}+\alpha^2\xi^{\mathrm{II}}{}_{(i)}+\alpha^3\xi^{\mathrm{III}}{}_{(i)}+\alpha^4\xi^{\mathrm{IV}}{}_{(i)}$$

le résultat fourni par la puissance i des deux membres de l'équation [6]; en y faisant $\alpha=1$ l'on aura

[11] ..... $$(-m)^{5i}=\Pi_{(i)}+\xi^{\mathrm{I}}{}_{(i)}+\xi^{\mathrm{II}}{}_{(i)}+\xi^{\mathrm{III}}{}_{(i)}+\xi^{\mathrm{IV}}{}_{(i)} .$$

Donc en traitant ces équations comme les équations [7] et [8] on en tirera la formule

[12] ..... $$S'_{(i)}+(-m)^{5i}=5\Pi_{(i)} .$$

Pour $i=2$, $i=3$, $i=4$, on trouve

[13] ... $$\begin{cases}\Pi_{(2)}=\Pi^2+2\Pi^{\mathrm{I}} ;\\ \Pi_{(3)}=\Pi^3+6\Pi.\Pi^{\mathrm{I}}+3\Pi^{\mathrm{II}} ;\\ \Pi_{(4)}=\Pi^4+4\Pi^{\mathrm{III}}+24\Pi^{\mathrm{IV}}+12\Pi(\Pi^{\mathrm{II}}+\Pi.\Pi^{\mathrm{I}})+6(\xi^{\mathrm{II}2}\xi^{\mathrm{III}2}+\xi^{\mathrm{I}2}\xi^{\mathrm{IV}2});\end{cases}$$

après avoir fait, pour plus de simplicité;

$$[14]\ldots\ldots\begin{cases}\Pi' = \xi'\xi^{IV} + \xi''\xi''' ;\\ \Pi'' = \xi''(\xi'\xi'' + \xi^{IV\,2}) + \xi'''(\xi'''\xi^{IV} + \xi'^{\,2}) ;\\ \Pi''' = \xi'(\xi'''^{\,3} + \xi''\xi'^{\,2}) + \xi^{IV}(\xi'' + \xi'''\xi^{IV\,2}) ;\\ \Pi^{IV} = \xi'\xi''\xi'''\xi^{IV} .\end{cases}$$

La première et la quatrième de ces équations donnent

$$\Pi'^{\,2} - 2\Pi^{IV} = \xi'^{\,2}\xi^{IV\,2} + \xi''^{\,2}\xi'''^{\,2} ;$$

partant l'on a

$$[15]\ \ldots\ \Pi_{(4)} = \Pi^4 + 4\Pi'''\Pi + 12\Pi^{IV}\Pi + 6\Pi'^{\,2} + 12\Pi(\Pi''\Pi + \Pi\,.\,\Pi') .$$

Il suit de là et de la formule [12], que

$$[16]\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}S'_{(1)} = 5\Pi + m^5 ;\\ S'_{(2)} = 5\Pi_{(2)} - m^{10} ;\\ S'_{(3)} = 5\Pi_{(3)} + m^{15} ;\\ S'_{(4)} = 5\Pi_{(4)} - m^{20} ;\end{cases}$$

ou bien, en substituant pour $\Pi_{(2)}$, $\Pi_{(3)}$, $\Pi_{(4)}$ leurs valeurs;

$$[17]\ldots\begin{cases}S'_{(1)} = 5\Pi + m^5 ;\\ S'_{(2)} = 5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10} ;\\ S'_{(3)} = 5\Pi^3 + 30\Pi\,.\,\Pi' + 15\Pi'' + m^{15} ;\\ S'_{(4)} = 5\Pi^4 + 20\Pi'''\Pi + 60\Pi^{IV}\Pi + 30\Pi'^{\,2} + 60\Pi(\Pi''\Pi + \Pi\,.\,\Pi') - m^{20} .\end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans les équations [4] donne d'abord;

$$Z' = 5\Pi + m^5 ;$$

$$U = 10\Pi^2 - 5\Pi' + 5m^5\Pi + m^{10} .$$

La troisième des équations [4] donne

$$\begin{aligned}3Z = {} & (5\Pi + m^5)(10\Pi^2 + 5m^5\Pi - 5\Pi' + m^{10})\\ & -(5\Pi + m^5)(5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10})\\ & +5\Pi^3 + 30\Pi\,.\,\Pi' + 15\Pi'' + m^{15} ;\end{aligned}$$

donc en réduisant l'on a ;

$$Z = 10\Pi^3 + 10m^5\Pi^2 + 5m^{10}\Pi - 15\Pi.\Pi' + 5\Pi''$$
$$- 5m^5\Pi' + m^{15} ;$$

et par conséquent

$$Z + S'_{(3)} = 15\Pi^3 + 15\Pi.\Pi' + 20\Pi'' + 10m^5\Pi^2$$
$$- 5m^5\Pi' + 5m^{10}\Pi + 2m^{15} .$$

La quatrième des équations [4] donne

$$4Y = (5\Pi + m^5)(Z + S'_{(3)}) - US'_{(2)} - S'_{(4)} ;$$

partant l'on a

$$4Y + S'_{(4)} = (5\Pi + m^5)(Z + S'_{(3)})$$
$$- (10\Pi^2 - 5\Pi' + 5m^5\Pi + m^{10})(5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10}) ;$$

ou bien

$$4Y + S'_{(4)} = (5\Pi + m^5)\left\{Z + S'_{(3)} - m^5(5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10})\right\}$$
$$- 5(2\Pi^2 - \Pi')(5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10}) ;$$

$$4Y + S'_{(4)} = (5\Pi + m^5)\left\{\begin{array}{l} 15\Pi^3 + 5m^5\Pi^2 + 5m^{10}\Pi + 15\Pi.\Pi' \\ - 15m^5\Pi' + 20\Pi'' + 3m^{15} \end{array}\right\}$$
$$- 5(2\Pi^2 - \Pi')(5\Pi^2 + 10\Pi' - m^{10}) ;$$

$$4Y + S'_{(4)} = 25\Pi^4 + 40m^5\Pi^3 + 40m^{10}\Pi^2 - 60m^5\Pi.\Pi'$$
$$- 20m^{10}\Pi' + 20m^{15}\Pi + 50\Pi'^2 + 100\Pi.\Pi''$$
$$+ 20m^5\Pi'' + 3m^{20} .$$

En substituant pour $S'_{(4)}$ sa valeur donnée par les équations [17], les deux membres de cette équation deviendront divisibles par 4, et l'on aura

$$Y = 5\Pi^4 + 10m^5\Pi^3 + 10m^{10}\Pi^2 + 5m^{15}\Pi - 15m^5\Pi.\Pi'$$
$$- 5m^{10}\Pi' + 5m^5\Pi'' + 5\Pi'^2 + 10\Pi.\Pi'' - 15\Pi^2.\Pi'$$
$$- 5\Pi''' - 15\Pi^{IV} + m^{20} .$$

En rapprochant les résultats que nous venons de trouver, la formation de l'équation [3] dépendra des formules suivantes; savoir

$$\left\{\begin{array}{l} 0^5 - T0^3 + U0^2 - Z0 + Y = 0 \ ; \\ T = 5\Pi + m^5 \ ; \\ U = 10\Pi^2 + 5m^5\Pi - 5\Pi^1 + m^{10} \ ; \\ Z = 10\Pi^3 + 10m^5\Pi^2 + 5m^{10}\Pi - 5m^5\Pi^1 - 15\Pi.\Pi^{11} + 5\Pi^{11} + m^{15} \ ; \\ Y = 5\Pi^4 + 10m^5\Pi^3 + 10m^{10}\Pi^2 + 5m^{15}\Pi - 15m^5\Pi.\Pi^1 \\ \quad - 5m^{10}\Pi^1 + 5m^5\Pi^{11} + 10\Pi.\Pi^{11} - 15\Pi^2.\Pi^1 + 5\Pi^{12} \\ \quad - 5\Pi^{111} - 15\Pi^{1v} + m^{20} \ . \end{array}\right. \quad (\varepsilon)$$

Les fonctions Π^1, Π^{11}, Π^{111}, Π^{1v} dépendent des fonctions ξ^1, ξ^{11}, ξ^{111}, ξ^{1v}, conformément aux équations [14]. Mais pour avoir ces fonctions, il est indispensable de développer le second membre de l'équation [5]. C'est de quoi nous allons nous occuper dans le § suivant, en faisant observer, que la supposition de $m = 0$ ne simplifie pas essentiellement le calcul, puisque par là les seconds membres des équations [14] ne sont pas plus faciles à calculer.

§ III.

Pour obtenir les cinq fonctions des racines désignées par Π, ξ^1, ξ^{11}, ξ^{111}, ξ^{1v} on fera usage de ce Lemme. Soit

$$H = M_1 + \alpha M_2 + \alpha^2 M_3 + \alpha^3 M_4 + \alpha^4 M_5 \ ;$$

$$H' = N_1 + \alpha N_2 + \alpha^2 N_3 + \alpha^3 N_4 + \alpha^4 N_4 \ ;$$

en faisant le produit HH', et ayant égard à l'équation

$$\alpha^{5+k} = \alpha^k \ ,$$

l'on aura

$$[1] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad HH' =$$

$$(M_1N_1 + M_5N_2 + M_4N_3 + M_3N_4 + M_2N_5)$$

$$+ \alpha\ (M_2N_1 + M_1N_2 + M_5N_3 + M_4N_4 + M_3N_5)$$

$$+ \alpha^2\ (M_3N_1 + M_2N_2 + M_1N_3 + M_5N_4 + M_4N_5)$$

$$+ \alpha^3\ (M_4N_1 + M_3N_2 + M_2N_3 + M_1N_4 + M_5N_5)$$

$$+ \alpha^4\ (M_5N_1 + M_4N_2 + M_3N_3 + M_2N_4 + M_1N_5)\ .$$

Cela posé; si l'on fait

$$[2] \ldots\ldots \quad t = X_1 + \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 + \alpha^3 X_4 + \alpha^4 X_5\ ,$$

on obtiendra successivement les valeurs suivantes de t^2, t^3, t^4, t^5: savoir

$$[3] \ldots \begin{cases} t^2 = A_1 + \alpha A_2 + \alpha^2 A_3 + \alpha^3 A_4 + \alpha^4 A_5\ ; \\ A_1 = X_1^2 + 2X_2X_5 + 2X_3X_4\ ; \\ A_2 = X_4^2 + 2X_1X_2 + 2X_3X_5\ ; \\ A_3 = X_2^2 + 2X_1X_3 + 2X_4X_5\ ; \\ A_4 = X_5^2 + 2X_1X_4 + 2X_2X_3\ ; \\ A_5 = X_3^2 + 2X_1X_5 + 2X_2X_4\ . \end{cases}$$

$$t^3 = B_1 + \alpha B_2 + \alpha^2 B_3 + \alpha^3 B_4 + \alpha^4 B_5\ ,$$

$$[4] \ldots \begin{cases} B_1 = X_1^3 + 6(X_1X_2X_5 + X_1X_3X_4) + 3(X_2X_3^2 + X_3X_5^2 + X_4X_2^2 + X_5X_4^2)\ ; \\ B_2 = X_3^3 + 6(X_1X_3X_5 + X_2X_3X_4) + 3(X_1X_4^2 + X_2X_5^2 + X_4X_5^2 + X_5X_2^2)\ ; \\ B_3 = X_5^3 + 6(X_1X_4X_5 + X_2X_3X_5) + 3(X_1X_2^2 + X_2X_4^2 + X_3X_1^2 + X_4X_3^2)\ ; \\ B_4 = X_2^3 + 6(X_1X_2X_3 + X_2X_4X_5) + 3(X_1X_5^2 + X_3X_4^2 + X_4X_1^2 + X_5X_3^2)\ ; \\ B_5 = X_4^3 + 6(X_1X_2X_4 + X_3X_4X_5) + 3(X_1X_3^2 + X_2X_5^2 + X_3X_2^2 + X_5X_1^2)\ ; \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
t^4 &= C_1 + \alpha C_2 + \alpha^2 C_3 + \alpha^3 C_4 + \alpha^4 C_5 \ ; \\
C_1 &= X_1^4 + 24 . X_2 X_3 X_4 X_5 + 6 (X_3^2 X_4^2 + X_2^2 X_5^2) \\
&\quad + 4 (X_1 X_4^3 + X_3 X_2^3 + X_4 X_5^3 + X_5 X_3^3) \\
&\quad + 12 . X_1 (X_2 X_3^2 + X_3 X_5^2 + X_4 X_2^2 + X_5 X_1^2 + X_2 X_5 X_1 + X_3 X_4 X_1) ; \\
C_2 &= X_5^4 + 24 . X_1 X_2 X_3 X_4 + 6 (X_1^2 X_4^2 + X_2^2 X_3^2) \\
&\quad + 4 (X_1 X_3^3 + X_2 X_1^3 + X_3 X_4^3 + X_4 X_2^3) \\
&\quad + 12 . X_5 (X_1 X_4 X_5 + X_1 X_2^2 + X_2 X_1^2 + X_2 X_3 X_5 + X_4 X_3^2 + X_3 X_4^2) ; \\
C_3 &= X_4^4 + 24 . X_1 X_2 X_3 X_5 + 6 (X_1^2 X_2^2 + X_3^2 X_5^2) \\
&\quad + 4 (X_1 X_5^3 + X_2 X_3^3 + X_3 X_1^3 + X_5 X_2^3) \\
&\quad + 12 . X_4 (X_1 X_3^2 + X_5 X_1^2 + X_3 X_2^2 + X_2 X_5^2 + X_3 X_5 X_4 + X_1 X_2 X_4) ; \\
C_4 &= X_3^4 + 24 . X_1 X_2 X_4 X_5 + 6 (X_1^2 X_5^2 + X_2^2 X_4^2) \\
&\quad + 4 (X_1 X_2^3 + X_2 X_5^3 + X_4 X_1^3 + X_5 X_4^3) \\
&\quad + 12 . X_3 (X_1 X_4^2 + X_2 X_1^2 + X_3 X_2^2 + X_4 X_5^2 + X_1 X_5 X_3 + X_2 X_4 X_3) ; \\
C_5 &= X_2^4 + 24 . X_1 X_3 X_4 X_5 + 6 (X_1^2 X_3^2 + X_4^2 X_5^2) \\
&\quad + 4 (X_1 X_4^3 + X_3 X_5^3 + X_4 X_3^3 + X_5 X_1^3) \\
&\quad + 12 . X_2 (X_1 X_5^2 + X_3 X_4^2 + X_4 X_1^2 + X_5 X_3^2 + X_4 X_5 X_2 + X_1 X_3 X_2) ;
\end{aligned}
\right. \quad [5] \ldots
$$

$$
[6] \ldots\ldots \quad t^5 = 0 = \Pi + \alpha \xi^{\mathrm{I}} + \alpha^2 \xi^{\mathrm{II}} + \alpha^3 \xi^{\mathrm{III}} + \alpha^4 \xi^{\mathrm{IV}} \ .
$$

En faisant

$$
\begin{aligned}
[7] \ldots\ldots \quad P = \ & X_1^3 (X_2 X_5 + X_3 X_4) + X_2^3 (X_1 X_3 + X_4 X_5) \\
& + X_3^3 (X_1 X_5 + X_2 X_4) + X_4^3 (X_1 X_2 + X_3 X_5) \\
& + X_5^3 (X_1 X_4 + X_2 X_3) \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[8] \ldots\ldots \quad Q = \ & X_1 (X_2^2 X_5^2 + X_3^2 X_4^2) + X_2 (X_1^2 X_3^2 + X_4^2 X_5^2) \\
& + X_3 (X_1^2 X_5^2 + X_2^2 X_4^2) + X_4 (X_1^2 X_2^2 + X_3^2 X_5^2) \\
& + X_5 (X_1^2 X_4^2 + X_2^2 X_3^2) \ ;
\end{aligned}
$$

$$[9] \ldots\ldots\ldots \quad G = X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 \ ;$$

et remarquant que

$$[10] \ldots\ldots\ldots \quad X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = -r \ :$$

l'on aura

$$[11] \ldots\ldots\ldots \quad \Pi = G - 120 \cdot r + 20 \cdot P + 30 \cdot Q \ .$$

Les expressions de ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV} sont données par les équations suivantes :

$$\xi^{\mathrm{I}} = 5 \cdot R_1 + 20 \cdot R_2 + 60 \cdot R_3 + 30 \cdot R_4 + 10 \cdot R_5 \ ;$$

$$[12] \ldots \begin{cases} R_1 = X_1 \cdot X_2^4 + X_2 \cdot X_3^4 + X_3 \cdot X_4^4 + X_4 \cdot X_5^4 + X_5 \cdot X_1^4 \ ; \\ R_2 = X_1^3 \cdot X_3 X_5 + X_2^3 \cdot X_4 X_1 + X_3^3 \cdot X_5 X_2 + X_4^3 \cdot X_1 X_3 + X_5^3 \cdot X_2 X_4 \ ; \\ R_3 = X_1^2 \cdot X_2 X_3 X_4 + X_2^2 \cdot X_3 X_4 X_5 + X_3^2 \cdot X_4 X_5 X_1 + X_4^2 \cdot X_5 X_1 X_2 + X_5^2 X_1 X_2 X_3 \ ; \\ R_4 = X_1 \cdot X_2^2 X_3^2 + X_2 \cdot X_3^2 X_4^2 + X_3 \cdot X_4^2 X_5^2 + X_4 \cdot X_5^2 X_1^2 + X_5 \cdot X_1^2 X_2^2 \ ; \\ R_5 = X_1^2 \cdot X_3^3 + X_2^2 \cdot X_4^3 + X_3^2 \cdot X_5^3 + X_4^2 \cdot X_1^3 + X_5^2 \cdot X_2^3 \ . \end{cases}$$

$$\xi^{\mathrm{II}} = 5 \cdot R_1' + 20 \cdot R_2' + 60 \cdot R_3' + 30 \cdot R_4' + 10 \cdot R_5' \ .$$

$$[13] \ldots \begin{cases} R_1' = X_1 \cdot X_4^4 + X_2 \cdot X_5^4 + X_3 \cdot X_1^4 + X_4 \cdot X_2^4 + X_5 \cdot X_3^4 \ ; \\ R_2' = X_1^3 \cdot X_4 X_5 + X_2^3 \cdot X_1 X_5 + X_3^3 \cdot X_1 X_2 + X_4^3 \cdot X_2 X_3 + X_5^3 \cdot X_3 X_4 \ ; \\ R_3' = X_1^2 \cdot X_2 X_3 X_5 + X_2^2 \cdot X_1 X_3 X_4 + X_3^2 \cdot X_2 X_4 X_5 + X_4^2 \cdot X_1 X_3 X_5 + X_5^2 \cdot X_1 X_2 X_4 \ ; \\ R_4' = X_1 \cdot X_3^2 X_5^2 + X_2 \cdot X_1^2 X_4^2 + X_3 \cdot X_2^2 X_5^2 + X_4 \cdot X_1^2 X_3^2 + X_5 \cdot X_2^2 X_4^2 \ ; \\ R_5' = X_1^2 \cdot X_5^3 + X_2^2 \cdot X_1^3 + X_3^2 \cdot X_2^3 + X_4^2 \cdot X_3^3 + X_5^2 \cdot X_4^3 \ . \end{cases}$$

$$\xi''' = 5\,R_1'' + 20\,R_2'' + 60\,R_3'' + 20\,R_4'' + 10\,R_5'' \;;$$

$$R_1'' = X_1X_3^4 + X_2X_4^4 + X_3X_5^4 + X_4X_1^4 + X_5X_2^4 \;;$$

$$R_2'' = X_1^3X_2X_3 + X_2^3X_3X_4 + X_3^3X_4X_5 + X_4^3X_1X_5 + X_5^3X_1X_2 \;;$$

[14]... $$R_3'' = X_1^2X_2X_4X_5 + X_2^2X_1X_3X_5 + X_3^2X_1X_2X_4 + X_4^2X_1X_3X_5 + X_5^2X_1X_3X_4 \;;$$

$$R_4'' = X_1X_2^2X_4^2 + X_2X_3^2X_5^2 + X_3X_1^2X_4^2 + X_4X_2^2X_5^2 + X_5X_1^2X_3^2 \;;$$

$$R_5'' = X_1^2X_2^3 + X_2^2X_3^3 + X_3^2X_4^3 + X_4^2X_5^3 + X_5^2X_1^3 \;.$$

$$\xi^{IV} = 5\,R_1''' + 20\,R_2''' + 60\,R_3''' + 30\,R_4''' + 10\,R_5''' \;:$$

$$R_1''' = X_1X_2^4 + X_2X_3^4 + X_3X_4^4 + X_4X_5^4 + X_5X_1^4 \;;$$

$$R_2''' = X_1^3X_2X_4 + X_2^3X_3X_5 + X_3^3X_1X_4 + X_4^3X_2X_5 + X_5^3X_1X_3 \;;$$

[15]... $$R_3''' = X_1^2X_3X_4X_5 + X_2^2X_1X_4X_5 + X_3^2X_1X_2X_5 + X_4^2X_1X_2X_3 + X_5^2X_2X_3X_4 \;;$$

$$R_4''' = X_1X_4^2X_5^2 + X_2X_1^2X_5^2 + X_3X_1^2X_2^2 + X_4X_2^2X_3^2 + X_5X_3^2X_4^2 \;:$$

$$R_5''' = X_1^2X_4^3 + X_2^2X_5^3 + X_3^2X_1^3 + X_4^2X_2^3 + X_5^2X_3^3 \;.$$

C'est avec les vingt fonctions $R_1 \ldots\ldots R_5$; $R_1' \ldots\ldots R_5'$; $R_1'' \ldots\ldots R_5''$; $R_1''' \ldots\ldots R_5'''$, que l'on doit former le second membre des équations [14] du § précédent.

§ IV.

Il faut d'abord observer, que le produit $\xi^{I}\xi^{IV}$ est tel que l'on a :

$$[1] \ldots\ldots \quad \xi^{I}\xi^{IV} =$$

$$\begin{aligned}
&25\,R_1R_1''' + 400\,R_2R_2''' + 3600\,R_3R_3''' + 900\,R_4R_4''' \\
+\ &50\,(R_1R_5''' + R_5R_1''') + 150\,(R_1R_4''' + R_4R_1''') \\
+\ &200\,(R_2R_5''' + R_5R_2''') + 1200\,(R_2R_3''' + R_3R_2''') \\
+\ &1800\,(R_3R_4''' + R_4R_3''') + 100\,(R_2R_1''' + R_1R_2''' + R_5R_5''') \\
+\ &300\,(R_1R_3''' + R_3R_1''' + R_4R_5''' + R_5R_4''') \\
+\ &600\,(R_2R_4''' + R_4R_2''' + R_3R_5''' + R_5R_3''') \,.
\end{aligned}$$

En écrivant $R_1', R_2' \ldots\ldots R_5'$, au lieu de $R_1, R_2 \ldots\ldots R_5$; et $R_1'' \ldots\ldots R_5''$, au lieu de $R_1''' \ldots\ldots R_5'''$, cette formule donnera la valeur du produit $\xi^{II}\xi^{III}$.

Cela posé, l'on aura

$$[2] \ldots\ldots \quad \Pi' =$$

$$\begin{aligned}
&25\,T_{(1)} + 400\,T_{(2)} + 3600\,T_{(3)} + 900\,T_{(4)} + 50\,T_{(5)} \\
+\ &150\,T_{(6)} + 200\,T_{(7)} + 1200\,T_{(8)} + 1800\,T_{(9)} + 100\,T_{(10)} \\
+\ &300\,T_{(11)} + 600\,T_{(12)} \,,
\end{aligned}$$

après avoir fait pour plus de simplicité ;

$$T_{(1)} = R_1R_1''' + R_1'R_1'' \,;$$

$$T_{(2)} = R_2R_2''' + R_2'R_2'' \,;$$

$$T_{(3)} = R_3R_3''' + R_3'R_3'' \,;$$

$$T_{(4)} = R_4R_4''' + R_4'R_4'' \,;$$

$$T_{(5)} = (R_1 R_5''' + R_5 R_1''') + (R_1' R_5'' + R_5' R_1'') \ ;$$

$$T_{(6)} = (R_1 R_4''' + R_4 R_1''') + (R_1' R_4'' + R_4' R_1'') \ ;$$

$$T_{(7)} = (R_2 R_5''' + R_5 R_2''') + (R_2' R_5'' + R_5' R_2'') \ ;$$

$$T_{(8)} = (R_2 R_3''' + R_3 R_2''') + (R_2' R_3'' + R_3' R_2'') \ ;$$

$$T_{(9)} = (R_3 R_4''' + R_4 R_3''') + (R_3' R_4'' + R_4' R_3'') \ ;$$

$$T_{(10)} = (R_2 R_1''' + R_1 R_2''' + R_5 R_5''') + (R_2' R_1'' + R_1' R_2'' + R_5' R_5'') \ :$$

$$T_{(11)} = (R_1 R_3''' + R_3 R_1''' + R_4 R_5''' + R_5 R_4''') + (R_1' R_3'' + R_3' R_1'' + R_4' R_5'' + R_5' R_4'') \ :$$

$$T_{(12)} = (R_2 R_4''' + R_4 R_2''' + R_3 R_5''' + R_5 R_3''') + (R_2' R_4'' + R_4' R_2'' + R_3' R_5'' + R_5' R_3'') \ .$$

Avec la formule [1] on obtient;

$$[3] \ldots\ldots \quad \xi^{1\,2} =$$

$$25 R_1^2 + 400 R_2^2 + 3600 R_3^2 + 900 R_4^2 + 50 (2 R_1 R_5) + 150 (2 R_1 R_4) + 200 (2 R_2 R_5) + 1200 (2 R_2 R_3) + 1800 (2 R_3 R_4) + 100 (2 R_2 R_1 + R_5^2) + 300 (2 R_1 R_3 + 2 R_4 R_5) + 600 (2 R_2 R_4 + 2 R_3 R_5) \ .$$

Et par le changement de R_1, R_2 etc. en R_1''', R_2''' etc. on tirera de là la valeur de $\xi^{IV\,2}$. Ensuite on trouvera

$$[4] \ldots\ldots \quad \xi^{I}\xi^{II} + \xi^{IV\,2} =$$

$$25 Y_{(1)} + 400 Y_{(2)} + 3600 Y_{(3)} + 900 Y_{(4)} + 50 Y_{(5)} + 150 Y_{(6)} + 200 Y_{(7)} + 1200 Y_{(8)} + 1800 Y_{(9)} + 100 Y_{(10)} + 300 Y_{(11)} + 600 Y_{(12)} \ ;$$

$$[5] \ldots\ldots \quad \xi^{III}\xi^{IV} + \xi^{1\,2} =$$

$$25 Y'_{(1)} + 400 Y'_{(2)} + 3600 Y'_{(3)} + 900 Y'_{(4)} + 50 Y'_{(5)} + 150 Y'_{(6)} + 200 Y'_{(7)} + 1200 Y'_{(8)} + 1800 Y'_{(9)} + 100 Y'_{(10)} + 300 Y'_{(11)} + 600 Y'_{(12)} \ ;$$

après avoir fait ;

$$\Theta_{(1)} = R_1 R_1' + R_1'''^2 \ ;$$

$$\Theta_{(2)} = R_2 R_2' + R_2'''^2 \ ;$$

$$\Theta_{(3)} = R_3 R_3' + R_3'''^2 \ ;$$

$$\Theta_{(4)} = R_4 R_4' + R_4'''^2 \ ;$$

$$\Theta_{(5)} = R_1 R_5' + R_5 R_1' + 2 R_1''' R_5''' \ ;$$

$$\Upsilon_{(6)} = R_1 R_4' + R_4 R_1' + 2 R_1''' R_4''' \ ;$$

$$\Upsilon_{(7)} = R_2 R_5' + R_5 R_2' + 2 R_2''' R_5''' \ ;$$

$$\Theta_{(8)} = R_2 R_3' + R_3 R_2' + 2 R_2''' R_3''' \ ;$$

$$\Upsilon_{(9)} = R_3 R_4' + R_4 R_3' + 2 R_3''' R_4''' \ ;$$

$$\Theta_{(10)} = R_2 R_1 + R_2' R_1 + R_5' R_5 + 2 R_2''' R_1''' + R_5'''^2 \ ;$$

$$\Upsilon_{(11)} = R_1 R_3' + R_3 R_1' + R_4 R_5' + R_5 R_1' + 2 R_1''' R_3''' + 2 R_4''' R_5''' \ ;$$

$$\Upsilon_{(12)} = R_2 R_4' + R_4 R_2' + R_3 R_5' + R_5 R_3' + 2 R_2''' R_4''' + 2 R_3''' R_4''' \ .$$

$$\Upsilon'_{(1)} = R_1'' R_1''' + R_1'^2 \ ;$$

$$\Upsilon'_{(2)} = R_2'' R_2''' + R_2'^2 \ ;$$

$$\Upsilon'_{(3)} = R_3'' R_3''' + R_3'^2 \ ;$$

$$\Upsilon'_{(4)} = R_4'' R_4''' + R_4'^2 \ ;$$

$$\Upsilon'_{(5)} = R_1'' R_5''' + R_5'' R_1''' + 2 R_1' R_5' \ ;$$

$$\Upsilon'_{(6)} = R_1'' R_4''' + R_4'' R_1''' + 2 R_1' R_4' \ ;$$

$$\Upsilon'_{(7)} = R_2'' R_5''' + R_5'' R_2''' + 2 R_2' R_5' \ ;$$

$$\Theta'_{(8)} = R_2'' R_3''' + R_3'' R_2''' + 2 R_2' R_3' \ ;$$

$$\Theta'_{(9)} = R_3'' R_4''' + R_4'' R_3''' + 2 R_3' R_4' \ ;$$

$$\Upsilon'_{(10)} = R_2'' R_1''' + R_1'' R_2''' + R_5'' R_5''' + 2 R_2' R_1' + R_5'^2 \ ;$$

$$\Upsilon'_{(11)} = R_1'' R_3''' + R_3'' R_1''' + R_4'' R_5''' + R_5'' R_4''' + 2 R_1' R_3' + 2 R_4' R_5' \ ;$$

$$\Upsilon'_{(12)} = R_2'' R_4''' + R_4'' R_2''' + R_3'' R_5''' + R_5'' R_3''' + 2 R_2' R_4' + 2 R_3' R_5' \ .$$

Maintenant si l'on forme l'expression de Π'' conformément à la seconde des équations [14] du second §, l'on aura

$$[6] \ldots\ldots \quad \Pi'' =$$

$$\left.\begin{array}{l} 125\,U_{(1)} + 2000\,U'_{(1)} + 18000\,U_{(2)} + 4500\,U'_{(2)} \\ + 250\,U_{(3)} + 750\,U'_{(3)} + 1000\,U_{(4)} + 6000\,U'_{(4)} \\ + 9000\,U_{(5)} + 500\,U'_{(5)} + 150\,U_{(6)} + 3000\,U'_{(6)} \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} 250\,U_{(7)} + 8000\,U'_{(7)} + 72000\,U_{(8)} + 18000\,U'_{(8)} \\ + 1000\,U_{(9)} + 3000\,U'_{(9)} + 4000\,U_{(10)} + 24000\,U'_{(10)} \\ + 36000\,U_{(11)} + 2000\,U'_{(11)} + 6000\,U_{(12)} + 12000\,U'_{(12)} \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} 1500\,U_{(13)} + 24000\,U'_{(13)} + 216000\,U_{(14)} + 54000\,U'_{(14)} \\ + 3000\,U_{(15)} + 9000\,U'_{(15)} + 12000\,U_{(16)} + 72000\,U'_{(16)} \\ + 108000\,U_{(17)} + 6000\,U'_{(17)} + 18000\,U_{(18)} + 36000\,U'_{(18)} \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} 750\,U_{(19)} + 12000\,U'_{(19)} + 108000\,U_{(20)} + 27000\,U'_{(20)} \\ + 1500\,U_{(21)} + 4500\,U'_{(21)} + 6000\,U_{(22)} + 36000\,U'_{(22)} \\ + 54000\,U_{(23)} + 3000\,U'_{(23)} + 9000\,U_{(24)} + 18000\,U'_{(24)} \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} 250\,U_{(25)} + 4000\,U'_{(25)} + 36000\,U_{(26)} + 9000\,U'_{(26)} \\ + 500\,U_{(27)} + 1500\,U'_{(27)} + 2000\,U_{(28)} + 12000\,U'_{(28)} \\ + 18000\,U_{(29)} + 1000\,U'_{(29)} + 3000\,U_{(30)} + 6000\,U'_{(30)} \end{array}\right\};$$

où l'on a fait

$$U_{(1)} = R_1' Y_{(1)} + R_1'' Y'_{(1)} ; \qquad U'_{(1)} = R_1' Y_{(2)} + R_1'' Y'_{(2)} ;$$

$$U_{(2)} = R_1' Y_{(3)} + R_1'' Y'_{(3)} ; \qquad U'_{(2)} = R_1' Y_{(4)} + R_1'' Y'_{(4)} ;$$

$$U_{(3)} = R_1' Y_{(5)} + R_1'' Y'_{(5)} ; \qquad U'_{(3)} = R_1' Y_{(6)} + R_1'' Y'_{(6)} ;$$

$$U_{(4)} = R_1' Y_{(7)} + R_1'' Y'_{(7)} ; \qquad U'_{(4)} = R_1' Y_{(8)} + R_1'' Y'_{(8)} ;$$

$$U_{(5)} = R_1' Y_{(9)} + R_1'' Y'_{(9)} ; \qquad U'_{(5)} = R_1' Y_{(10)} + R_1'' Y'_{(10)} ;$$

$$U_{(6)} = R_1' Y_{(11)} + R_1'' Y'_{(11)} \; ; \qquad U'_{(6)} = R_1' Y_{(12)} + R_1'' Y'_{(12)} \; ;$$

$$U_{(7)} = R_2' Y_{(1)} + R_2'' Y'_{(1)} \; ; \qquad U'_{(7)} = R_2' Y_{(2)} + R_2'' Y'_{(2)} \; ;$$

$$U_{(8)} = R_2' Y_{(3)} + R_2'' Y'_{(3)} \; ; \qquad U'_{(8)} = R_2' Y_{(4)} + R_2'' Y'_{(4)} \; ;$$

$$U_{(9)} = R_2' Y_{(5)} + R_2'' Y'_{(5)} \; ; \qquad U'_{(9)} = R_2' Y_{(6)} + R_2'' Y'_{(6)} \; ;$$

$$U_{(10)} = R_2' Y_{(7)} + R_2'' Y'_{(7)} \; ; \qquad U'_{(10)} = R_2' Y_{(8)} + R_2'' Y'_{(8)} \; ;$$

$$U_{(11)} = R_2' Y_{(9)} + R_2'' Y'_{(9)} \; ; \qquad U'_{(11)} = R_2' Y_{(10)} + R_2'' Y'_{(10)} \; ;$$

$$U_{(12)} = R_2' Y_{(11)} + R_2'' Y'_{(11)} \; ; \qquad U'_{(12)} = R_2' Y_{(12)} + R_2'' Y'_{(12)} \; ;$$

$$U_{(13)} = R_3' Y_{(1)} + R_3'' Y'_{(1)} \; ; \qquad U'_{(13)} = R_3' Y_{(2)} + R_3'' Y'_{(2)} \; ;$$

$$U_{(14)} = R_3' Y_{(3)} + R_3'' Y'_{(3)} \; ; \qquad U'_{(14)} = R_3' Y_{(4)} + R_3'' Y'_{(4)} \; ;$$

$$U_{(15)} = R_3' Y_{(5)} + R_3'' Y'_{(5)} \; ; \qquad U'_{(15)} = R_3' Y_{(6)} + R_3'' Y'_{(6)} \; ;$$

$$U_{(16)} = R_3' Y_{(7)} + R_3'' Y'_{(7)} \; ; \qquad U'_{(16)} = R_3' Y_{(8)} + R_3'' Y'_{(8)} \; ;$$

$$U_{(17)} = R_3' Y_{(9)} + R_3'' Y'_{(9)} \; ; \qquad U'_{(17)} = R_3' Y_{(10)} + R_3'' Y'_{(10)} \; ;$$

$$U_{(18)} = R_3' Y_{(11)} + R_3'' Y'_{(11)} \; ; \qquad U'_{(18)} = R_3' Y_{(12)} + R_3'' Y'_{(12)} \; ;$$

$$U_{(19)} = R_4' Y_{(1)} + R_4'' Y'_{(1)} \; ; \qquad U'_{(19)} = R_4' Y_{(2)} + R_4'' Y'_{(2)} \; ;$$

$$U_{(20)} = R_4' Y_{(3)} + R_4'' Y'_{(3)} \; ; \qquad U'_{(20)} = R_4' Y_{(4)} + R_4'' Y'_{(4)} \; ;$$

$$U_{(21)} = R_4' Y_{(5)} + R_4'' Y'_{(5)} \; ; \qquad U'_{(21)} = R_4' Y_{(6)} + R_4'' Y'_{(6)} \; ;$$

$$U_{(22)} = R_4' Y_{(7)} + R_4'' Y'_{(7)} \; ; \qquad U'_{(22)} = R_4' Y_{(8)} + R_4'' Y'_{(8)} \; ;$$

$$U_{(23)} = R_4' Y_{(9)} + R_4'' Y'_{(9)} \; ; \qquad U'_{(23)} = R_4' Y_{(10)} + R_4'' Y'_{(10)} \; ;$$

$$U_{(24)} = R_4' Y_{(11)} + R_4'' Y'_{(11)} \; ; \qquad U'_{(24)} = R_4' Y_{(12)} + R_4'' Y'_{(12)} \; ;$$

$$U_{(25)} = R_5' Y_{(1)} + R_5'' Y'_{(1)} \; ; \qquad U'_{(25)} = R_5' Y_{(2)} + R_5'' Y'_{(2)} \; ;$$

$$U_{(26)} = R_5' Y_{(3)} + R_5'' Y'_{(3)} \; ; \qquad U'_{(26)} = R_5' Y_{(4)} + R_5'' Y'_{(4)} \; ;$$

$$U_{(27)} = R_5' Y_{(5)} + R_5'' Y'_{(5)} \; ; \qquad U'_{(27)} = R_5' Y_{(6)} + R_5'' Y'_{(6)} \; ;$$

$$U_{(28)} = R_5' Y_{(7)} + R_5'' Y'_{(7)} \; ; \qquad U'_{(28)} = R_5' Y_{(8)} + R_5'' Y'_{(8)} \; ;$$

$$U_{(29)} = R_5' Y_{(9)} + R_5'' Y'_{(9)} \; ; \qquad U'_{(29)} = R_5' Y_{(10)} + R_5'' Y'_{(10)} \; ;$$

$$U_{(30)} = R_5' Y_{(11)} + R_5'' Y'_{(11)} \; ; \qquad U'_{(30)} = R_5' Y_{(12)} + R_5'' Y'_{(12)} \; .$$

Pour former l'expression de Π^{III} il faut d'abord établir les équations suivantes :

$$[7] \ldots\ldots \quad \xi^{III\,3} + \xi^{II}\xi^{I\,2} =$$

$$\begin{aligned}
&125\,V_{(1)} + 2000\,V_{(2)} + 18000\,V_{(3)} + 4500\,V_{(4)} + 250\,V_{(5)} \\
&+ 750\,V_{(6)} + 1000\,V_{(7)} + 6000\,V_{(8)} + 9000\,V_{(9)} + 500\,V_{(10)} \\
&+ 1500\,V_{(11)} + 3000\,V_{(12)} + 500\,V_{(13)} + 8000\,V_{(14)} + 72000\,V_{(15)} \\
&+ 18000\,V_{(16)} + 1000\,V_{(17)} + 3000\,V_{(18)} + 4000\,V_{(19)} + 24000\,V_{(20)} \\
&+ 36000\,V_{(21)} + 2000\,V_{(22)} + 6000\,V_{(23)} + 12000\,V_{(24)} + 1500\,V_{(25)} \\
&+ 24000\,V_{(26)} + 216000\,V_{(27)} + 54000\,V_{(28)} + 3000\,V_{(29)} + 9000\,V_{(30)} \\
&+ 12000\,V_{(31)} + 72000\,V_{(32)} + 108000\,V_{(33)} + 6000\,V_{(34)} + 18000\,V_{(35)} \\
&+ 36000\,V_{(36)} + 750\,V_{(37)} + 12000\,V_{(38)} + 108000\,V_{(39)} + 27000\,V_{(40)} \\
&+ 1500\,V_{(41)} + 4500\,V_{(42)} + 6000\,V_{(43)} + 36000\,V_{(44)} + 54000\,V_{(45)} \\
&+ 3000\,V_{(46)} + 9000\,V_{(47)} + 18000\,V_{(48)} + 250\,V_{(49)} + 4000\,V_{(50)} \\
&+ 36000\,V_{(51)} + 9000\,V_{(52)} + 500\,V_{(53)} + 1500\,V_{(54)} + 2000\,V_{(55)} \\
&+ 12000\,V_{(56)} + 18000\,V_{(57)} + 1000\,V_{(58)} + 3000\,V_{(59)} + 6000\,V_{(60)} .
\end{aligned}$$

$$[8] \ldots\ldots \quad \xi^{II\,3} + \xi^{III}\xi^{IV\,2} =$$

$$125\,V'_{(1)} + 2000\,V'_{(2)} + 18000\,V'_{(3)} + 4500\,V'_{(4)} + 250\,V'_{(5)}$$

$+$ etc.

Les coefficiens numériques sont les mêmes dans ces deux équations, où l'on a fait ;

$$V_{(1)} = R_1' R_1^2 + R_1''^3 \ ;$$

$$V_{(2)} = R_1' R_2^2 + R_1'' R_2''^2 \ ;$$

$$V_{(3)} = R_1' R_3^2 + R_1'' R_3''^2 \ ;$$

$$V_{(4)} = R_1' R_4^2 + R_1'' R_4''^2 \ ;$$

$$V_{(5)} = 2R_1'R_1R_5 + 2R_1''^2R_5'' \;;$$

$$V_{(6)} = 2R_1'R_1R_4 + 2R_1''^2R_4'' \;;$$

$$V_{(7)} = 2R_1'R_2R_5 + 2R_1''R_2''R_5'' \;;$$

$$V_{(8)} = 2R_1'R_2R_3 + 2R_1''R_2''R_3'' \;;$$

$$V_{(9)} = 2R_1'R_3R_4 + 2R_1''R_3''R_4'' \;;$$

$$V_{(10)} = 2R_1'R_1R_2 + R_1'R_5^2 + 2R_1''^2R_2'' + R_1''R_5''^2 \;;$$

$$V_{(11)} = 2R_1'R_1R_3 + 2R_1'R_4R_5 + 2R_1''^2R_3'' + 2R_1''R_4''R_5'' \;;$$

$$V_{(12)} = 2R_1'R_2R_4 + 2R_1'R_3R_5 + 2R_1''R_2''R_4'' + 2R_1''R_3''R_5'' \;;$$

$$V_{(13)} = R_2'R_1^2 + R_2''R_1''^2 \;;$$

$$V_{(14)} = R_2'R_2^2 + R_2''^3 \;;$$

$$V_{(15)} = R_2'R_3^2 + R_2''R_3''^2 \;;$$

$$V_{(16)} = R_2'R_4^2 + R_2''R_4''^2 \;;$$

$$V_{(17)} = 2R_2'R_1R_3 + 2R_2''R_1''R_3'' \;;$$

$$V_{(18)} = 2R_2'R_1R_4 + 2R_2''R_1''R_4'' \;;$$

$$V_{(19)} = 2R_2'R_2R_5 + 2R_2''^2R_5'' \;;$$

$$V_{(20)} = 2R_2'R_2R_3 + 2R_2''^2R_3'' \;;$$

$$V_{(21)} = 2R_2'R_3R_4 + 2R_2''R_3''R_4'' \;;$$

$$V_{(22)} = 2R_2'R_2R_1 + R_2'R_5^2 + 2R_2''^2R_1'' + R_2''R_5''^2 \;;$$

$$V_{(23)} = 2R_2'R_1R_3 + 2R_2'R_4R_5 + 2R_2''R_1''R_3'' + 2R_2''R_4''R_5'' \;;$$

$$V_{(24)} = 2R_2'R_1R_4 + 2R_2R_1R_5 + 2R_2''R_1''R_4'' + 2R_2''R_1''R_5'' \;;$$

$$V_{(25)} = R_3'R_1^2 + R_3''R_1''^2 \;;$$

$$V_{(26)} = R_3'R_2^2 + R_3''R_2''^2 \;;$$

$$V_{(27)} = R_3'R_3^2 + R_3''R_3''^2 \;;$$

$$V_{(28)} = R_3'R_4^2 + R_3''R_4''^2 \;;$$

$$V_{(29)} = 2\,R_3'\,R_1\,R_5 + 2\,R_3''\,R_1''\,R_5'' \;;$$

$$V_{(30)} = 2\,R_3'\,R_1\,R_4 + 2\,R_3''\,R_1''\,R_4'' \;;$$

$$V_{(31)} = 2\,R_3'\,R_2\,R_5 + 2\,R_3''^{\,2}\,R_5'' \;;$$

$$V_{(32)} = 2\,R_3'\,R_2\,R_3 + 2\,R_3''^{\,2}\,R_2'' \;;$$

$$V_{(33)} = 2\,R_3'\,R_3\,R_4 + 2\,R_3''^{\,2}\,R_4'' \;;$$

$$V_{(34)} = 2\,R_3'\,R_2\,R_1 + R_3'\,R_2^{\,2} + 2\,R_3''\,R_2''\,R_1'' + R_3''\,R_1''^{\,2} \;;$$

$$V_{(35)} = 2\,R_3'\,R_1\,R_3 + 2\,R_3'\,R_4\,R_5 + 2\,R_1''\,R_3''^{\,2} + 2\,R_3''\,R_4''\,R_5'' \;;$$

$$V_{(36)} = 2\,R_3'\,R_2\,R_4 + 2\,R_3'\,R_3\,R_5 + 2\,R_3''\,R_2''\,R_4'' + 2\,R_5''\,R_3''^{\,2} \;;$$

$$V_{(37)} = R_4'\,R_1^{\,2} + R_4''\,R_1''^{\,2} \;;$$

$$V_{(38)} = R_4'\,R_2^{\,2} + R_4''\,R_2''^{\,2} \;;$$

$$V_{(39)} = R_4'\,R_3^{\,2} + R_4''\,R_3''^{\,2} \;;$$

$$V_{(40)} = R_4'\,R_4^{\,2} + R_4''^{\,3} \;;$$

$$V_{(41)} = 2\,R_4'\,R_1\,R_5 + 2\,R_4''\,R_1''\,R_5'' \;;$$

$$V_{(42)} = 2\,R_4'\,R_1\,R_4 + 2\,R_1''\,R_4''^{\,2} \;;$$

$$V_{(43)} = 2\,R_4'\,R_2\,R_5 + 2\,R_4''\,R_2''\,R_5'' \;;$$

$$V_{(44)} = 2\,R_4'\,R_2\,R_3 + 2\,R_4''\,R_2''\,R_3'' \;;$$

$$V_{(45)} = 2\,R_4'\,R_3\,R_4 + 2\,R_3''\,R_4''^{\,2} \;;$$

$$V_{(46)} = 2\,R_4'\,R_2\,R_1 + R_4'\,R_2^{\,2} + 2\,R_4''\,R_2''\,R_1'' + R_1''\,R_2''^{\,2} \;;$$

$$V_{(47)} = 2\,R_4'\,R_1\,R_3 + 2\,R_4'\,R_4\,R_5 + 2\,R_4''\,R_1''\,R_3'' + 2\,R_5''\,R_4''^{\,2} \;;$$

$$V_{(48)} = 2\,R_4'\,R_2\,R_4 + 2\,R_4'\,R_3\,R_5 + 2\,R_2''\,R_4''^{\,2} + 2\,R_4''\,R_3''\,R_5'' \;;$$

$$V_{(49)} = R_5'\,R_1^{\,2} + R_5''\,R_1''^{\,2} \;;$$

$$V_{(50)} = R_5'\,R_2^{\,2} + R_5''\,R_2''^{\,2} \;;$$

$$V_{(51)} = R_5'\,R_3^{\,2} + R_5''\,R_3''^{\,2} \;;$$

$$V_{(52)} = R_5'\,R_4^{\,2} + R_5''\,R_4''^{\,2} \;;$$

$$V_{(53)} = 2R_5' R_1 R_5 + 2R_1'' R_5''^2 \ ;$$

$$V_{(54)} = 2R_5' R_1 R_4 + 2R_5'' R_1'' R_4'' \ ;$$

$$V_{(55)} = 2R_5' R_2 R_5 + 2R_2'' R_5''^2 \ ;$$

$$V_{(56)} = 2R_5' R_2 R_3 + 2R_5'' R_2'' R_3'' \ ;$$

$$V_{(57)} = 2R_5' R_3 R_4 + 2R_5'' R_3'' R_4'' \ ;$$

$$V_{(58)} = 2R_5' R_2 R_1 + R_5' R_5^2 + 2R_5'' R_2'' R_1'' + R_5''^3 \ :$$

$$V_{(59)} = 2R_5' R_1 R_3 + 2R_5' R_4 R_5 + 2R_5'' R_1'' R_3'' + 2R_4'' R_5''^2 \ ;$$

$$V_{(60)} = 2R_5' R_2 R_4 + 2R_5' R_3 R_5 + 2R_5'' R_2'' R_4'' + 2R_3'' R_2''^2 \ .$$

$$V'_{(1)} = R_1'' R_1'''^2 + R_1'^3 \ ;$$

$$V'_{(2)} = R_1'' R_2'''^2 + R_1' R_2'^2 \ ;$$

$$V'_{(3)} = R_1'' R_3'''^2 + R_1' R_3'^2 \ ;$$

$$V'_{(4)} = R_1'' R_4'''^2 + R_1' R_4'^2 \ ;$$

$$V'_{(5)} = 2R_1'' R_1''' R_5''' + 2R_5' R_1'^2 \ ;$$

$$V'_{(6)} = 2R_1'' R_1''' R_4''' + 2R_4' R_1'^2 \ ;$$

$$V'_{(7)} = 2R_1'' R_2''' R_5''' + 2R_1' R_2' R_5' \ ;$$

$$V'_{(8)} = 2R_1'' R_2''' R_3''' + 2R_1' R_2' R_3' \ ;$$

$$V'_{(9)} = 2R_1'' R_3''' R_4''' + 2R_1' R_3' R_4' \ ;$$

$$V'_{(10)} = 2R_1'' R_2''' R_1''' + R_1'' R_5'''^2 + 2R_2' R_1'^2 + R_1' R_5'^2 \ ;$$

$$V'_{(11)} = 2R_1'' R_1''' R_3''' + 2R_1'' R_4''' R_5''' + 2R_3' R_1'^2 + 2R_1' R_4' R_5' \ ;$$

$$V'_{(12)} = 2R_1'' R_2''' R_4''' + 2R_1'' R_3''' R_5''' + 2R_1' R_2' R_4' + 2R_1' R_3' R_5' \ ;$$

$$V'_{(13)} = R_2'' R_1'''^2 + R_2' R_1'^2 \ ;$$

$$V'_{(14)} = R_2'' R_2'''^2 + R_3'^2 \ ;$$

$$V'_{(15)} = R_2'' R_3'''^2 + R_2' R_3'^2 \ ;$$

$$V'_{(16)} = R_2'' R_4'''^2 + R_2' R_4'^2 \ ;$$

$$V'_{(17)} = 2R_2''R_1'''R_5''' + 2R_2'R_1'R_5' \;;$$

$$V'_{(18)} = 2R_2''R_1'''R_4''' + 2R_2'R_1'R_4' \;;$$

$$V'_{(19)} = 2R_2''R_2'''R_5''' + 2R_2'R_2'^2 \;;$$

$$V'_{(20)} = 2R_2''R_2'''R_3''' + 2R_2'R_2'^2 \;;$$

$$V'_{(21)} = 2R_2''R_3'''R_4''' + 2R_2'R_3'R_4' \;;$$

$$V'_{(22)} = 2R_2''R_2'''R_1''' + 2R_1'R_2'^2 + R_2''R_5'''^2 + R_2'R_5'^2 \;;$$

$$V'_{(23)} = 2R_2''R_1'''R_3''' + 2R_2''R_4'''R_5''' + 2R_2'R_1'R_3' + 2R_2'R_4'R_5' \;;$$

$$V'_{(24)} = 2R_2''R_2'''R_4''' + 2R_2''R_3'''R_5''' + 2R_4'R_2'^2 + 2R_2'R_3'R_5' \;;$$

$$V'_{(25)} = R_3''R_1'''^2 + R_3'R_1'^2 \;;$$

$$V'_{(26)} = R_3''R_2'''^2 + R_3'R_2'^2 \;;$$

$$V'_{(27)} = R_3''R_2'''^2 + R_3'R_2'^2 \;;$$

$$V'_{(28)} = R_3''R_4'''^2 + R_3'R_4'^2 \;;$$

$$V'_{(29)} = 2R_3''R_1'''R_5''' + 2R_3'R_1'R_5' \;;$$

$$V'_{(30)} = 2R_3''R_1'''R_4''' + 2R_3'R_1'R_4' \;;$$

$$V'_{(31)} = 2R_3''R_2'''R_5''' + 2R_3'R_2'R_5' \;;$$

$$V'_{(32)} = 2R_3''R_2'''R_3''' + 2R_2'R_3'^2 \;;$$

$$V'_{(33)} = 2R_3''R_3'''R_4''' + 2R_4'R_3'^2 \;;$$

$$V'_{(34)} = 2R_3''R_2'''R_1''' + R_3''R_5'''^2 + 2R_3'R_2'R_1' + R_3'R_5'^2 \;;$$

$$V'_{(35)} = 2R_3''R_1'''R_3''' + 2R_3''R_4'''R_5''' + 2R_1'R_3'^2 + 2R_3'R_4'R_5' \;;$$

$$V'_{(36)} = 2R_3''R_2'''R_4''' + 2R_3''R_3'''R_5''' + 2R_3'R_2'R_4' + 2R_5'R_3'^2 \;;$$

$$V'_{(37)} = R_4''R_1'''^2 + R_4'R_1'^2 \;;$$

$$V'_{(38)} = R_4''R_2'''^2 + R_4'R_2'^2 \;;$$

$$V'_{(39)} = R_4''R_3'''^2 + R_4'R_3'^2 \;;$$

$$V'_{(40)} = R_4''R_4'''^2 + R_4'^3 \;;$$

$$V'_{(41)} = 2R_4'' R_1''' R_5''' + 2R_4' R_1' R_5' ;$$

$$V'_{(42)} = 2R_4'' R_1''' R_4''' + 2R_1' R_1'^2 ,$$

$$V'_{(43)} = 2R_4'' R_2''' R_5''' + 2R_4' R_2' R_5' ;$$

$$V'_{(44)} = 2R_4'' R_2''' R_3''' + 2R_1' R_2' R_3' ;$$

$$V'_{(45)} = 2R_4'' R_3''' R_4''' + 2R_3' R_4'^2 ;$$

$$V'_{(46)} = 2R_4'' R_2''' R_1''' + R_4'' R_5'''^2 + 2R_4' R_2' R_1' + R_4' R_5'^2 ;$$

$$V'_{(47)} = 2R_1'' R_1''' R_3''' + 2R_4'' R_4''' R_5''' + 2R_4' R_1' R_3' + 2R_5' R_4'^2 ;$$

$$V'_{(48)} = 2R_4'' R_2''' R_4''' + 2R_4'' R_3''' R_5''' + 2R_2' R_4'^2 + 2R_4' R_3' R_5' ;$$

$$V'_{(49)} = R_5'' R_1'''^2 + R_5' R_1'^2 ;$$

$$V'_{(50)} = R_5'' R_2'''^2 + R_5' R_2'^2 ;$$

$$V'_{(51)} = R_5'' R_3'''^2 + R_5' R_3'^2 ;$$

$$V'_{(52)} = R_5'' R_4'''^2 + R_5' R_4'^2 ;$$

$$V'_{(53)} = 2R_5'' R_1''' R_5''' + 2R_1' R_5'^2 ;$$

$$V'_{(54)} = 2R_5'' R_1''' R_4''' + 2R_5' R_1' R_4' ;$$

$$V'_{(55)} = 2R_5'' R_2''' R_5''' + 2R_2' R_5'^2 ;$$

$$V'_{(56)} = 2R_5'' R_2''' R_3''' + 2R_5' R_1' R_3' ;$$

$$V'_{(57)} = 2R_5'' R_3''' R_4''' + 2R_5' R_3' R_4' ;$$

$$V'_{(58)} = 2R_5'' R_2''' R_1''' + R_5'' R_5'''^2 + 2R_5' R_2' R_1' + R_5'^3 ;$$

$$V'_{(59)} = 2R_5'' R_1''' R_3''' + 2R_5'' R_4''' R_5''' + 2R_5' R_1' R_3' + 2R_4' R_5'^2 ;$$

$$V'_{(60)} = 2R_5'' R_2''' R_3''' + 2R_5'' R_3''' R_5''' + 2R_5' R_2' R_3' + 2R_3' R_5'^2 .$$

Actuellement, si l'on fait

$$K_{(1)} = R_1 V_{(1)} + R_1''' V'_{(1)} \; ; \qquad K'_{(1)} = R_2 V_{(1)} + R_2''' V'_{(1)} \; ;$$

$$K_{(2)} = R_1 V_{(2)} + R_1''' V'_{(2)} \; ; \qquad K'_{(2)} = R_2 V_{(2)} + R_2''' V'_{(2)} \; ;$$

$$K_{(3)} = R_1 V_{(3)} + R_1''' V'_{(3)} \; ; \qquad K'_{(3)} = R_2 V_{(3)} + R_2''' V'_{(3)} \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$K_{(60)} = R_1 V_{(60)} + R_1''' V'_{(60)} \; ; \qquad K'_{(60)} = R_2 V_{(60)} + R_2''' V'_{(60)} \; ;$$

$$K''_{(1)} = R_3 V_{(1)} + R_3''' V'_{(1)} \; ; \qquad K'''_{(1)} = R_4 V_{(1)} + R_4''' V'_{(1)} \; ;$$

$$K''_{(2)} = R_3 V_{(2)} + R_3''' V'_{(2)} \; ; \qquad K'''_{(2)} = R_4 V_{(2)} + R_4''' V'_{(2)} \; ;$$

$$K''_{(3)} = R_3 V_{(3)} + R_3''' V'_{(3)} \; ; \qquad K'''_{(3)} = R_4 V_{(3)} + R_4''' V'_{(3)} \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$K''_{(60)} = R_3 V_{(60)} + R_3''' V'_{(60)} \; ; \qquad K'''_{(60)} = R_4 V_{(60)} + R_4''' V'_{(60)} \; .$$

$$K^{IV}_{(1)} = R_5 V_{(1)} + R_5''' V'_{(1)} \; ;$$

$$K^{IV}_{(2)} = R_5 V_{(2)} + R_5''' V'_{(2)} \; ;$$

$$K^{IV}_{(3)} = R_5 V_{(3)} + R_5''' V'_{(3)} \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$K^{IV}_{(60)} = R_5 V_{(60)} + R_5''' V'_{(60)} \; .$$

l'on aura

$$[9] \ldots\ldots\ldots \quad \Pi''' =$$

$$\begin{aligned}
&625 \,.\, K_{(1)} + 10000 \,.\, K_{(2)} + 90000 \,.\, K_{(3)} + 22500 \,.\, K_{(4)} \\
+\; &1250 \,.\, K_{(5)} + 3750 \,.\, K_{(6)} + 5000 \,.\, K_{(7)} + 30000 \,.\, K_{(8)} \\
+\; &45000 \,.\, K_{(9)} + 2500 \,.\, K_{(10)} + 7500 \,.\, K_{(11)} + 15000 \,.\, K_{(12)} \\
+\; &2500 \,.\, K_{(13)} + 40000 \,.\, K_{(14)} + 360000 \,.\, K_{(15)} + 90000 \,.\, K_{(16)} \\
+\; &5000 \,.\, K_{(17)} + 15000 \,.\, K_{(18)} + 20000 \,.\, K_{(19)} + 120000 \,.\, K_{(20)}
\end{aligned}$$

$$+\ 180000\,.\,K_{(21)} + \ 10000\,.\,K_{(22)} + \ 30000\,.\,K_{(23)} + \ 60000\,.\,K_{(24)}$$
$$+\ \ 7500\,.\,K_{(25)} + 120000\,.\,K_{(26)} + 1080000\,.\,K_{(27)} + 270000\,.\,K_{(28)}$$
$$+\ \ 15000\,.\,K_{(29)} + \ 45000\,.\,K_{(30)} + \ 60000\,.\,K_{(31)} + 360000\,.\,K_{(32)}$$
$$+\ 540000\,.\,K_{(33)} + \ 30000\,.\,K_{(34)} + \ 90000\,.\,K_{(35)} + 180000\,.\,K_{(36)}$$
$$+\ \ 3750\,.\,K_{(37)} + \ 60000\,.\,K_{(38)} + 540000\,.\,K_{(39)} + 135000\,.\,K_{(40)}$$
$$+\ \ 7500\,.\,K_{(41)} + \ 22500\,.\,K_{(42)} + \ 30000\,.\,K_{(43)} + 180000\,.\,K_{(44)}$$
$$+\ 270000\,.\,K_{(45)} + \ 15000\,.\,K_{(46)} + \ 45000\,.\,K_{(47)} + \ 90000\,.\,K_{(48)}$$
$$+\ \ 1250\,.\,K_{(49)} + \ 20000\,.\,K_{(50)} + 180000\,.\,K_{(51)} + \ 45000\,.\,K_{(52)}$$
$$+\ \ 2500\,.\,K_{(53)} + \ 7500\,.\,K_{(54)} + \ 10000\,.\,K_{(55)} + \ 60000\,.\,K_{(56)}$$
$$+\ \ 90000\,.\,K_{(57)} + \ 5000\,.\,K_{(58)} + \ 15000\,.\,K_{(59)} + \ 30000\,.\,K_{(60)}\,.$$

$$+\ \ 2500\,.\,K'_{(1)} + \ 40000\,.\,K'_{(2)} + 360000\,.\,K'_{(3)} + \ 90000\,.\,K'_{(4)}$$
$$+\ \ 5000\,.\,K'_{(5)} + \ 15000\,.\,K'_{(6)} + \ 20000\,.\,K'_{(7)} + 120000\,.\,K'_{(8)}$$
$$+\ 180000\,.\,K'_{(9)} + \ 10000\,.\,K'_{(10)} + \ 30000\,.\,K'_{(11)} + \ 60000\,.\,K'_{(12)}$$
$$+\ \ 10000\,.\,K'_{(13)} + 160000\,.\,K'_{(14)} + 1440000\,.\,K'_{(15)} + 360000\,.\,K'_{(16)}$$
$$+\ \ 20000\,.\,K'_{(17)} + \ 60000\,.\,K'_{(18)} + \ 80000\,.\,K'_{(19)} + 480000\,.\,K'_{(20)}$$
$$+\ 720000\,.\,K'_{(21)} + \ 40000\,.\,K'_{(22)} + 120000\,.\,K'_{(23)} + 240000\,.\,K'_{(24)}$$
$$+\ \ 30000\,.\,K'_{(25)} + 480000\,.\,K'_{(26)} + 4320000\,.\,K'_{(27)} + 1080000\,.\,K'_{(28)}$$
$$+\ \ 60000\,.\,K'_{(29)} + 180000\,.\,K'_{(30)} + 240000\,.\,K'_{(31)} + 1440000\,.\,K'_{(32)}$$
$$+2160000\,.\,K'_{(33)} + 120000\,.\,K'_{(34)} + 360000\,.\,K'_{(35)} + 720000\,.\,K'_{(36)}$$
$$+\ \ 15000\,.\,K'_{(37)} + 240000\,.\,K'_{(38)} + 2160000\,.\,K'_{(39)} + 540000\,.\,K'_{(40)}$$
$$+\ \ 30000\,.\,K'_{(41)} + \ 90000\,.\,K'_{(42)} + 120000\,.\,K'_{(43)} + 720000\,.\,K'_{(44)}$$
$$+1080000\,.\,K'_{(45)} + \ 60000\,.\,K'_{(46)} + 180000\,.\,K'_{(47)} + 360000\,.\,K'_{(48)}$$
$$+\ \ 5000\,.\,K'_{(49)} + \ 80000\,.\,K'_{(50)} + 720000\,.\,K'_{(51)} + 180000\,.\,K'_{(52)}$$
$$+\ \ 10000\,.\,K'_{(53)} + \ 75000\,.\,K'_{(54)} + \ 40000\,.\,K'_{(55)} + 240000\,.\,K'_{(56)}$$
$$+\ 360000\,.\,K'_{(57)} + \ 20000\,.\,K'_{(58)} + \ 60000\,.\,K'_{(59)} + 120000\,.\,K'_{(60)}\,.$$

$$+ 7500 . K^{II}_{(1)} + 120000 . K^{II}_{(2)} + 1080000 . K^{II}_{(3)} + 270000 . K^{II}_{(4)}$$
$$+ 15000 . K^{II}_{(5)} + 45000 . K^{II}_{(6)} + 60000 . K^{II}_{(7)} + 360000 . K^{II}_{(8)}$$
$$+ 540000 . K^{II}_{(9)} + 30000 . K^{II}_{(10)} + 90000 . K^{II}_{(11)} + 180000 . K^{II}_{(12)}$$
$$+ 30000 . K^{II}_{(13)} + 480000 . K^{II}_{(14)} + 4320000 . K^{II}_{(15)} + 1080000 . K^{II}_{(16)}$$
$$+ 60000 . K^{II}_{(17)} + 180000 . K^{II}_{(18)} + 240000 . K^{II}_{(19)} + 1440000 . K^{II}_{(20)}$$
$$+ 2160000 . K^{II}_{(21)} + 120000 . K^{II}_{(22)} + 360000 . K^{II}_{(23)} + 720000 . K^{II}_{(24)}$$
$$+ 90000 . K^{II}_{(25)} + 1440000 . K^{II}_{(26)} + 12960000 . K^{II}_{(27)} + 3240000 . K^{II}_{(28)}$$
$$+ 180000 . K^{II}_{(29)} + 540000 . K^{II}_{(30)} + 720000 . K^{II}_{(31)} + 4320000 . K^{II}_{(32)}$$
$$+ 6480000 . K^{II}_{(33)} + 360000 . K^{II}_{(34)} + 1080000 . K^{II}_{(35)} + 2160000 . K^{II}_{(36)}$$
$$+ 45000 . K^{II}_{(37)} + 720000 . K^{II}_{(38)} + 6480000 . K^{II}_{(39)} + 1620000 . K^{II}_{(40)}$$
$$+ 90000 . K^{II}_{(41)} + 270000 . K^{II}_{(42)} + 360000 . K^{II}_{(43)} + 2160000 . K^{II}_{(44)}$$
$$+ 3240000 . K^{II}_{(45)} + 180000 . K^{II}_{(46)} + 540000 . K^{II}_{(47)} + 1080000 . K^{II}_{(48)}$$
$$+ 15000 . K^{II}_{(49)} + 240000 . K^{II}_{(50)} + 2160000 . K^{II}_{(51)} + 540000 . K^{II}_{(52)}$$
$$+ 30000 . K^{II}_{(53)} + 225000 . K^{II}_{(54)} + 120000 . K^{II}_{(55)} + 720000 . K^{II}_{(56)}$$
$$+ 1080000 . K^{II}_{(57)} + 60000 . K^{II}_{(58)} + 180000 . K^{II}_{(59)} + 360000 . K^{II}_{(60)} .$$

$$+ 3750 . K^{III}_{(1)} + 60000 . K^{III}_{(2)} + 540000 . K^{III}_{(3)} + 135000 . K^{III}_{(4)}$$
$$+ 7500 . K^{III}_{(5)} + 22500 . K^{III}_{(6)} + 30000 . K^{III}_{(7)} + 180000 . K^{III}_{(8)}$$
$$+ 270000 . K^{III}_{(9)} + 15000 . K^{III}_{(10)} + 45000 . K^{III}_{(11)} + 90000 . K^{III}_{(12)}$$
$$+ 15000 . K^{III}_{(13)} + 240000 . K^{III}_{(14)} + 2160000 . K^{III}_{(15)} + 540000 . K^{III}_{(16)}$$
$$+ 30000 . K^{III}_{(17)} + 90000 . K^{III}_{(18)} + 120000 . K^{III}_{(19)} + 720000 . K^{III}_{(20)}$$
$$+ 1080000 . K^{III}_{(21)} + 60000 . K^{III}_{(22)} + 180000 . K^{III}_{(23)} + 360000 . K^{III}_{(24)}$$
$$+ 45000 . K^{III}_{(25)} + 720000 . K^{III}_{(26)} + 6480000 . K^{III}_{(27)} + 1620000 . K^{III}_{(28)}$$
$$+ 90000 . K^{III}_{(29)} + 270000 . K^{III}_{(30)} + 360000 . K^{III}_{(31)} + 2160000 . K^{III}_{(32)}$$

$$+3240000.K^{III}_{(33)}+180000.K^{III}_{(34)}+540000.K^{III}_{(35)}+1080000.K^{III}_{(36)}$$
$$+22500.K^{III}_{(37)}+360000.K^{III}_{(38)}+3240000.K^{III}_{(39)}+810000.K^{III}_{(40)}$$
$$+15000.K^{III}_{(41)}+135000.K^{III}_{(42)}+180000.K^{III}_{(43)}+1080000.K^{III}_{(44)}$$
$$+1620000.K^{III}_{(45)}+90000.K^{III}_{(46)}+270000.K^{III}_{(47)}+540000.K^{III}_{(48)}$$
$$+7500.K^{III}_{(49)}+120000.K^{III}_{(50)}+1080000.K^{III}_{(51)}+270000.K^{III}_{(52)}$$
$$+15000.K^{III}_{(53)}+112500.K^{III}_{(54)}+60000.K^{III}_{(55)}+360000.K^{III}_{(56)}$$
$$+540000.K^{III}_{(57)}+30000.K^{III}_{(58)}+90000.K^{III}_{(59)}+180000.K^{III}_{(60)}.$$

$$+1250.K^{IV}_{(1)}+20000.K^{IV}_{(2)}+180000.K^{IV}_{(3)}+45000.K^{IV}_{(4)}$$
$$+2500.K^{IV}_{(5)}+7500.K^{IV}_{(6)}+10000.K^{IV}_{(7)}+60000.K^{IV}_{(8)}$$
$$+90000.K^{IV}_{(9)}+5000.K^{IV}_{(10)}+15000.K^{IV}_{(11)}+30000.K^{IV}_{(12)}$$
$$+5000.K^{IV}_{(13)}+80000.K^{IV}_{(14)}+720000.K^{IV}_{(15)}+180000.K^{IV}_{(16)}$$
$$+10000.K^{IV}_{(17)}+30000.K^{IV}_{(18)}+40000.K^{IV}_{(19)}+240000.K^{IV}_{(20)}$$
$$+360000.K^{IV}_{(21)}+20000.K^{IV}_{(22)}+60000.K^{IV}_{(23)}+120000.K^{IV}_{(24)}$$
$$+15000.K^{IV}_{(25)}+240000.K^{IV}_{(26)}+2160000.K^{IV}_{(27)}+540000.K^{IV}_{(28)}$$
$$+30000.K^{IV}_{(29)}+90000.K^{IV}_{(30)}+120000.K^{IV}_{(31)}+720000.K^{IV}_{(32)}$$
$$+1080000.K^{IV}_{(33)}+60000.K^{IV}_{(34)}+180000.K^{IV}_{(35)}+360000.K^{IV}_{(36)}$$
$$+7500.K^{IV}_{(37)}+120000.K^{IV}_{(38)}+1080000.K^{IV}_{(39)}+270000.K^{IV}_{(40)}$$
$$+15000.K^{IV}_{(41)}+45000.K^{IV}_{(42)}+60000.K^{IV}_{(43)}+360000.K^{IV}_{(44)}$$
$$+540000.K^{IV}_{(45)}+30000.K^{IV}_{(46)}+90000.K^{IV}_{(47)}+180000.K^{IV}_{(48)}$$
$$+2500.K^{IV}_{(49)}+40000.K^{IV}_{(50)}+360000.K^{IV}_{(51)}+90000.K^{IV}_{(52)}$$
$$+5000.K^{IV}_{(53)}+37500.K^{IV}_{(54)}+20000.K^{IV}_{(55)}+120000.K^{IV}_{(56)}$$
$$+180000.K^{IV}_{(57)}+10000.K^{IV}_{(58)}+30000.K^{IV}_{(59)}+60000.K^{IV}_{(60)}.$$

Il nous reste à former l'expression de Π^{IV}. Pour cela il faut observer,

que la formule [1] donne

$$[10] \ldots\ldots \qquad \xi^{I}\xi^{IV} =$$

$$25.Z_{(1)} + 400.Z_{(2)} + 3600.Z_{(3)} + 900.Z_{(4)} + 50.Z_{(5)}$$
$$+ 150.Z_{(6)} + 200.Z_{(7)} + 1200.Z_{(8)} + 1800.Z_{(9)} + 100.Z_{(10)}$$
$$+ 300.Z_{(11)} + 600.Z_{(12)} \ ;$$

$$[11] \ldots\ldots \qquad \xi^{II}\xi^{III} =$$

$$25.Z'_{(1)} + 400.Z'_{(2)} + 3600.Z'_{(3)} + 900.Z'_{(4)} + 50.Z'_{(5)}$$
$$+ 150.Z'_{(6)} + 200.Z'_{(7)} + 1200.Z'_{(8)} + 1800.Z'_{(9)} + 100.Z'_{(10)}$$
$$+ 300.Z'_{(11)} + 600.Z'_{(12)} \ ;$$

où l'on a fait ;

$$Z_{(1)} = R_1 R_1''' \ ; \qquad Z'_{(1)} = R_1' R_1'' \ ;$$
$$Z_{(2)} = R_2 R_2''' \ ; \qquad Z'_{(2)} = R_2' R_2'' \ ;$$
$$Z_{(3)} = R_3 R_3''' \ ; \qquad Z'_{(3)} = R_3' R_3'' \ ;$$
$$Z_{(4)} = R_4 R_4''' \ ; \qquad Z'_{(4)} = R_4' R_4'' \ ;$$
$$Z_{(5)} = R_1 R_5''' + R_5 R_1''' \ ; \qquad Z'_{(5)} = R_1' R_5'' + R_5' R_1'' \ ;$$
$$Z_{(6)} = R_1 R_4''' + R_4 R_1''' \ ; \qquad Z'_{(6)} = R_1' R_4'' + R_4' R_1'' \ ;$$
$$Z_{(7)} = R_2 R_5''' + R_5 R_2''' \ ; \qquad Z'_{(7)} = R_2' R_5'' + R_5' R_2'' \ ;$$
$$Z_{(8)} = R_2 R_3''' + R_3 R_2''' \ ; \qquad Z'_{(8)} = R_2' R_3'' + R_3' R_2'' \ ;$$
$$Z_{(9)} = R_3 R_4''' + R_4 R_3''' \ ; \qquad Z'_{(9)} = R_3' R_4'' + R_4' R_3'' \ ;$$
$$Z_{(10)} = R_2 R_4''' + R_4 R_2''' + R_5 R_5''' \ ; \qquad Z'_{(10)} = R_2' R_4'' + R_4' R_2'' + R_5' R_5'' \ ;$$
$$Z_{(11)} = R_1 R_3''' + R_3 R_1''' + R_4 R_5''' + R_5 R_4''' \ ; \qquad Z'_{(11)} = R_4' R_3'' + R_3' R_4'' + R_4' R_5'' + R_5' R_4'' \ ;$$
$$Z_{(12)} = R_2 R_4''' + R_4 R_2''' + R_3 R_5''' + R_5 R_3''' \ . \qquad Z'_{(12)} = R_2' R_4'' + R_4' R_2'' + R_3' R_5'' + R_5' R_3'' \ .$$

Maintenant si l'on fait

$$H_{(1)} = Z_{(1)}\ Z'_{(1)}\ ; \qquad H_{(7)} = Z_{(7)}\ Z'_{(7)}\ ;$$
$$H_{(2)} = Z_{(2)}\ Z'_{(2)}\ ; \qquad H_{(8)} = Z_{(8)}\ Z'_{(8)}\ ;$$
$$H_{(3)} = Z_{(3)}\ Z'_{(3)}\ ; \qquad H_{(9)} = Z_{(9)}\ Z'_{(9)}\ ;$$
$$H_{(4)} = Z_{(4)}\ Z'_{(4)}\ ; \qquad H_{(10)} = Z_{(10)}\ Z'_{(10)}\ ;$$
$$H_{(5)} = Z_{(5)}\ Z'_{(5)}\ ; \qquad H_{(11)} = Z_{(11)}\ Z'_{(11)}\ ;$$
$$H_{(6)} = Z_{(6)}\ Z'_{(6)}\ ; \qquad H_{(12)} = Z_{(12)}\ Z'_{(12)}\ .$$

$$H_{(13)} = Z_{(2)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(2)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(24)} = Z_{(3)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(3)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(14)} = Z_{(3)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(3)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(25)} = Z_{(4)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(4)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(15)} = Z_{(4)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(4)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(26)} = Z_{(5)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(5)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(16)} = Z_{(5)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(5)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(27)} = Z_{(6)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(6)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(17)} = Z_{(6)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(6)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(28)} = Z_{(7)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(7)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(18)} = Z_{(7)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(7)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(29)} = Z_{(8)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(8)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(19)} = Z_{(8)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(8)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(30)} = Z_{(9)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(9)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(20)} = Z_{(9)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(9)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(31)} = Z_{(10)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(10)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(21)} = Z_{(10)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(10)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(32)} = Z_{(11)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(11)}\ Z_{(2)}\ ;$$
$$H_{(22)} = Z_{(11)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(11)}\ Z_{(1)}\ ; \qquad H_{(33)} = Z_{(12)}\ Z'_{(2)} + Z'_{(12)}\ Z_{(2)}\ .$$
$$H_{(23)} = Z_{(12)}\ Z'_{(1)} + Z'_{(12)}\ Z_{(1)}\ .$$

$$H_{(34)} = Z_{(4)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(4)}\ Z_{(3)}\ ; \qquad H_{(39)} = Z_{(9)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(9)}\ Z_{(3)}\ ;$$
$$H_{(35)} = Z_{(5)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(5)}\ Z_{(3)}\ ; \qquad H_{(40)} = Z_{(10)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(10)}\ Z_{(3)}\ ;$$
$$H_{(36)} = Z_{(6)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(6)}\ Z_{(3)}\ ; \qquad H_{(41)} = Z_{(11)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(11)}\ Z_{(3)}\ ;$$
$$H_{(37)} = Z_{(7)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(7)}\ Z_{(3)}\ ; \qquad Z_{(42)} = Z_{(12)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(12)}\ Z_{(3)}\ .$$
$$H_{(38)} = Z_{(8)}\ Z'_{(3)} + Z'_{(8)}\ Z_{(3)}\ ;$$

$$H_{(43)} = Z_{(5)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(5)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(44)} = Z_{(6)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(6)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(45)} = Z_{(7)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(7)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(46)} = Z_{(8)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(8)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(47)} = Z_{(9)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(9)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(48)} = Z_{(10)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(10)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(49)} = Z_{(11)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(11)}\,Z_{(4)}\ ;$$
$$H_{(50)} = Z_{(12)}\,Z'_{(4)} + Z'_{(12)}\,Z_{(4)}\ .$$

$$H_{(51)} = Z_{(6)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(6)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(52)} = Z_{(7)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(7)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(53)} = Z_{(8)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(8)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(54)} = Z_{(9)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(9)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(55)} = Z_{(10)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(10)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(56)} = Z_{(11)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(11)}\,Z_{(5)}\ ;$$
$$H_{(57)} = Z_{(12)}\,Z'_{(5)} + Z'_{(12)}\,Z_{(5)}\ .$$
$$H_{(58)} = Z_{(7)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(7)}\,Z_{(6)}\ ;$$
$$H_{(59)} = Z_{(8)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(8)}\,Z_{(6)}\ ;$$
$$H_{(60)} = Z_{(9)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(9)}\,Z_{(6)}\ ;$$
$$H_{(61)} = Z_{(10)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(10)}\,Z_{(6)}\ ;$$
$$H_{(62)} = Z_{(11)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(11)}\,Z_{(6)}\ ;$$
$$H_{(63)} = Z_{(12)}\,Z'_{(6)} + Z'_{(12)}\,Z_{(6)}\ .$$

$$H_{(64)} = Z_{(8)}\,Z'_{(7)} + Z'_{(8)}\,Z_{(7)}\ ;$$
$$H_{(65)} = Z_{(9)}\,Z'_{(7)} + Z'_{(9)}\,Z_{(7)}\ ;$$
$$H_{(66)} = Z_{(10)}\,Z'_{(7)} + Z'_{(10)}\,Z_{(7)}\ ;$$
$$H_{(67)} = Z_{(11)}\,Z'_{(7)} + Z'_{(11)}\,Z_{(7)}\ ;$$
$$H_{(68)} = Z_{(12)}\,Z'_{(7)} + Z'_{(12)}\,Z_{(7)}\ .$$
$$H_{(69)} = Z_{(9)}\,Z'_{(8)} + Z'_{(9)}\,Y_{(8)}\ ;$$
$$H_{(70)} = Z_{(10)}\,Z'_{(8)} + Z'_{(10)}\,Z_{(8)}\ ;$$
$$H_{(71)} = Z_{(11)}\,Z'_{(8)} + Z'_{(11)}\,Z_{(8)}\ ;$$
$$H_{(72)} = Z_{(12)}\,Z'_{(8)} + Z'_{(12)}\,Z_{(8)}\ .$$

$$H_{(73)} = Z_{(10)}\,Z'_{(9)} + Z'_{(10)}\,Z_{(9)}\ ;$$
$$H_{(74)} = Z_{(11)}\,Z'_{(9)} + Z'_{(11)}\,Z_{(9)}\ ;$$
$$H_{(75)} = Z_{(12)}\,Z'_{(9)} + Z'_{(12)}\,Z_{(9)}\ .$$
$$H_{(76)} = Z_{(11)}\,Z'_{(10)} + Z'_{(11)}\,Z_{(10)}\ ;$$
$$H_{(77)} = Z_{(12)}\,Z'_{(10)} + Z'_{(12)}\,Z_{(10)}\ .$$

$$H_{(78)} = Z_{(12)}\,Z'_{(11)} + Z'_{(12)}\,Z_{(11)}\ ;$$

le produit des deux équations [10] et [11] donnera

$$[12] \ldots\ldots \quad \Pi^{IV} =$$

$$(25)^2 H_{(1)} + (400)^2 H_{(2)} + (3600)^2 H_{(3)} + (900)^2 H_{(4)} + (50)^2 H_{(5)}$$
$$+ (150)^2 H_{(6)} + (200)^2 H_{(7)} + (1200)^2 H_{(8)} + (1800)^2 H_{(9)} + (100)^2 H_{(10)}$$
$$+ (300)^2 H_{(11)} + (600)^2 H_{(12)}$$

$$+ 25\left\{\begin{array}{l} 400 H_{(13)} + 3600 H_{(14)} + 900 H_{(15)} + 50 H_{(16)} + 150 H_{(17)} \\ + 200 H_{(18)} + 1200 H_{(19)} + 1800 H_{(20)} + 100 H_{(21)} + 300 H_{(22)} \\ + 600 H_{(23)} \end{array}\right\}$$

$$+ 400\left\{\begin{array}{l} 3600 H_{(24)} + 900 H_{(25)} + 50 H_{(26)} + 150 H_{(27)} + 200 H_{(28)} \\ + 1200 H_{(29)} + 1800 H_{(30)} + 100 H_{(31)} + 300 H_{(32)} + 600 H_{(33)} \end{array}\right\}$$

$$+ 3600\left\{\begin{array}{l} 900 H_{(34)} + 50 H_{(35)} + 150 H_{(36)} + 200 H_{(37)} + 1200 H_{(38)} \\ + 1800 H_{(39)} + 100 H_{(40)} + 300 H_{(41)} + 600 H_{(42)} \end{array}\right\}$$

$$+ 900\left\{\begin{array}{l} 50 H_{(43)} + 150 H_{(44)} + 200 H_{(45)} + 1200 H_{(46)} + 1800 H_{(47)} \\ + 100 H_{(48)} + 300 H_{(49)} + 600 H_{(50)} \end{array}\right\}$$

$$+ 50\left\{\begin{array}{l} 150 H_{(51)} + 200 H_{(52)} + 1200 H_{(53)} + 1800 H_{(54)} + 100 H_{(55)} \\ + 300 H_{(56)} + 600 H_{(57)} \end{array}\right\}$$

$$+ 150\left\{\begin{array}{l} 200 H_{(58)} + 1200 H_{(59)} + 1800 H_{(60)} + 100 H_{(61)} + 300 H_{(62)} \\ + 600 H_{(63)} \end{array}\right\}$$

$$+ 200\left\{ 1200 H_{(64)} + 1800 H_{(65)} + 100 H_{(66)} + 300 H_{(67)} + 600 H_{(68)} \right\}$$

$$+ 1200\left\{ 1800 H_{(69)} + 100 H_{(70)} + 300 H_{(71)} + 600 H_{(72)} \right\}$$

$$+ 1800\left\{ 100 H_{(73)} + 300 H_{(74)} + 600 H_{(75)} \right\}$$

$$+ 100\left\{ 300 H_{(76)} + 600 H_{(77)} \right\}$$

$$+ 300\left\{ 600 H_{(78)} \right\} .$$

On voit par là que les fonctions Π, Π', Π'', Π''', Π^{IV} sont, respectivement, composées de 3, 12, 60, 300, et 78 termes. De sorte que, en totalité, on a 453 termes pour former l'équation du quatrième degré.

§ V.

Après avoir formé les coefficiens de l'équation

$$\theta^4 - T\theta^3 + U\theta^2 - Z\theta + Y = 0 ,$$

les formules qui me paraissent les plus simples et les plus explicites pour écrire les quatre racines θ', θ'', θ''', θ^{IV} sont les suivantes.

Soit

$$M = 2U^3 - 9TUZ - 72UY + 2T^2Y + 27Y^2 ;$$

$$N = U^2 - 3(TZ - 4Y) ;$$

$$E = 16Z - 8TU + 2T^3 ;$$

$$H = M^2 - 4N^3 ;$$

$$K = 3T^2 - 8U + 2.\sqrt[3]{M + \sqrt{H}} + 2.\sqrt[3]{M - \sqrt{H}} ;$$

$$I = 9T^2 - 24U + \frac{3.\sqrt{3}.E}{\sqrt{K}} ;$$

$$I' = 9T^2 - 24U - \frac{3.\sqrt{3}.E}{\sqrt{K}} ;$$

$$L = (9T^2 - 24U - K)\sqrt{K} + 3.\sqrt{3}.E ;$$

$$L' = (9T^2 - 24U - K)\sqrt{K} - 3.\sqrt{3}.E ;$$

$$I_1 = I + 2.\sqrt{L.\sqrt{K}} ;$$

$$I_2 = I - 2.\sqrt{L.\sqrt{K}} ;$$

$$I'_1 = I' + 2.\sqrt{L'.\sqrt{K}} ;$$

$$I'_2 = I' - 2.\sqrt{L'.\sqrt{K}} ;$$

l'on aura

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{I}} = T.\sqrt{3}+\sqrt{V} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{II}} = T.\sqrt{3}+\sqrt{V_{\text{I}}} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{III}} = T.\sqrt{3}-\sqrt{V'} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{IV}} = T.\sqrt{3}-\sqrt{V_{\text{I}}'} \;.$$

Et les deux équations du second degré, avec des coefficiens toujours réels, qui remplacent l'équation du quatrième degré, seront

$$\theta^2-\frac{(T.\sqrt{3}+\sqrt{K})}{2.\sqrt{3}}\theta+\frac{1}{48}\left\{2K-6T^2+24U+\sqrt{3}.\frac{(2TK-3E)}{\sqrt{K}}\right\}=0 \;;$$

$$\theta^2-\frac{(T.\sqrt{3}-\sqrt{K})}{2.\sqrt{3}}\theta+\frac{1}{48}\left\{2K-6T^2+24U-\sqrt{3}.\frac{(2TK-3E)}{\sqrt{K}}\right\}=0 \;.$$

On obtient ces formules en transformant convenablement celles données par LAGRANGE aux pages 267 et 268 de son *Traité de la Résolution des Équations Numériques* (Édition de 1808). Et on démontre que la quantité désignée par K sera toujours nécessairement positive.

En posant $G=9T^2-24U-K$ l'on a aussi les quatre racines sous cette forme

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{I}} = T.\sqrt{3}+\sqrt{K}+\sqrt{G+\frac{3.\sqrt{3.E}}{\sqrt{K}}} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{II}} = T.\sqrt{3}+\sqrt{K}-\sqrt{G+\frac{3.\sqrt{3.E}}{\sqrt{K}}} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{III}} = T.\sqrt{3}-\sqrt{K}+\sqrt{G-\frac{3.\sqrt{3.E}}{\sqrt{K}}} \;;$$

$$4.\sqrt{3}.\theta^{\text{IV}} = T.\sqrt{3}-\sqrt{K}-\sqrt{G-\frac{3.\sqrt{3.E}}{\sqrt{K}}} \;.$$

Ces formules sont celles qu'il faudra substituer dans les équations [2] posées dans le second §. De sorte, que l'expression de la racine X, sera donnée par cette équation ; savoir

$$X,5\,.\sqrt[5]{4.\sqrt{3}}=-m\sqrt[5]{4.\sqrt{3}}+\sqrt[5]{T'\sqrt{3}+\sqrt{V}}+\sqrt[5]{T'\sqrt{3}+\sqrt{V_1}}$$
$$+\sqrt[5]{T'\sqrt{3}-\sqrt{V}}+\sqrt[5]{T'\sqrt{3}-\sqrt{V_1}}\ .$$

Telle est la complication inhérente à ces formules littérales, qu'on ne saurait concevoir aucun espoir d'en faire des applications utiles. Mais il n'est pas inutile de fixer les idées sur la nature des obstacles que l'on rencontre dans l'étude de cette théorie.

§ VI.

Les équations [2], [6], [9], [12], établies dans le § IV, donnent l'expression des quatre fonctions Π', Π'', Π''', Π^{IV} par des termes dont chacun est formé par une combinaison de plusieurs des *vingt* fonctions R_1, R_2, etc., que nous avons trouvées dans le § III en formant la valeur de $\theta=t^5$. Mais ces termes ne peuvent fournir aucun résultat sans exécuter les multiplications indiquées. Alors on reconnait, que le produit est composé de plusieurs *fonctions semblables* dont le type a été donné par la formule [9] posée dans le premier paragraphe. C'est ce qui devient fort clair, en formant les valeurs des 12 fonctions $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, ... $T_{(12)}$, qui entrent dans l'expression de Π'. Pour cela il faudra donner aux quatre exposans λ, μ, ζ, β les valeurs particulières telles que l'on ait les quinze fonctions suivantes composées chacune de *vingt* termes; savoir

$$\Omega_{(1)}=\overline{\Sigma}.a^5b^0c^0d^0\ ;$$
$$\Omega_{(2)}=\overline{\Sigma}.a^5b^5c^0d^0\ ;$$
$$\Omega_{(3)}=\overline{\Sigma}.a^3b\ c\ d^0\ ;$$
$$\Omega_{(4)}=\overline{\Sigma}.a\ b^2c^2d^0\ ;$$
$$\Omega_{(5)}=\overline{\Sigma}.a^6b^2c^2d^0\ ;$$
$$\Omega_{(6)}=\overline{\Sigma}.a^4b^3c^3d^0\ ;$$
$$\Omega_{(7)}=\overline{\Sigma}.a^2b^4c^4d^0\ ;$$
$$\Omega_{(8)}=\overline{\Sigma}.a^8b\ c\ d^0\ ;$$
$$\Omega_{(9)}=\overline{\Sigma}.a^6b^0c^3d^1\ ;$$
$$\Omega_{(10)}=\overline{\Sigma}.a^7b^2c^0d^1\ ;$$
$$\Omega_{(11)}=\overline{\Sigma}.a\ b^4c\ d^4\ ;$$
$$\Omega_{(12)}=\overline{\Sigma}.a^2b\ c^3d^4\ ;$$
$$\Omega_{(13)}=\overline{\Sigma}.a^2b^3c^3d^3\ ;$$
$$\Omega_{(14)}=\overline{\Sigma}.a\ b^2c^2d^5\ ;$$
$$\Omega_{(15)}=\overline{\Sigma}.a\ b\ c^5d^3\ .$$

Cela posé on trouvera

$$2.T_{(1)} = \Omega_{(3)} + 2\Omega_{(11)} + \Omega_{(7)} + \Omega_{(8)} \;;$$

$$2.T_{(2)} = -r\Omega_{(1)} - r\Omega_{(4)} + \Omega_{(5)} + \Omega_{(11)} + \Omega_{(13)} \;;$$

$$2.T_{(3)} = 20.r^2 - r\Omega_{(3)} - 2.r\Omega_{(4)} + \Omega_{(13)} \;;$$

$$2.T_{(4)} = 20.r^2 - r\Omega_{(3)} + \Omega_{(6)} + \Omega_{(11)} + \Omega_{(13)} \;;$$

$$2.T_{(5)} = 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(6)} + 2\Omega_{(7)} + 2\Omega_{(9)} + 2\Omega_{(10)} \;;$$

$$2.T_{(6)} = -2.r\Omega_{(3)} + 2\Omega_{(5)} + 2\Omega_{(9)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(14)} \;;$$

$$2.T_{(7)} = -2.r\Omega_{(4)} + 2\Omega_{(6)} + 2\Omega_{(9)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(15)} \;;$$

$$2.T_{(8)} = -4.r\Omega_{(3)} - 2.r\Omega_{(4)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(14)} \;;$$

$$2.T_{(9)} = -4.r\Omega_{(4)} - 2.r\Omega_{(3)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(13)} \;;$$

$$2.T_{(10)} = \Omega_{(2)} + \Omega_{(5)} + \Omega_{(6)} + 2\Omega_{(10)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(14)} + 2\Omega_{(15)} \;;$$

$$2.T_{(11)} = -2.r\Omega_{(1)} - 2.r\Omega_{(3)} + 2\Omega_{(7)} + 2\Omega_{(12)} + 2\Omega_{(13)} + 8\Omega_{(14)} + 2\Omega_{(15)} \;;$$

$$2.T_{(12)} = -2.r\Omega_{(3)} - 4.r\Omega_{(4)} + 2\Omega_{(14)} + 2\Omega_{(11)} + 4\Omega_{(12)} + 4\Omega_{(13)} + 4\Omega_{(15)} \;.$$

Sur cela il faut observer que $\Omega_{(1)}$ et $\Omega_{(2)}$ sont des quantités immédiatement connues par les coefficiens de l'équation du cinquième degré, puisque l'on a ;

$$\Omega_{(1)} = 4\left\{ X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 \right\} \;;$$

$$\Omega_{(2)} = 2\left\{ (X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5)^2 - (X_1^{10} + X_2^{10} + X_3^{10} + X_4^{10} + X_5^{10}) \right\} .$$

Les autres fonctions des racines $\Omega_{(3)}$, $\Omega_{(4)}$, ... $\Omega_{(15)}$ sont susceptibles de fournir chacune six valeurs différentes par la permutation des racines; elles sont semblables; et par la formule [12] donnée dans le I.er §, on peut avoir pour chacune la somme des six valeurs en fonction des coefficiens de l'équation du cinquième degré.

Cela suffit pour faire juger, que les calculs absolument indispensables

pour la réduction des termes qui composent les fonctions Π'', Π''', Π^{IV} à d'autres termes exprimés par des fonctions semblables, sont d'une longueur excessive, et que, au milieu d'une telle complication, rien ne fait espérer que le résultat puisse présenter des avantages réels pour le progrès de l'Algèbre.

§ VII.

Toutes les fonctions *semblables* qui concourent à la formation de l'équation du 4.ème degré peuvent être exprimées en fonction d'une seule d'entr'elles choisie à volonté. Et pour cela nous avons choisi la plus simple, qui est celle désignée par P dans le I.er § (Voyez l'équation [5]). Il faut donc nous occuper de l'équation du *sixième* degré ayant P pour inconnue. A cet effet il faut avant tout rappeler les formules qui déterminent en fonction des coefficiens de l'équation

$$x^5 + m x^4 + n x^3 + p x^2 + q x + r = 0$$

la somme

$$S_{(i)} = X_1^i + X_2^i + X_3^i + X_4^i + X_5^i$$

des puissances entières et positives des racines de l'équation générale du cinquième degré. Ces formules jusqu'à la cinquième puissance inclusivement sont;

$$[1] \ldots \begin{cases} S_{(1)} = -m \ ; \\ S_{(2)} = -2n + m^2 \ ; \\ S_{(3)} = -3p + 3mn - m^3 \ ; \\ S_{(4)} = -4q + 4pm + 2n^2 - 4nm^2 + m^4 \ ; \\ S_{(5)} = -5r + 5qm + 5pn - 5pm^2 - 5mn^2 + 5nm^3 - m^5 \ . \end{cases}$$

Et pour former les valeurs de $S_{(6)}$, $S_{(7)}$, etc. on fera usage de la formule

$$[2] \ldots \ S_{(5+k)} + m S_{(4+k)} + n S_{(3+k)} + p S_{(2+k)} + q S_{(1+k)} + r S_{(k)} = 0 \ .$$

Au reste on sait que, en général, les sommes des puissances semblables des racines d'une équation d'un degré quelconque m sont les

coefficiens des puissances successives de la variable d'une fraction rationnelle. Car

$$F(x)=x^m+A_{(1)}x^{m-1}+A_{(2)}x^{m-2}\ldots\ldots+A_{(m-1)}x+A_{(m)}=0$$

étant l'équation donnée, si l'on fait

$$f(x)=m+(m-1)A_{(1)}x+(m-2)A_{(2)}x^2\ldots\ldots+A_{(m-1)}x^{m-1}\ ;$$

$$\varphi(x)=1+A_{(1)}x+A_{(2)}x^2+A_{(3)}x^3\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{(m)}x^m\ ;$$

l'on a, en posant $\frac{d.F(x)}{dx}=F'(x)$;

$$\frac{1}{x}.\frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\ ;$$

et

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=m+S_{(1)}x+S_{(2)}x^2+S_{(3)}x^2+\text{etc.}$$

D'après les dénominations établies dans le § précédent l'on a ;

$$\Omega_{(3)}=2P=\overline{\Sigma}.a^3bcd^6\ ;\qquad 2Q=\overline{\Sigma}.ab^2c^2d^6=\Omega_{(4)}\ .$$

Et nous désignerons par

$$2\overline{\Sigma}.P=\overline{\Sigma}.\Omega_{(3)}\ ;\qquad 2\overline{\Sigma}.Q=\overline{\Sigma}.\Omega_{(4)}$$

la somme des six valeurs différentes dont sont susceptibles les deux fonctions $2P$, $2Q$ par la permutation des racines. En faisant d'abord $\lambda=3$, $\mu=1$, $\zeta=1$, $\beta=0$, la formule [12], établie dans le I.er §, donne (en se rappelant que $S_{(0)}=5$)

[3] ..... $\overline{\Sigma}.P=S^2_{(1)}S_{(3)}-2S_{(4)}S_{(1)}-S_{(2)}S_{(3)}+2S_{(5)}$.

Et en faisant $\lambda=1$, $\mu=2$, $\zeta=2$, $\beta=0$, la même formule [12] donne

[4] ..... $\overline{\Sigma}.Q=S^2_{(2)}S_{(1)}-S_{(4)}S_{(1)}-2S_{(3)}S_{(2)}+2S_{(5)}$.

Cela posé, à l'aide des formules [1] l'on a d'abord;

$$\overline{\Sigma}.P=\left\{m^2-(m^2-2n)\right\}.S_{(3)}+2mS_{(4)}+2S_{(5)}\ ;$$

c'est-à-dire

$$\overline{\Sigma}.P=2nS_{(3)}+2mS_{(4)}+2S_{(5)}\ .$$

En substituant pour $S_{(3)}$ et $S_{(4)}$, leurs valeurs, l'on a ;

$$\overline{\Sigma}.P=-6pn+10mn^2-10nm^3-8mq+8pm^3+2m^5+2S_{(5)}\ ;$$

et en remplaçant $2S_{(5)}$ par sa valeur on obtient ;

[5] ..... $\overline{\Sigma}.P=4pn+2mq-2pm^2-10.r\ .$

En éliminant $2S_{(5)}$ entre les équations [3] et [4] on obtient l'équation

$$\overline{\Sigma}.Q=\overline{\Sigma}.P-mS^2_{(2)}-mS_{(4)}-S_{(3)}S_{(2)}-m^2S_{(3)}\ .$$

En substituant pour $S_{(2)}$ et $S_{(3)}$ leur valeur on trouvera

$$\overline{\Sigma}.Q=\overline{\Sigma}.P+m^5-4nm^3+2mn^2+6pm^2-6pn-mS_{(4)}\ ;$$

et en substituant pour $S_{(4)}$ sa valeur il viendra

$$\overline{\Sigma}.Q=\overline{\Sigma}.P+2pm^2-6pn+4mq\ .$$

Maintenant, si l'on substitue pour $\overline{\Sigma}.P$ sa valeur fournie par l'équation [5) on obtient

[6] ..... $\overline{\Sigma}.Q=-2pn+6mq-10.r\ .$

Cela posé, si l'on fait

[7] ..... $A=2\overline{\Sigma}.P+3\overline{\Sigma}.Q\ ,$

on voit, par les équations [5] et [6], que

[8] ..... $A=2pn+22mq-4pm^2-50.r\ .$

Lagrange, qui a calculé cette valeur de A, sans l'emploi des formules [3] et [4] est parvenu à un résultat fautif à la page 175 du Volume de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1771. La cause radicale qui a rendu son calcul erroné consiste en ceci, que, au commencement de la même page, il a établi l'équation

$$n^2=l+2nS_{(2)}+2mS_{(3)}+2S_{(4)}\ .$$

Mais cette équation est fautive sans l'addition du terme $6q$ dans le second membre. De sorte que l'on a

$$[9] \ldots\ldots \quad n^2 = l + 6q + 2nS_{(2)} + 2mS_{(3)} + 2S_{(4)} \ .$$

Alors elle donnera la véritable valeur de l; c'est-à-dire de la fonction symétrique des racines;

$$[10] \ldots \ l = (X_1X_2)^2 + (X_1X_3)^2 + (X_1X_4)^2 + (X_1X_5)^2 + (X_2X_3)^2 + (X_2X_4)^2 + (X_2X_5)^2 + (X_3X_4)^2 + (X_3X_5)^2 + (X_4X_5)^2 \ .$$

En outre, il faut observer, qu'en réunissant les parties de A, telles que LAGRANGE les avait calculées, il devait trouver

$$A = -6mn(5n - 2m^2) + \text{etc.}$$

au lieu de

$$A = -6mn(3n - 2m^2) + \text{etc.}$$

Avec cette correction, les trois coefficiens de m^5, m^3n, mn^2 deviennent *nuls*, et la valeur de A de LAGRANGE se réduit à celle-ci;

$$[11] \ldots\ldots \quad A = 2pn - 14mq - 4pm^2 - 50.r \ ;$$

de sorte que l'erreur tombe uniquement sur le coefficient numérique de mq, qui, au lieu de $50 - 64 = -14$ doit être égal à $+22$. Au reste, c'est un fait remarquable, que LAGRANGE ait entrepris de calculer la valeur de l à l'aide de l'équation [9] assez compliquée, tandis que, avec une légère réflexion, on voit que l'on a l'équation fort simple

$$2l = (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^2 - (X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4 + X_5^4) \ ,$$

qui donne

$$[12] \ldots \ 2l = S_{(2)}^2 - S_{(4)} = (m^2 - 2n)^2 - S_{(4)} = 2n^2 - 4pm + 4q \ .$$

Si l'on avait fait $m = 0$ on aurait trouvé $A = 2pn - 50.r$, soit en employant l'équation exacte désignée par [8], soit en employant l'équation fautive [11]. Il est utile de former les formules générales dont il est ici question sans priver du second terme l'équation du $5^{\text{ème}}$ degré.

Pour obtenir les coefficiens de l'équation

$$[13]\ldots\quad P^6 - A'P^5 + B'P^4 - C'P^3 + D'P^2 - E'P + F' = 0\ ,$$

il faudra employer les formules qui les donnent par les puissances semblables de ses racines. Pour cela nous ferons

$$[14]\ldots\ldots\quad S'_{(k)} = P^{1k} + P^{11k} + P^{111k} + P^{1v\,k} + P^{v\,k} + P^{vi\,k}\ ;$$

ce qui donnera

$$[15]\ldots\quad \begin{cases} 1\ A' = S'_{(1)}\ ; \\ 2\,B' = A'S'_{(1)} - S'_{(2)}\ ; \\ 3\,C' = B'S'_{(1)} - A'S'_{(2)} + S'_{(3)}\ ; \\ 4\,D' = C'S'_{(1)} - B'S'_{(2)} + A'S'_{(3)} - S'_{(4)}\ ; \\ 5\,E' = D'S'_{(1)} - C'S'_{(2)} + B'S'_{(3)} - A'S'_{(4)} + S'_{(5)}\ ; \\ 6\,F' = E'S'_{(1)} - D'S'_{(2)} + C'S'_{(3)} - B'S'_{(4)} + A'S'_{(5)} - S'_{(6)}\ . \end{cases}$$

L'équation [5] donne la valeur de A', mais pour avoir les autres coefficiens il est indispensable d'avoir les puissances P^2, P^3, P^4, P^5, P^6 par des fonctions comprises dans la formule [9] posée dans le premier §. C'est de quoi nous allons nous occuper dans le § suivant.

§ VIII.

En faisant $\zeta = \mu$ et $\beta = 0$, le second membre de l'équation [9] sera composé de vingt termes qui seront égaux deux à deux: nous pouvons représenter ces vingt termes par le symbole

$$2\,.\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}\ ;$$

où le nombre (10) placé au-dessus du signe Σ indique que la somme renferme *dix* termes.

La même formule [9] nous permet de représenter par $2\,.\overset{(10)}{\Sigma}.a^{3}bc$

le double de la fonction des racines désignée par P. De sorte que le produit

$$P.\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}=\overset{(10)}{\Sigma}.a^{3}bc\times\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}$$

doit être composé de *cent* termes. Afin d'obtenir avec plus de facilité le résultat de cette multiplication, il faut d'abord remarquer, que le produit de $\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}$ par les deux premiers termes de la fonction P peut être disposé de la manière suivante, après avoir remplacé le produit $X_1X_2X_3X_4X_5$ par $-r$; savoir

$$X_1^{3}(X_2X_5+X_3X_4).\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}=$$

$$-rX_1^{\lambda+2}(X_2^{\mu-1}X_5^{\mu-1}+X_3^{\mu-1}X_4^{\mu-1})+X_1^{\lambda+3}(X_2^{\mu+1}X_5^{\mu+1}+X_3^{\mu+1}X_4^{\mu+1})$$

$$-r(X_2^{\mu}X_1^{2}X_3^{\lambda-1}X_4^{\mu-1}+X_4^{\mu}X_1^{2}X_2^{\lambda-1}X_5^{\mu-1})$$

$$-r(X_3^{\mu}X_1^{2}X_5^{\lambda-1}X_2^{\mu-1}+X_5^{\mu}X_1^{2}X_4^{\lambda-1}X_3^{\mu-1})$$

$$+\left\{\begin{array}{r}X_2^{\lambda}X_1^{\mu+3}X_3^{\mu+1}X_4\\+X_3^{\lambda}X_1^{\mu+3}X_5^{\mu+1}X_2\\+X_4^{\lambda}X_1^{\mu+3}X_2^{\mu+1}X_5\\+X_5^{\lambda}X_1^{\mu+3}X_4^{\mu+1}X_3\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{r}X_2^{\mu}X_1^{\mu+3}X_3X_4^{\lambda+1}\\+X_3^{\mu}X_1^{\mu+3}X_5X_2^{\lambda+1}\\+X_4^{\mu}X_1^{\mu+3}X_2X_5^{\lambda+1}\\+X_5^{\mu}X_1^{\mu+3}X_4X_3^{\lambda+1}\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{r}X_2^{\mu}X_1^{3}X_3^{\lambda+1}X_4^{\mu+1}\\+X_4^{\mu}X_1^{3}X_3^{\lambda+1}X_5^{\mu+1}\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{r}X_3^{\mu}X_1^{3}X_5^{\lambda+1}X_2^{\mu+1}\\+X_5^{\mu}X_1^{3}X_3^{\lambda+1}X_1^{\mu+1}\end{array}\right\}.$$

Cela posé il est facile d'en conclure que le produit des *dix* termes de P par les *vingt* termes de

$$2.\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}=\overset{(10)}{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}d^{0}$$

peut être représenté d'une manière symbolique par l'équation ;

[1] . . . . . $P.\Sigma.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\mu}d^{0}=$

$$-r.\Sigma.a^{\lambda+2}b^{\mu-1}c^{\mu-1}d^{0}-2r.\Sigma.a^{\mu}b^{2}c^{\lambda-1}d^{\mu-1}$$

$$+\Sigma.a^{\lambda+3}b^{\mu+1}c^{\mu+1}d^{0}+2.\Sigma.a^{\lambda}b^{\mu+3}c^{\mu+1}d$$

$$+2.\Sigma.a^{\mu}b^{\mu+3}cd^{\lambda+1}+2.\Sigma.a^{\mu}b^{3}c^{\lambda+1}d^{\mu+1}\ ;$$

où le signe $\overline{\Sigma}$ représente, comme auparavant, des sommes composées de *vingt* termes chacune.

Maintenant, si l'on fait $\lambda=3$, $\mu=1$, on aura, en employant les dénominations posées dans le sixième §;

$$2P^2=-r\Omega_{(1)}-2r\Omega_{(4)}+\Omega_{(7)}+2.\overline{\Sigma}.a^3b^4c^2d$$
$$+2\Omega_{(11)}+2.\overline{\Sigma}.ab^3c^4d^2 .$$

Le second membre de l'équation [9] posée dans le premier § donne les mêmes vingt termes, soit en y faisant

$$\lambda=3 , \quad \mu=4 , \quad \zeta=2 , \quad \beta=1 ;$$
$$\lambda=1 , \quad \mu=3 , \quad \zeta=4 , \quad \beta=2 ;$$

soit en y faisant

$$\lambda=2 , \quad \mu=1 , \quad \zeta=3 , \quad \beta=4 ;$$

donc nous avons

$$\overline{\Sigma}.a^3b^4c^2d=\overline{\Sigma}.a^2bc^3d^4=\Omega_{(12)} ;$$

et par conséquent

$$[2] \ldots\ldots 2P^2=-4rS_{(5)}-2r\Omega_{(1)}+\Omega_{(5)}+2\Omega_{(11)}+4\Omega_{(12)} ,$$

en observant que $\Omega_{(1)}=4S_{(5)}$.

En multipliant les deux membres de cette équation par P, nous aurons la valeur de $2P^3$. Pour cela, il faut d'abord remarquer, que, en faisant successivement $\lambda=1$, $\mu=2$; $\lambda=6$, $\mu=2$, la formule précédente désignée par [1] donne;

$$P.\Omega_{(4)}=-r.\Omega_{(3)}-2r.\overline{\Sigma}.a^2b^2c^0d+\Omega_{(6)}+2.\overline{\Sigma}.ab^5c^3d$$
$$+2.\overline{\Sigma}.a^2b^5cd^2+2.\Omega_{(13)} ;$$

$$P.\Omega_{(5)}=-r.\Omega_{(8)}-2r.\overline{\Sigma}.a^2b^2c^5d+\overline{\Sigma}.a^9b^3c^2d^0$$
$$+2.\overline{\Sigma}.a^6b^5c^3d+2.\overline{\Sigma}.a^2b^5cd^7+2.\overline{\Sigma}.a^2b^3c^1d^3 .$$

Mais nous avons

$$\overline{\Sigma}.a^2b^2c^0d=\overline{\Sigma}.a\,b^2c^2d^0=\Omega_{(4)} ;$$
$$\overline{\Sigma}.a\,b^5c^3d=\overline{\Sigma}.a\,b\,c^5d^3=\Omega_{(15)} ;$$
$$\overline{\Sigma}.a^2b^5c\,d^2=\overline{\Sigma}.a^2b^2c^5d=\overline{\Sigma}.a\,b^2c^2d^5=\Omega_{(14)} ;$$

donc en faisant

$$\Sigma . a^9 b^3 c^3 d^0 = \Omega_{(16)} ; \qquad \Sigma . a^6 b^5 c^3 d = \Omega_{(17)} ;$$

$$\Sigma . a^5 b^5 c d^3 = \Omega_{(18)} ; \qquad \Sigma . a^5 b^3 c^1 d^3 = \Omega_{(19)} ;$$

l'on aura

$$P . \Omega_{(4)} = -r . \Omega_{(3)} - 2 . r \Omega_{(4)} + \Omega_{(6)} + 2 . \Omega_{(15)} + 2 . \Omega_{(14)} + 2 . \Omega_{(13)} ;$$

$$P . \Omega_{(5)} = -r . \Omega_{(8)} - 2r . \Omega_{(14)} + \Omega_{(16)} + 2 . \Omega_{(17)} + 2 . \Omega_{(18)} + 2 . \Omega_{(19)} .$$

Il suit de là, que

$$[3] \ldots\ldots \quad 2 . P^3 = -4r . PS_{(5)} + 2r^2 . \Omega_{(3)} + 4r^2 . \Omega_{(4)} - r \left\{ 2 . \Omega_{(6)} + \Omega_{(8)} + 4 . \Omega_{(13)} + 6 . \Omega_{(14)} + 4 . \Omega_{(15)} \right\} + \Omega_{(16)} + 2 . \Omega_{(17)} + 2 . \Omega_{(18)} + 2 . \Omega_{(19)} + 2 P . \Omega_{(11)} + 4 P . \Omega_{(12)} .$$

Maintenant nous établirons une formule générale pour former le produit

$$P . \Sigma . a^\lambda b^\mu c^\xi d^\beta .$$

Pour cela il faut observer, que les quarante termes nés du produit de $X_1^3 (X_2 X_5 + X_3 X_4)$ par $\Sigma . a^\lambda b^\mu c^\xi d^\beta$ peuvent être disposés ainsi qu'il suit ;

$$[4]\ \ldots\ldots \qquad X_1^3 (X_2 X_5 + X_3 X_4)\,\Sigma . a^\lambda b^\mu c^\zeta d^\beta =$$

$$
\begin{aligned}
&-r \left\{ \begin{array}{l} X_2^\lambda X_1^{\mu+2} X_3^{\zeta-1} X_4^{\beta-1} \\ +X_5^\lambda X_1^{\mu+2} X_4^{\zeta-1} X_3^{\beta-1} \\ +X_3^\lambda X_1^{\mu+2} X_5^{\zeta-1} X_2^{\beta-1} \\ +X_4^\lambda X_1^{\mu+2} X_2^{\zeta-1} X_5^{\beta-1} \end{array} \right. \qquad -r \left\{ \begin{array}{l} X_2^\mu X_1^{\zeta+2} X_3^{\beta-1} X_4^{\lambda-1} \\ +X_5^\mu X_1^{\zeta+2} X_4^{\beta-1} X_3^{\lambda-1} \\ +X_3^\mu X_1^{\zeta+2} X_5^{\beta-1} X_2^{\lambda-1} \\ +X_4^\mu X_1^{\zeta+2} X_2^{\beta-1} X_5^{\lambda-1} \end{array} \right. \\
&-r \left\{ \begin{array}{l} X_2^\beta X_1^{\lambda+2} X_3^{\mu-1} X_4^{\zeta-1} \\ +X_5^\beta X_1^{\lambda+2} X_4^{\mu-1} X_3^{\zeta-1} \\ +X_3^\beta X_1^{\lambda+2} X_5^{\mu-1} X_2^{\zeta-1} \\ +X_4^\beta X_1^{\lambda+2} X_2^{\mu-1} X_5^{\zeta-1} \end{array} \right. \qquad -r \left\{ \begin{array}{l} X_2^\zeta X_1^{\beta+2} X_3^{\lambda-1} X_4^{\mu-1} \\ +X_5^\zeta X_1^{\beta+2} X_4^{\lambda-1} X_3^{\mu-1} \\ +X_3^\zeta X_1^{\beta+2} X_5^{\lambda-1} X_2^{\mu-1} \\ +X_4^\zeta X_1^{\beta+2} X_2^{\lambda-1} X_5^{\mu-1} \end{array} \right. \\
&-rX_1^2 \left\{ \begin{array}{l} X_3^{\lambda-1} X_2^\mu X_4^{\zeta-1} X_5^\beta \\ +X_4^{\lambda-1} X_5^\mu X_3^{\zeta-1} X_2^\beta \\ +X_5^{\lambda-1} X_3^\mu X_2^{\zeta-1} X_4^\beta \\ +X_2^{\lambda-1} X_4^\mu X_5^{\zeta-1} X_3^\beta \end{array} \right. \qquad -rX_1^2 \left\{ \begin{array}{l} X_3^{\mu-1} X_2^\zeta X_4^{\beta-1} X_5^\lambda \\ +X_4^{\mu-1} X_5^\zeta X_3^{\beta-1} X_2^\lambda \\ +X_5^{\mu-1} X_3^\zeta X_2^{\beta-1} X_4^\lambda \\ +X_2^{\mu-1} X_4^\zeta X_5^{\beta-1} X_3^\lambda \end{array} \right. \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} X_2^\lambda X_1^{\mu+3} X_3^{\zeta+1} X_4^{\beta+1} \\ +X_5^\lambda X_1^{\mu+3} X_4^{\zeta+1} X_3^{\beta+1} \\ +X_3^\lambda X_1^{\mu+3} X_5^{\zeta+1} X_2^{\beta+1} \\ +X_4^\lambda X_1^{\mu+3} X_2^{\zeta+1} X_5^{\beta+1} \end{array} \right. \qquad + \left\{ \begin{array}{l} X_2^\mu X_1^{\zeta+3} X_3^{\beta+1} X_4^{\lambda+1} \\ +X_5^\mu X_1^{\zeta+3} X_4^{\beta+1} X_3^{\lambda+1} \\ +X_3^\mu X_1^{\zeta+3} X_5^{\beta+1} X_2^{\lambda+1} \\ +X_4^\mu X_1^{\zeta+3} X_2^{\beta+1} X_5^{\lambda+1} \end{array} \right. \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} X_2^\beta X_1^{\lambda+3} X_3^{\mu+1} X_4^{\zeta+1} \\ +X_5^\beta X_1^{\lambda+3} X_4^{\mu+1} X_3^{\zeta+1} \\ +X_3^\beta X_1^{\lambda+3} X_5^{\mu+1} X_2^{\zeta+1} \\ +X_4^\beta X_1^{\lambda+3} X_2^{\mu+1} X_5^{\zeta+1} \end{array} \right. \qquad + \left\{ \begin{array}{l} X_2^\zeta X_1^{\beta+3} X_3^{\lambda+1} X_4^{\mu+1} \\ +X_5^\zeta X_1^{\beta+3} X_4^{\lambda+1} X_3^{\mu+1} \\ +X_3^\zeta X_1^{\beta+3} X_5^{\lambda+1} X_2^{\mu+1} \\ +X_4^\zeta X_1^{\beta+3} X_2^{\lambda+1} X_5^{\mu+1} \end{array} \right. .
\end{aligned}
$$

En nous réservant de déterminer dans chaque cas particulier les deux sommes données par les termes multipliés par $-rX_1^2$, il est facile de voir, que l'on a cette formule; savoir

$$[5] \quad \ldots\ldots\ldots \qquad P.\overline{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu}c^{\zeta}d^{\beta} =$$

$$-r.\overline{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu+2}c^{\zeta-1}d^{\beta-1} - r.\overline{\Sigma}.a^{\mu}b^{\zeta+2}c^{\beta-1}d^{\lambda-1}$$

$$-r.\overline{\Sigma}.a^{\beta}b^{\lambda+2}c^{\mu-1}d^{\zeta-1} - r.\overline{\Sigma}.a^{\zeta}b^{\beta+2}c^{\lambda-1}d^{\mu-1}$$

$$+\ \overline{\Sigma}.a^{\lambda}b^{\mu+3}c^{\zeta+1}d^{\beta+1} + \overline{\Sigma}.a^{\mu}b^{\zeta+3}c^{\beta+1}d^{\lambda+1}$$

$$+\ \overline{\Sigma}.a^{\beta}b^{\lambda+3}c^{\mu+1}d^{\zeta+1} + \overline{\Sigma}.a^{\zeta}b^{\beta+3}c^{\lambda+1}d^{\mu+1}$$

$$-r.\overline{\Sigma}\left\{X_1^{2}\left\{\begin{matrix} X_3^{\lambda-1}X_2^{\mu}X_4^{\zeta-1}X_5^{\beta} \\ +X_4^{\lambda-1}X_5^{\mu}X_3^{\zeta-1}X_2^{\beta} \\ +X_5^{\lambda-1}X_3^{\mu}X_2^{\zeta-1}X_4^{\beta} \\ +X_2^{\lambda-1}X_4^{\mu}X_5^{\zeta-1}X_3^{\beta} \end{matrix}\right.\right\} - r.\overline{\Sigma}\left\{X_1^{2}\left\{\begin{matrix} X_3^{\mu-1}X_2^{\zeta}X_4^{\beta-1}X_5^{\lambda} \\ +X_4^{\mu-1}X_5^{\zeta}X_3^{\beta-1}X_2^{\lambda} \\ +X_5^{\mu-1}X_3^{\zeta}X_2^{\beta-1}X_1^{\lambda} \\ +X_2^{\mu-1}X_4^{\zeta}X_5^{\beta-1}X_3^{\lambda} \end{matrix}\right.\right\}.$$

Cela posé, voici comment on applique cette formule. Soit

$$\lambda=1\ , \qquad \mu=4\ , \qquad \zeta=1\ , \qquad \beta=4\ .$$

L'avant dernier terme devient

$$-2r.\overline{\Sigma}.X_1^{2}(X_2^{4}X_5^{4}+X_3^{4}X_4^{4}) = -r.\overline{\Sigma}.a^{2}b^{4}c^{4}d^{0}\ ;$$

et le dernier devient

$$+2r^{2}.\overline{\Sigma}.X_1(X_2^{3}X_5^{3}+X_3^{3}X_4^{3}) = +r^{2}.\overline{\Sigma}.ab^{2}c^{2}d^{0}\ .$$

Donc nous avons

$$P.\Omega_{(11)} = -2r.\overline{\Sigma}.ab^{6}c^{0}d^{3} - 2r.\overline{\Sigma}.a^{4}b^{3}c^{3}d^{0}$$

$$-r.\Omega_{(7)} + r^{2}.\Omega_{(4)}$$

$$+2.\overline{\Sigma}.ab^{7}c^{2}d^{5} + 2.\overline{\Sigma}.a^{4}b^{4}c^{5}d^{2}\ .$$

Mais nous avons

$$\overline{\Sigma}.a\ b^{6}c^{0}d^{3} = \overline{\Sigma}.a^{6}b^{0}c^{3}d\ = \Omega_{(9)}\ ;$$

$$\overline{\Sigma}.a^{4}b^{3}c^{3}d^{0} = \Omega_{(6)}\ ;$$

$$\overline{\Sigma}.a\ b^{7}c^{2}d^{5} = \overline{\Sigma}.a^{2}b^{5}c\ d^{2} = \Omega_{(18)}\ ;$$

donc en posant

$$\Omega_{(20)} = \overline{\Sigma}.a^{4}b^{4}c^{5}d^{2}\ ,$$

l'on aura

$$[6] \ldots\ldots P.\Omega_{(11)} = -2r.\Omega_{(9)} - 2r.\Omega_{(6)} - r.\Omega_{(7)} + r^2.\Omega_{(4)} + 2.\Omega_{(18)} + 2.\Omega_{(20)} .$$

En faisant

$$\lambda = 2 , \qquad \mu = 1 , \qquad \zeta = 3 , \qquad \beta = 4$$

l'avant dernier terme de la formule [5] donne

$$r^2.\Sigma\left\{X_5^3 X_1 X_4 + X_2^3 X_1 X_3 + X_4^3 X_1 X_2 + X_3^3 X_1 X_5\right\} = r^2.\Sigma.a^2 b c d^6 = r^2\Omega_{(3)} ;$$

et le dernier terme donne

$$-r.\Sigma.X_1^2\left\{X_2^3 X_4^3 X_5^2 + X_5^3 X_3^3 X_2^2 + X_3^3 X_2^3 X_4^2 + X_4^3 X_5^3 X_3^2\right\} = -r.\Sigma.a^2 b^3 c^2 d^3 = -r.\Omega_{(13)} ;$$

partant nous avons

$$P.\Omega_{(11)} = -2r.\Omega_{(13)} + r^2\Omega_{(3)} - r.\Sigma.a b^5 c^3 d - r.\Sigma.a^4 b^4 c^6 d^2 - r.\Sigma.a^3 b^6 c d^6 + \Sigma.a^2 b^4 c^4 d^5 + \Sigma.a b^6 c^5 d^3 + \Sigma.a^4 b^5 c^2 d^4 + \Sigma.a^3 b^7 c^3 d^2 .$$

Et comme l'on a ;

$$\Sigma.a\ b^5 c^3 d = \Sigma.a\ b\ c^5 d^3 = \Omega_{(15)} ;$$

$$\Sigma.a^4 b^4 c^6 d^2 = \Sigma.a^2 b^4 c^4 d^6 = \Omega_{(7)} ;$$

$$\Sigma.a^3 b^6 c\ d^6 = \Sigma.a^6 b^6 c^3 d = \Omega_{(9)} ;$$

$$\Sigma.a^2 b^4 c^4 d^5 = \Sigma.a^4 b^5 c^2 d^4 = \Sigma.a^4 b^4 c^5 d^2 = \Omega_{(20)} ;$$

$$\Sigma.a\ b^6 c^5 d^3 = \Sigma.a^6 b^5 c^2 d = \Omega_{(17)} ;$$

$$\Sigma.a^3 b^7 c^3 d^2 = \Sigma.a^2 b^3 c^7 d^3 = \Omega_{(19)} :$$

l'équation précédente revient à dire que

$$[7] \ldots\ldots \quad P.\Omega_{(12)} = -2r.\Omega_{(13)} + r^2.\Omega_{(3)} - r.\Omega_{(15)} - r.\Omega_{(7)} - r.\Omega_{(9)} + 2.\Omega_{(20)} + \Omega_{(17)} + \Omega_{(19)} .$$

Les équations [6] et [7] donnent

$$[8] \ldots\ldots\ldots \quad 2P.\Omega_{(11)} + 4P.\Omega_{(12)} = -r\left\{4.\Omega_{(6)} + 6.\Omega_{(7)} + 8.\Omega_{(9)} + 8.\Omega_{(13)} + 4.\Omega_{(15)}\right\} + r^2\left\{4.\Omega_{(3)} + 2.\Omega_{(5)}\right\} + 4\left\{\Omega_{(17)} + \Omega_{(18)} + \Omega_{(19)} + 3.\Omega_{(20)}\right\} .$$

En substituant cette valeur dans le second membre de l'équation [3], l'on aura

$$[9] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2P^3 = -4rPS_{(5)} + 6r^2\left\{\Omega_{(3)} + \Omega_{(4)}\right\} - r\left(\begin{array}{l} 6.\Omega_{(6)} + 6.\Omega_{(7)} + \Omega_{(8)} + 8.\Omega_{(9)} + 12.\Omega_{(13)} \\ + 6.\Omega_{(14)} + 8.\Omega_{(15)} \end{array}\right) + \Omega_{(16)} + 6.\Omega_{(17)} + 6.\Omega_{(18)} + 6.\Omega_{(19)} + 12.\Omega_{(20)} .$$

En multipliant par P les deux membres de cette équation on pourra obtenir d'une manière analogue la valeur de P^4. Et en continuant le même procédé on formera les valeurs de P^5 et P^6. Mais on conçoit que le calcul en sera beaucoup plus pénible. Il nous suffit d'en avoir démontré la possibilité, et d'en avoir même facilité l'exécution à l'aide des formules précédentes.

§ IX.

Supposons formée l'équation [13] posée dans le § VII: en représentant par $f(\theta) = 0$ l'équation en θ du quatrième degré; et par $F(P) = 0$ l'équation en P du sixième degré, il faudra ensuite exprimer chacune des fonctions Ω qui entrent dans l'équation $f(\theta) = 0$ par des fonctions rationnelles de P. Pour cela, réduisons l'équation $F(P) = 0$ à celle-ci :

$$0 = 1 + AP + BP^2 + CP^3 + DP^4 + EP^5 + FP^6 = \psi(P) \ ;$$

où l'on a fait

$$A = -\frac{E'}{F'} \ ; \qquad B = \frac{D'}{F'} \ ; \qquad C = -\frac{C'}{F'} \ ;$$

$$D = \frac{B'}{F'} \ ; \qquad E = -\frac{A'}{F'} \ ; \qquad F = \frac{1}{F'} \ .$$

Maintenant, si nous désignons par H une quelconque des fonctions semblables à P, le produit $P^k.H$ (k étant un nombre entier et positif) sera aussi une fonction *semblable* à P et à H qui aura aussi *six* valeurs différentes seulement, que l'on formerait par la permutation des trois racines X_3, X_4, X_5. En désignant par $\overline{\Sigma}.P^k.H$ la somme des *six* valeurs du produit $P^k.H$; la quantité $\overline{\Sigma}.P^k.H$ sera connue par les coefficiens de l'équation du cinquième degré, puisqu'elle constitue une fonction symétrique de ses racines. De là on pourra déduire l'expression de H en fonction de P par cette formule due à Lagrange; savoir

$$[1] \ldots\ldots\ldots \qquad -H = \frac{\Pi(P)}{P^6.\psi'(P)} \ ;$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité;

$$\psi'(P) = A + 2BP + 3CP^2 + 4DP^3 + 5EP^4 + 6FP^5 \ ;$$

$$\Pi(P) = V_{(6)} + PV_{(5)} + P^2V_{(4)} + P^3V_{(3)} + P^4V_{(2)} + P^5V_{(1)} \ ;$$

$$V_{(1)} = \overline{\Sigma}.H + A.\overline{\Sigma}.PH + B.\overline{\Sigma}.P^2H + C.\overline{\Sigma}.P^3H + D.\overline{\Sigma}.P^4H + E.\overline{\Sigma}.P^5H \ ;$$

$$V_{(2)} = \overline{\Sigma}.PH + A.\overline{\Sigma}.P^2H + B.\overline{\Sigma}.P^3H + C.\overline{\Sigma}.P^4H + D.\overline{\Sigma}.P^5H \ ;$$

$$V_{(3)} = \overline{\Sigma}.P^2H + A.\overline{\Sigma}.P^3H + B.\overline{\Sigma}.P^4H + C.\overline{\Sigma}.P^5H \ ;$$

$$V_{(4)} = \overline{\Sigma}.P^3H + A.\overline{\Sigma}.P^4H + B.\overline{\Sigma}.P^5H \ ;$$

$$V_{(5)} = \overline{\Sigma}.P^4H + A.\overline{\Sigma}.P^5H \ ;$$

$$V_{(6)} = \overline{\Sigma}.P^5H \ .$$

Le dénominateur de la formule [1] renferme les puissances P^6, P^7, ... P^{11} de P; mais à l'aide de l'équation $\psi(P) = 0$, on peut

abaisser toutes ces puissances de P au-dessous de la sixième; et réduire la formule [1] à la forme

$$[2] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad -H=\frac{\Pi(P)}{\Gamma(P)} ,$$

où $\Pi(P)$ et $\Gamma(P)$ sont deux polynomes du cinquième degré relativement à P.

Donc en établissant l'équation

$$\Pi(P)=\Gamma(P)\left\{M_{(0)}+M_{(1)}P+M_{(2)}P^2+M_{(3)}P^3+M_{(4)}P^4+M_{(5)}P^5\right\} ,$$

et abaissant ensuite, dans le second membre, les puissances de P, à l'aide de l'équation $\psi(P)=0$, on aura, par la comparaison entre les coefficiens des mêmes puissances de P, six équations du premier degré pour déterminer les six coefficiens $M_{(0)}$, $M_{(1)}$, ... $M_{(5)}$, ce qui donnera

$$[3] \ldots \quad -H=M_{(0)}+M_{(1)}P+M_{(2)}P^2+M_{(3)}P^3+M_{(4)}P^4+M_{(5)}P^5 .$$

On voit par là qu'il est possible de réduire les coefficiens de l'équation $f(\theta)=0$, du quatrième degré, à des fonctions *entières* et *rationnelles* de P. Mais un tel calcul est impraticable par son excessive longueur; et, après avoir pesé toutes les difficultés de l'exécution, on est forcé de considérer toute cette théorie comme une véritable Utopie.

Turin, le 29 septembre 1853.

MÉMOIRE

SUR

LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

À LA SURFACE INTÉRIEURE ET SPHÉRIQUE D'UNE SPHÈRE CREUSE DE MÉTAL

ET À LA SURFACE D'UNE AUTRE SPHÈRE CONDUCTRICE ÉLECTRISÉE QUE L'ON TIENT ISOLÉE DANS SA CAVITÉ

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la Séance du 28 avril 1854.

CHAPITRE PREMIER

Exposition des formules générales.

§ I.

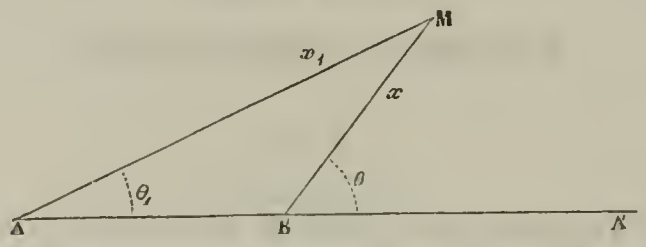
En 1845 j'ai publié dans le Tome VII des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin (Nouvelle Série) un ouvrage fort étendu sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices que l'on tient isolées et séparées dans l'espace. Maintenant, je me propose de faire voir les modifications qu'il faut faire subir à la même analyse pour l'adapter au cas où les deux surfaces sphériques en présence, électrisées d'abord directement et ensuite par leur influence réciproque,

sont placées de manière que la plus petite est entourée par la plus grande, au moyen d'une sphère creuse dont l'épaisseur est uniforme.

Considérons donc une sphère du rayon a, formée d'une matière conductrice de l'électricité, placée dans une cavité sphérique dont le rayon soit b, et l'épaisseur ε. Nous supposons l'épaisseur ε de la couche sphérique formée d'une matière conductrice de l'électricité. La sphère du rayon a étant électrisée et placée dans la cavité sphérique du rayon b, de manière qu'elle y soit isolée, ainsi que la sphère creuse, il arrivera que les deux surfaces sphériques, ayant a et b pour rayons, deviendront électrisées pour influence, et il s'agit de déterminer la distribution de l'électricité sur ces mêmes surfaces, soit dans le cas particulier du contact, soit dans le cas général de leur séparation. Le cas où elles seraient concentriques est le plus facile; il sera traité à part. Nous désignerons par c la distance de leurs centres; distance toujours comprise entre les limites $c=0$ et $c=b-a$. De sorte que l'on a, en général, $b-a$ plus grand que c.

§ II.

Les circonstances de la question actuelle sont telles, que tout point électrique intérieur à la sphère du rayon a est aussi intérieur à la sphère du rayon b. Et tout point électrique appartenant à la couche métallique, dont l'épaisseur est ε, est extérieur à la fois aux deux mêmes surfaces.



Soit x la distance au centre B de la sphère du rayon a de tout point M qui lui est intérieur; et x_1 la distance du même point au centre A de la sphère du rayon b. Le triangle formé par les trois lignes c, x, x_1 étant ABM; si l'on fait $MBA'=\theta$; $MAA'=\theta_1$; l'on aura, en posant $\cos\theta=\mu$; $\cos\theta_1=\mu_1$, ces équations

$$\mu_1 = \frac{c + \mu x}{x_1} \; ;$$

$$x_1 = \sqrt{c^2 + 2c\mu x + x^2} \; ; \qquad x = \sqrt{c^2 - 2c\mu_1 x_1 + x_1^2} \; .$$

En supposant le point M intérieur à la sphère du rayon a, si nous désignons par U la somme de tous les élémens électriques, divisé chacun par sa distance au point M, on sait que l'on a pour U une expression de la forme

$$[1] \ldots\ldots \qquad U = 4\pi a . \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + 4\pi b . \Phi\left(\mu_1, \frac{x_1}{b}\right) \; ;$$

φ et Φ étant deux fonctions différentes; la première des deux variables $\mu, \frac{x}{a}$; la seconde des deux variables $\mu_1, \frac{x_1}{b}$. En désignant par U_1 ce que devient la somme U pour tout point M appartenant à la couche métallique dont l'épaisseur est ε, l'on a

$$[2] \ldots\ldots \qquad U_1 = \frac{4\pi a^2}{x} . \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{4\pi b^2}{x_1} \Phi\left(\mu_1, \frac{b}{x_1}\right) .$$

Pour que l'équilibre du point M puisse avoir lieu dans l'un et l'autre cas, il faudra que les deux fonctions U, U_1 des quatre variables μ, μ_1, x, x_1 se réduisent, chacune, à une quantité *constante;* ce qui exige une mutuelle et complète destruction des quantités variables.

La recherche des deux fonctions φ et Φ qui remplissent cette condition est facilitée par la circonstance, que les couches électriques sont évidemment terminées par des surfaces de révolution; de sorte que le cas général dépend de la solution du cas particulier où l'on considère l'action de ces couches sur les points situés sur l'axe des x, c'est-à-dire sur la ligne désignée par c, prolongée à droite et à gauche. Pour les points situés de B vers A', l'on a $\vartheta = 0$, et par conséquent $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$\varphi\left(1, \frac{x}{a}\right) = f\left(\frac{x}{a}\right) \; : \qquad \Phi\left(1, \frac{x_1}{b}\right) = F\left(\frac{x_1}{b}\right) \; :$$

et si l'on remarque que, dans ce cas, $x_1 = c + x$; les deux équations aux différences finies, qu'il faudra intégrer, seront celles-ci ;

$$[3] \ldots\ldots \qquad af\left(\frac{x}{a}\right)+bF\left(\frac{c+x}{b}\right)=\frac{h'}{4\pi}=h \ ;$$

$$[4] \ldots\ldots \qquad \frac{a^2}{x}f\left(\frac{a}{x}\right)+\frac{b^2}{c+x}F\left(\frac{b}{c+x}\right)=\frac{g'}{4\pi}=g \ ;$$

h et g étant deux quantités constantes dont les valeurs seront ensuite déterminées.

§ III.

Par la combinaison des deux équations [3] et [4], il est facile d'éliminer la fonction F, et d'avoir une équation avec la seule fonction f. En effet; soit

$$\frac{c+x}{b}=\frac{b}{c+x'}, \quad \text{et par conséquent} \quad x=\frac{b^2-c^2-cx'}{c+x'} \ ;$$

l'équation [4] donne

$$\frac{a^2}{b^2-c^2-cx'}f\left(\frac{ac+ax'}{b^2-c^2-cx'}\right)+F\left(\frac{c+x'}{b}\right)=\frac{g}{c+x'} \ ;$$

mais il est clair que l'équation [3] doit subsister en y remplaçant x par x'; de sorte que l'on a

$$\frac{a}{b}f\left(\frac{x'}{a}\right)+F\left(\frac{c+x'}{b}\right)=\frac{h}{b} \ :$$

donc, en faisant la différence de ces deux dernières équations, l'on aura

$$\frac{g}{c+x'}-\frac{h}{b}=\frac{a^2}{b^2-c^2-cx'}f\left(\frac{ac+ax'}{b^2-c^2-cx'}\right)-\frac{a}{b}f\left(\frac{x'}{a}\right) .$$

Maintenant, si l'on fait $x'=ax''$, il viendra

$$\frac{g}{c+ax''}-\frac{h}{b}=\frac{a^2}{b^2-c^2-acx''}f\left(\frac{ac+a^2x''}{b^2-c^2-acx''}\right)-\frac{a}{b}f(x'') .$$

Les quantités x, x', a représentent des lignes; et comme nous avons fait $x'=ax''$, il faudra regarder x'' comme un *rapport;* ce qui revient à dire que x'' est une quantité indépendante de l'unité de longueur.

Ainsi, en écrivant x au lieu de x'', nous aurons

$$[5] \ldots\ldots \quad af(x)-\frac{ba^2}{b^2-c^2-acx}f\left(\frac{ac+a^2x}{b^2-c^2-acx}\right)=h-\frac{bg}{c+ax} ;$$

où il faudra considérer x comme un rapport. Et si l'on veut que la signification de la lettre x soit la même qui lui est attribuée dans les équations [3] et [4], il faudra, dans cette dernière équation, remplacer x par $\frac{x}{a}$, et écrire

$$[6] \ldots\ldots \quad af\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{ba^2}{b^2-c^2-cx}f\left(\frac{ac+ax}{b^2-c^2-cx}\right)=h-\frac{bg}{c+x} .$$

En faisant $\frac{c+x}{b}=u$, l'équation [3] donne

$$[7] \ldots\ldots\ldots \quad F(u)=\frac{h}{b}-\frac{a}{b}f\left(\frac{bu-c}{a}\right) .$$

On pourra donc former la fonction F. dès que l'on connaîtra explicitement la fonction f. Et en faisant

$$F'(u)=\frac{d.F(u)}{du} ; \qquad f'(x)=\frac{d.f(x)}{dx} ,$$

il est manifeste que l'équation [7] donne

$$[8] \ldots\ldots\ldots \quad F'(u)=-f'\left(\frac{bu-c}{a}\right) .$$

En faisant

$$[9] \ldots\ldots\ldots \quad \frac{b^2-c^2}{a}=k ,$$

l'équation [5] devient

$$[10] \ldots\ldots\ldots \quad f(x)-\frac{b}{k-cx}f\left(\frac{c+ax}{k-cx}\right)=\frac{h}{a}-g\frac{b}{a}.\frac{1}{c+ax} .$$

La quantité k sera nécessairement positive, puisque la distance c des deux centres ne peut jamais surpasser $b-a$. Or en posant

$$[11] \ldots\ldots\ldots \quad f(x)=f_1(x)+\frac{h}{a}f_2(x)-g\frac{b}{a}f_3(x) ,$$

il est clair que l'équation [10] sera satisfaite si l'on a ;

$$f_1(x)-\frac{b}{k-cx}f_1\left(\frac{c+ax}{k-cx}\right)=0\ ;$$

$$f_2(x)-\frac{b}{k-cx}f_2\left(\frac{c+ax}{k-cx}\right)=1\ ;$$

$$f_3(x)-\frac{b}{k-cx}f_3\left(\frac{c+ax}{k-cx}\right)=\frac{1}{c+ax}\ .$$

En changeant le signe de a dans les équations analogues posées dans les pages 165, 168, et 172 de mon Mémoire de 1845 on fait coïncider ces dernières avec celles-ci, puisque ayant fait $k=\frac{c^2-b^2}{a}$ à la pag. 165, l'on a, par le changement du signe de a, la même valeur de k qui est définie par l'équation [9]. On peut donc former la fonction $f(x)$, qui satisfait à l'équation [10], en faisant d'abord

$$[12]\ \ldots\ f(x)=\frac{P}{\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{c}\right)x+x^2}}+\frac{h}{a}f_2(x)-g\frac{b}{a}f_3(x)\ ,$$

où P doit être : ou une constante arbitraire fonction des trois paramètres a, b, c ; ou une fonction de x assujétie à la condition de demeurer la même par le changement de x en $\frac{c+ax}{k-cx}$. Ensuite il faut déterminer $f_2(x)$, $f_3(x)$ par la considération du développement des deux fractions rationnelles

$$\frac{k-b^2x}{1-(k+a)x+b^2x^2}\ ,\qquad \frac{c}{1-(k+a)x+b^2x^2}\ ,$$

conformément au procédé suivi dans les pages 170-171 de mon Mémoire déjà cité.

§ IV.

Il suit de là, qu'en déterminant α et α' d'après les équations

$$[13] \ldots\ldots \quad -2a.\alpha = (c^2-b^2-a^2)+\sqrt{(c^2-b^2-a^2)^2-4a^2b^2} \ ;$$

$$[14] \ldots\ldots \quad -2a.\alpha' = (c^2-b^2-a^2)-\sqrt{(c^2-b^2-a^2)^2-4a^2b^2} \ ;$$

l'on a

$$f_2(x) = (\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^n}{(-a+\alpha-cx)\alpha^n-(-a+\alpha'-cx)\alpha'^n} \ ;$$

$$bf_3(x) = (\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^{n+1}}{(c+ax-\alpha'x)\alpha^{n+1}-(c+ax-\alpha x)\alpha'^{n+1}} \ ;$$

ou bien

$$[15] \ldots\ldots\ldots \quad f_2(x) = (\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^n}{p_{(n)}-q_{(n)}x} \ ;$$

$$[16] \ldots\ldots\ldots \quad bf_3(x) = (\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^{n+1}}{p'_{(n)}-q'_{(n)}x} \ ;$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$p_{(n)} = (\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1})-a(\alpha^n-\alpha'^n) \ ;$$

$$q_{(n)} = c(\alpha^n-\alpha'^n) \ ;$$

$$p'_{(n)} = c(\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1}) \ :$$

$$q'_{(n)} = b^2(\alpha^n-\alpha'^n)-a(\alpha^{n+1}-\alpha'^{n+1}) \ ,$$

et observant que $\alpha\alpha' = b^2$.

Ces valeurs étant substituées dans le second membre de l'équation [12], nous avons

$$[17] \ldots\ldots f(x) = \frac{P}{\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{c}\right)x+x^2}} + \frac{h}{a}(\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^n}{p_{(n)}-q_{(n)}x} - \frac{g}{a}(\alpha-\alpha').\sum_0^\infty \frac{b^{n+1}}{p'_{(n)}-q'_{(n)}x} \ ,$$

pour l'intégrale complète de l'équation [10], à l'aide de deux suites infinies.

Pour pouvoir sommer ces séries, il faut observer que

$$\frac{b^n}{p_{(n)}-q_{(n)}x}=\frac{\left(\frac{b}{\alpha}\right)^n}{(\alpha-a-cx)-(\alpha'-a+cx)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^n}\;;$$

$$\frac{b^{n+1}}{p'_{(n)}-q'_{(n)}x}=\frac{b.\left(\frac{b}{a}\right)^n}{(c\alpha-b^2x+a.\alpha x)-(c\alpha'+a\alpha'x-b^2x)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^n}\;;$$

et que, en posant $\frac{b}{\alpha}=\gamma$, $\frac{b}{\alpha'}=\gamma'$, l'on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\gamma^2\;;$$

et par conséquent;

$$\frac{b^n}{p_{(n)}-q_{(n)}x}=\frac{\gamma^n}{(\alpha-a-cx)(1-H\gamma^{2n})}\;;$$

$$\frac{b^{n+1}}{p'_{(n)}-q'_{(n)}x}=\frac{b\gamma^n}{(c\alpha+a.\alpha x-b^2x)(1-H'\gamma^{2n})}\;;$$

en posant

$$H=\frac{\alpha'-a+cx}{\alpha-a-cx}\;;$$

$$H'=\frac{c\alpha'+a.\alpha'x-b^2x}{c\alpha+a.\alpha x-b^2x}=\frac{(c+ax-\alpha x)\gamma^2}{c+ax-\alpha'x}\;.$$

De sorte qu'on peut remplacer l'équation [17] par celle ci;

$$[18]\ldots f(x)=\frac{P}{\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{c}\right)x+x^2}}+\frac{h}{a}\cdot\frac{(\alpha-\alpha')}{(\alpha-a-cx)}\cdot\sum_0^\infty\cdot\frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}}$$
$$-\frac{g}{a}\cdot\frac{(\alpha-\alpha')\gamma}{(c+ax-\alpha'x)}\cdot\sum_0^\infty\cdot\frac{\gamma^n}{1-H'\gamma^{2n}}\;.$$

Il ne faut pas perdre de vue que, ici, x désigne un rapport; il faut remplacer x par $\frac{x}{a}$, si l'on veut que cette fonction soit l'intégrale de l'équation [6].

§ V.

Pour sommer ces séries il faudra employer les formules que j'ai données dans le § XXIII de mon Mémoire de 1845. On trouvera de cette manière, qu'en faisant

$$M_1 = a^2 + b^2 - c^2 \; ; \qquad N_1 = M_1^2 - 4a^2b^2 \; ; \qquad \delta = \text{Log.}\left(\frac{2ab}{M_1 - \sqrt{N_1}}\right) ;$$

$$Y_1' = (\alpha - \alpha')(\alpha + \alpha' - 2a - 2cx) \; ;$$

$$Y_1'' = (\alpha - \alpha')\left\{(\alpha + \alpha')(c + ax) - 2b^2x\right\} \; ;$$

$$m = c^2 - \frac{c}{a}(b^2 - a^2 - c^2)x + c^2x^2 \; ;$$

$$m = (\alpha - a - cx)(\alpha' - a - cx) = (c + ax - \alpha x)(c + ax - \alpha' x) \; ;$$

$$k = \frac{b^2 - c^2}{a} \; ;$$

l'on a cette expression de $f(x)$ sous forme finie ; savoir

$$[19] \ldots\ldots \qquad f(x) =$$

$$\frac{h}{2a} - \frac{gb}{2a(c + ax)} + \frac{P}{\sqrt{1 - \left(\frac{k - a}{c}\right)x + x^2}}$$

$$- \frac{h(\alpha - \alpha')}{a\delta} \int_0^1 \frac{dt}{(\alpha - a - cx) - (\alpha' - a - cx)t^2}$$

$$+ \frac{g(\alpha - \alpha')\gamma}{a\delta} \int_0^1 \frac{dt}{(c + ax - \alpha' x) - (c + ax - \alpha x)\gamma^2 t^2}$$

$$- \frac{2h}{a} Y_1' \int_0^\infty \frac{dt \cdot \sin(t\delta)}{\left(e^{2\pi t} - 1\right)\left\{(\alpha - \alpha')^2 + 4m\sin^2(t\delta)\right\}}$$

$$+ \frac{2gb}{a} Y_1'' \int_0^\infty \frac{dt \cdot \sin(t\delta)}{\left(e^{2\pi t} - 1\right)\left\{(\alpha - \alpha')^2(c + ax)^2 + 4mb^2\sin^2(t\delta)\right\}}$$

Les deux derniers termes en donneront quatre avec des diviseurs du premier degré par rapport à la variable x. Alors, tous les termes soumis au signe intégral seront de la forme

$$\frac{dt}{p-qx},$$

et devront être remplacés par

$$\frac{dt}{\sqrt{p^2+2pq.\mu x+q^2x^2}},$$

pour avoir l'expression de la fonction $\varphi(\mu, x)$. A l'égard du terme multiplié par P, il faut lui appliquer une transformation différente dans le passage de la fonction $f(x)$ à la fonction $\varphi(\mu, x)$. Voici en quoi consiste cette transformation.

§ VI.

Soit

$$\left(1-\left(\frac{k-a}{2c}\right)2x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+Q_1x+Q_2x^2+Q_3x^3+Q_4x^4+\text{etc.};$$

$$(1+2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-P_1x+P_2x^2-P_3x^3+P_4x^4-\text{etc.}$$

En supposant que P soit une quantité indépendante de x, on doit remplacer le premier radical par

$$R=1-P_1Q_1x+P_2Q_2x^2-P_3Q_3x^3+P_4Q_4x^4-\text{etc.},$$

conformément à la règle énoncée au § V de mon Mémoire de 1845. Or il faut observer que cette série est sommable par une intégrale définie. Car en posant;

$$w=\left(\frac{k-a}{2c}\right)\cos\theta+\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{2c}\right)^2}.\sin\theta.\cos\lambda:$$

$$w=\left(\frac{k-a}{2c}\right)\mu+\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{2c}\right)^2}.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\lambda:$$

$$(1+2xw+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-T_1x+T_2x^2-T_3x^3+T_4x^4-\text{etc.},$$

l'on a

$$\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1+2xw+x^2}} = \pi - x\int_0^{\pi} T'_1 d\lambda + x^2 \int_0^{\pi} T'_2 d\lambda - x^3 \int_0^{\pi} T'_3 d\lambda + \text{etc.}$$

Mais il est démontré (Voyez pages 262 et 269 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral* de LEGENDRE) que

$$\int_0^{\pi} T'_1 d\lambda = \pi P_1 Q_1 \; ; \qquad \int_0^{\pi} T'_2 d\lambda = \pi P_2 Q_2 \; ; \qquad \ldots\ldots\ldots ;$$

$$\int_0^{\pi} T'_n d\lambda = \pi P_n Q_n \; .$$

Donc nous avons

$$PR = \frac{P}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1+2xw+x^2}} \; .$$

Mais si cette transformation est incontestable, il faut observer que, dans la question que nous traitons, la quantité w est nécessairement imaginaire puisque l'on a

$$\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}} \; ,$$

et que l'on a $b > a+c$. Ainsi en excluant le cas du contact, où l'on a $b = a+c$, on doit faire $P=0$ afin de faire disparaître de $\varphi(\mu, x)$ ce terme imaginaire.

Au reste, il importe aussi d'observer que, même sans faire $P=0$, la fonction de μ et de x représentée par R, donnerait une quantité nulle dans l'expression de

$$\varphi(\mu, x) + 2x \cdot \frac{d.\varphi(\mu, x)}{dx} \; ,$$

lorsque l'on y fait $x=1$, afin d'avoir l'épaisseur de la couche électrique sur la sphère dont le rayon est égal à l'unité. En effet, nous avons

$$R + 2x \cdot \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\lambda\,(1-x^2)}{(1+2xw+x^2)^{\frac{3}{2}}} \; ,$$

et par conséquent $R+2x\frac{dR}{dx}=0$, lorsque $x=1$. Maintenant j'observe que l'on a

$$\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{c}\right)x+x^2}=\sqrt{(1-x)^2-x\left[\frac{b^2-(a+c)^2}{ac}\right]};$$

et que, par conséquent, ce radical se réduit à la quantité rationnelle $1-x$ dans le cas particulier de $b=a+c$ que je vais analyser à part.

CHAPITRE SECOND.

Analyse
relative au cas du contact des deux surfaces sphériques.

§ VII.

Dans ce cas, où $c=b-a$, les formules exposées aux pages 43-48 de mon Mémoire de 1845, donnent (après avoir fait $a=1$);

$$f_2(x)=b.\sum_0^\infty.\frac{1}{b+n(b-1)-n(b-1)x};$$

$$bf_3(x)=b.\sum_0^\infty.\frac{1}{(n+1)(b-1)-[1+n(b-1)]x};$$

et par conséquent

$$[20]\ldots\ f(x)=\frac{P}{1-x}+bh.\sum_0^\infty.\frac{1}{b+n(b-1)-n(b-1)x}$$
$$-bh.\sum_0^\infty.\frac{1}{(n+1)(b-1)-[1+n(b-1)]x};$$

en observant, que les équations [3] et [4] donnent, en posant $c=b-a$;

$$af(1)+bF(1)=h\ ;\qquad af(1)+bF(1)=g\ ;$$

c'est-à-dire $g=h$.

La formule

$$\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{p+nq}=\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{p-1}}{1-t^{q}}\ ,$$

donnée à la page 48 de mon Mémoire de 1845 donne ici:

$$\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{b+n(b-1)-n(b-1)x}=\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{b-1}}{1-t^{(b-1)(1-x)}}\ ;$$

$$\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{(n+1)(b-1)-[1+n(b-1)]x}=\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{b-2-x}}{1-t^{(b-1)(1-x)}}\ .$$

Donc l'équation (20) sera transformée dans celle-ci:

$$[21]\ \ldots\ldots\quad f(x)=\frac{P}{1-x}+bh\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{b-1}\{1-t^{-1-x}\}}{1-t^{(b-1)(1-x)}}\ .$$

Maintenant, si l'on fait

$$t'=t^{(b-1)(1-x)}\ ,$$

les limites de la nouvelle variable t' seront aussi $t'=0$, $t'=1$, puisque l'on a $b>1$, et que les valeurs de x sont comprises entre -1 et $+1$.

Cette équation donne

$$t^{b}=t'^{\frac{b}{(b-1)(1-x)}}\ ;\qquad t^{-(1+x)}=t'^{-\frac{(1+x)}{(b-1)(1-x)}}\ ;$$

donc en posant

$$[22]\ldots\ldots\begin{cases}X'=\dfrac{b}{(b-1)(1-x)}-1\ ;\\ X''=\dfrac{b-(1+x)}{(b-1)(1-x)}-1=\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{b-2}{(b-1)(1-x)}-1\ ;\end{cases}$$

et écrivant t au lieu de t', nous aurons

$$[23]\ \ldots\ldots\ f(x)=\frac{P}{1-x}-\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\int_{0}^{1}\frac{dt\{(1-t^{X'})-(1-t^{X''})\}}{1-t}\ :$$

La constante arbitraire P doit être déterminée de manière que l'*infini* disparaisse lorsque $x=1$.

Pour cela j'observe, que, d'après la théorie de la fonction *Gamma* de LEGENDRE, si l'on fait

$$Z(u)=\text{Log. }\Gamma(u)\ ; \qquad Z'(u)=\frac{d.Z(u)}{du}\ ,$$

l'on a

$$[24]\ \ldots\ldots \qquad \int_0^1 \frac{dt(1-t^Q)}{1-t}=C+Z'(1+Q)\ ;$$

où $C=0,57721\ldots\ldots\ldots$ (Voyez les pages 45 et 64 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral*).

Pour des valeurs de u plus grandes que l'unité, l'on a la série

$$[25]\ \ldots\ldots\ Z'(u)=\text{Log. }u-\frac{1}{2u}-\frac{A'}{2}\cdot\frac{1}{u^2}+\frac{B'}{4}\cdot\frac{1}{u^4}-\frac{C'}{6}\cdot\frac{1}{u^6}+\text{etc.}\ ;$$

où A', B', C', etc. sont les nombres *Bernoulliens* (Voyez la page 294 du 1.^{er} Volume des *Exercices de Calc. Int.*). Cette série donne

$$Z'(1+X')=\text{Log. }\frac{b}{(b-1)(1-x)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-1)(1-x)}{b}+\text{etc.}\ ;$$

$$Z'(1+X'')=\text{Log. }\frac{b-1-x}{(b-1)(1-x)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-1)(1-x)}{b-1-x}+\text{etc.}\ ;$$

partant nous avons

$$Z'(1+X')-Z'(1+X'')=\text{Log. }\frac{b}{b-1-x}+(1-x)R\ ;$$

où R comprend la totalité des termes multipliés par $1-x$. Mais il est clair, que

$$\text{Log. }\frac{b}{b-1-x}=\text{Log. }b-\text{Log. }(b-2)-\text{Log. }\left(1+\frac{1-x}{b-2}\right)$$

$$=\text{Log. }\frac{b}{b-2}-\left\{\frac{1-x}{b-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{b-2}\right)^2+\text{etc.}\right\}\ ;$$

donc en prenant

$$P=-\frac{bh}{(b-1)}\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right),$$

le second membre de l'équation [23] sera délivré des termes qui deviennent infinis lorsque $x=1$. Ainsi, nous remplacerons l'équation [23] par celle-ci; savoir

$$[26]\ldots\ldots f(x)=-\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right)$$
$$-\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\int_0^1\frac{dt\{(1-t^{X'})-(1-t^{X''})\}}{1-t}.$$

Si l'on veut faire disparaître le diviseur $1-x$, il faut remplacer l'intégrale par les fonctions $Z'(1+X')$, $Z'(1+X'')$ développées, à l'aide de la formule [25]. Alors, en supprimant les termes multipliés par $(1-x)^2$, $(1-x)^3$, etc., l'on a

$$[27]\ldots f(x)=\frac{h}{2}+\frac{bh}{(b-1)(b-2)}-\frac{bh}{2(b-1-x)}-\frac{bh(1-x)}{2(b-1)(b-2)^2}$$
$$+\frac{A'}{2}bh(b-1)(1-x)\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{(b-1-x)^2}\right\}+\text{etc.};$$

où $A'=\frac{1}{6}$.

Cette série donne immédiatement la valeur *finie* de $f(1)$; car, en y faisant $x=1$, il est clair que l'on a

$$[28]\ldots f(1)=\frac{h}{2}+\frac{bh}{(b-1)(b-2)}-\frac{bh}{2(b-2)}=\frac{h}{(b-1)(b-2)}.$$

On obtient avec la même facilité la valeur de $\frac{d.f(x)}{dx}=f(x)$ par la série [27] lorsque $x=1$. Car elle donne

$$[29]\ldots f'(x)=\frac{bh}{2(b-1)(b-2)}-\frac{bh}{2(b-1-x)^2}$$
$$-\frac{A'}{2}bh(b-1)\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{(b-1-x)^2}\right\}+\text{etc.};$$

où faisant $x=1$, l'on a

$$f'(1)=\frac{bh}{2(b-1)(b-2)}-\frac{bh}{2(b-2)^2}-\frac{A'}{2}.hb(b-1)\left\{\frac{1}{b^3}-\frac{1}{(b-2)^3}\right\};$$

ou bien, à cause de $A'=\frac{1}{6}$;

$$[30]\ \ldots\ldots\quad f'(1)=-\frac{bh}{2(b-1)(b-2)}+\frac{h}{3}\cdot\frac{(b-1)^2}{b(b-2)^2}\ .$$

L'épaisseur de la couche électrique au point de contact, sur la sphère du rayon $a=1$, étant exprimée par $f(1)+2f'(1)$, il résulte des équations [28] et [30] que

$$[31]\ \ldots\ldots\quad f(1)+2f'(1)=-\frac{h}{b-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{b}\left(\frac{b-1}{b-2}\right)^2\ .$$

Ce résultat est d'autant plus remarquable qu'on ne voit pas de quelle manière on pourrait le démontrer sans sommer les séries que l'on voit dans le second membre de l'équation [20]. En outre il est remarquable en ce sens, qu'il nous démontre que, dans le cas du contact intérieur, l'épaisseur électrique n'est pas nulle ainsi que cela arrive dans le cas du contact extérieur.

D'après les équations [7] et [8] l'on a

$$F(1)=\frac{h}{b}-\frac{1}{b}f(1)\ ;\qquad F'(1)=-f'(1)\ ;$$

donc en vertu des équations [28] et [30] nous avons

$$[32]\ \ldots\ldots\quad F(1)+2F'(1)=\frac{h}{b}-\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{b}\left(\frac{b-1}{b-2}\right)^2\ .$$

Les formules [31] et [32] nous démontrent que, dans le cas particulier de $b=2$, l'on a

$$f(1)+2f'(1)=+\infty\ ;\qquad F(1)+2F'(1)=-\infty\ .$$

Cette singularité mérite d'être vérifiée par l'expérience.

§ VIII.

L'épaisseur électrique, sur la sphère du rayon $a=1$, au point opposé au point de contact, est exprimée par $f(-1)-2f'(-1)$. L'équation [26], en observant que les équations [22], lorsque $x=-1$, se réduisent à $X'=X''$, donne

$$[33]\ \ldots\ldots \qquad f(-1)=-\frac{bh}{2(b-1)}\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right).$$

En employant la fonction Z', l'équation [26] revient à dire, que

$$[34]\ldots f(x)=-\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\left\{\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right)+Z'(1+X')-Z'(1+X'')\right\}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$Z''(u)=\frac{d.Z'(u)}{du}=\frac{d^2Z(u)}{du^2},$$

et si l'on observe que, d'après les équations [22], l'on a :

$$\frac{dX'}{dx}=\frac{b}{(b-1)(1-x)^2}\ ; \qquad \frac{dX''}{dx}=\frac{b-2}{(b-1)(1-x)^2},$$

on trouvera, en différentiant l'équation [34],

$$[35]\ldots f'(x)=-\frac{bh}{(b-1)(1-x)^2}\left\{\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right)+Z'(1+X')-Z'(1+X'')\right\}$$

$$-\frac{bh}{(b-1)^2(1-x)^3}\left\{bZ''(1+X')-(b-2)Z''(1+X'')\right\}.$$

Or, en faisant $x=-1$, les équations [22] donnent

$$1+X'=1+X''=\frac{b}{2(b-1)},$$

partant nous avons

$$[36]\ldots f'(-1)=-\frac{bh}{4(b-1)}\operatorname{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right)-\frac{bh}{4(b-1)^2}Z''\left(\frac{b}{2b-2}\right).$$

Il suit de là, et de l'équation [33], que

$$[37] \ldots\ldots f(-1)-2f'(-1)=\frac{bh}{2(b-1)^2}Z''\left(\frac{b}{2b-2}\right).$$

En différentiant l'équation [24] on en tire la formule

$$[38] \ldots\ldots Z''(u)=\int_0^1 \frac{dt.t^{u-1}\mathrm{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t};$$

de sorte que l'équation précédente est équivalente à celle-ci;

$$[39] \ldots\ldots f(-1)-2f'(-1)=\frac{bh}{2(b-1)^2}\int_0^1 \frac{dt.t^{\frac{2-b}{2b-2}}\mathrm{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t}.$$

Pour calculer la valeur numérique de la transcendante $Z''(u)$ on pourra employer les séries que j'ai données à la page 85 de mon Mémoire de 1845, si $u<1$; et si $u>1$, l'on a la série

$$[40] \ldots\ldots Z''(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{(u+2)^2}+\frac{1}{(u+3)^2}+\text{etc.}$$

Dans le cas particulier de $b=2$ l'on a $u=1$ et $Z''(1)=\frac{\pi^2}{6}$; et par conséquent

$$[41] \ldots\ldots f(-1)-2f'(-1)=h.\frac{\pi^2}{6}.$$

(Voyez les pages 52 et 53 du second Vol.e des *Exercices de Calc. Int.*).

§ IX.

En faisant $x=0$, les équations [22] donnent $X'=\frac{1}{b-1}$; $X''=0$: il suit de là, et de la formule [26], que

$$[42] \ldots\ldots f(0)=\frac{bh}{(b-1)}\left\{\mathrm{Log.}\left(\frac{b}{b-2}\right)-\int_0^1 \frac{dt\left(1-t^{\frac{1}{b-1}}\right)}{1-t}\right\}.$$

En employant la formule [34], et observant que la formule [24] donne $Z'(1)=-C$, l'on aura

$$[43]\ \ldots\quad f(0)=\frac{bh}{b-1}\left\{\text{Log.}\left(\frac{b}{b-2}\right)-C-Z'\left(\frac{b}{b-1}\right)\right\}.$$

Et en appliquant ici la série [25], nous aurons

$$[44]\ \ldots\quad f(0)=\frac{bh}{b-1}\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}\left(\frac{b-1}{b-2}\right)-C+\frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)+\frac{A'}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2\\ -\frac{B'}{4}\left(\frac{b-1}{b}\right)^4+\frac{C'}{6}\left(\frac{b-1}{b}\right)^6-\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Au reste, si la fraction $\frac{1}{b-1}$ est rationnelle, on pourra avoir la valeur de $f(0)$ en appliquant à la formule [42] la règle donnée aux pages 45 et 46 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral* par LEGENDRE.

D'après la formule [7] nous avons

$$F(0)=\frac{h}{b}-\frac{1}{b}f(1-b)\ ;$$

donc, en appliquant ici la formule [34], nous aurons

$$[45]\ \ldots\quad F(0)=\frac{h}{b}-\frac{h}{b(b-1)}\left\{\text{Log.}\left(\frac{b-2}{b}\right)+Z'\left(\frac{1}{b-1}\right)-Z'\left(\frac{2}{b}\right)\right\}.$$

Soit E la quantité totale d'électricité communiquée aux deux surfaces sphériques; l'on a

$$E=4\pi f(0)+4\pi b^2F(0)\ .$$

Maintenant, si l'on fait $E=E'+E''$, l'on aura

$$\frac{E'}{E}=\frac{1}{1+\dfrac{b^2.F(0)}{f(0)}}\ ;\qquad \frac{E''}{E}=\frac{\dfrac{b^2.F(0)}{f(0)}}{1+\dfrac{b^2.F(0)}{f(0)}}\ .$$

Ces équations, où le second membre est indépendant de la constante h,

déterminent les rapports $\frac{E'}{E}$, $\frac{E''}{E}$ suivant lesquels a lieu le partage de l'électricité totale E entre les deux surfaces sphériques après qu'elles ont été séparées du contact, et soustraites à leur influence réciproque. Ce résultat est susceptible d'être vérifié par l'expérience.

§ X.

Sur la sphère du rayon b l'épaisseur de la couche électrique au point opposé au point de contact est exprimée par

$$F(-1)-2F'(-1)\ ;$$

et, d'après les équations [7] et [8], nous avons

$$[46]\ \ldots\ F(-1)-2F'(-1)=\frac{h}{b}-\frac{1}{b}f(1-2b)+2f'(1-2b)\ .$$

En faisant $x=1-2b$, les formules [22] donnent

$$1+X'=\frac{1}{2(b-1)}\ ;\qquad 1+X''=\frac{3b-2}{2b(b-1)}\ .$$

Cela posé, les formules [34] et [35] donnent

$$[47]\ \ldots\ldots\ F(-1)-2F'(-1)$$
$$=-\frac{h}{4b^2(b-1)^3}\left\{bZ''\left(\frac{1}{2b-2}\right)-(b-2)Z''\left(\frac{3b-2}{2b^2-2b}\right)\right\}\ .$$

Dans le cas particulier de $b=2$, l'on a

$$[48]\ \ldots\ldots\ F(-1)-2F'(-1)=-\frac{h\pi^2}{16}\ ,$$

en observant que

$$Z''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}\ .$$

(Voyez page 53 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral*).

§ XI.

La formule [26] n'a pas la forme convenable pour en tirer l'expression de $\varphi(\mu, x)$ sous forme finie. Mais, en reprenant l'équation (20), on peut aussi sommer les deux suites infinies qu'elle renferme à l'aide de la formule

$$[49] \ldots\ldots \qquad \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{p+nq} = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{p^2+q^2t^2} \cdot \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{n^2+t^2} ,$$

que j'ai établie à la page 49 de mon premier Mémoire publié en 1845. Ainsi en faisant, pour un moment, $q=(b-1)(1-x)$, nous avons

$$\sum_0^\infty \cdot \frac{1}{b+nq} = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{b^2+q^2t^2} \cdot \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{n^2+t^2} ;$$

$$\sum_0^\infty \cdot \frac{1}{(b+x)+nq} = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(b-1-x)^2+q^2t^2} \cdot \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{n^2+t^2} .$$

D'après une formule d'Euler, démontrée vers la fin du Chapitre X du premier Volume de son ouvrage *Introductio in Analysin Infinitorum*, l'on a

$$\sum_0^\infty \cdot \frac{1}{n^2+t^2} = \frac{1}{2t^2} + \frac{\pi}{2t} + \frac{\pi}{t(e^{2\pi t}-1)} .$$

Il suit de là que nous avons

$$[50] \ldots\ldots \qquad \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{b+nq} =$$

$$\frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{b^2+q^2t^2} + q \int_0^\infty \frac{tdt}{b^2+q^2t^2} + 2q \int_0^\infty \frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)(b^2+q^2t^2)} ;$$

$$[51] \ldots\ldots \qquad \sum_0^\infty \cdot \frac{1}{(b-1-x)+nq} =$$

$$\frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{(b-1-x)^2+q^2t^2} + q \int_0^\infty \frac{tdt}{(b-1-x)^2+q^2t^2} + 2q \int_0^\infty \frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)(b-1-x)^2+q^2t^2} .$$

Mais on a

$$\frac{q}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{b^2+q^2t^2}=\frac{1}{2b}\;; \qquad \frac{q}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{(b-1-x)^2+q^2t^2}=\frac{1}{2(b-1-x)}\;;$$

$$q\int_0^\infty \frac{tdt}{b^2+q^2t^4}-q\int_0^\infty \frac{tdt}{(b-1-x)^2+q^2t^4}=\frac{1}{q}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{b}{b-1-x}\right)\;;$$

partant l'équation [20] donne, après avoir substitué pour P sa valeur déterminée par l'équation [25];

$$[52]\ldots f(x)=\frac{h}{2}-\frac{bh}{2(b-1-x)}+\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{b-1-x}{b-2}\right)$$

$$+2bh(b-1)(1-x)\int_0^\infty \frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)\{b^2+(b-1)^2(1-x)^2t^2\}}\,.$$

$$-2bh(b-1)(1-x)\int_0^\infty \frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)\{(b-1-x)^2+(b-1)^2(1-x)^2t^2\}}\,.$$

Maintenant, si l'on observe, que

$$\frac{1}{(1-x)}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{b-1-x}{b-2}\right)=\frac{1}{(1-x)}\,\mathrm{Log.}\left(1+\frac{1-x}{b-2}\right)=\int_0^1 \frac{dt}{(b-2+t)-tx}\;;$$

$$\frac{2(1-x)}{b^2+q^2t^2}=\frac{\sqrt{-1}}{b+qt.\sqrt{-1}}-\frac{\sqrt{-1}}{b-qt.\sqrt{-1}}\;;$$

$$\frac{2(1-x)}{(b-1-x)^2+q^2t^2}=\frac{\sqrt{-1}}{(b-1-x)+qt.\sqrt{-1}}-\frac{\sqrt{-1}}{(b-1-x)-qt.\sqrt{-1}}\;;$$

on pourra exécuter le passage de $f(x)$ à $\varphi(\mu, x)$ en appliquant à chacun des termes de cette fonction la règle rappelée au commencement du § V. Et si l'on veut pousser plus loin cette transformation, on suivra le procédé que j'ai développé au § XV de mon Mémoire de 1845.

§ XII.

Cette analyse exige une explication. L'équation [50] démontre que la valeur de la somme $\sum_{0}^{\infty}.\frac{1}{b+nq}$ est *infinie*, puisque l'on a

$$q\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{b^2+q^2t^2}=\frac{1}{2q}\text{Log.}\left(1+\frac{q^2}{b^2}\infty^2\right).$$

Par la même raison on doit regarder comme *infinie* la valeur de la somme $\sum_{0}^{\infty}.\frac{1}{(b-1-x)+nq}$ déterminée par l'équation [51]. Néanmoins l'*infini* disparaît dans la différence des deux sommes, à cause que l'on a $g=h$, ainsi que nous l'avons fait remarquer dans le § VII. Or en égalant la valeur de $\sum_{0}^{\infty}.\frac{1}{b+nq}$ trouvée dans le § VII à celle fournie par l'équation (50), l'on a cette équation ; savoir

$$\frac{1}{q}\int_{0}^{1}\frac{dt'.t'^{X'}}{1-t'}=\frac{1}{2b}+q\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{b^2+q^2t^2}+2q\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(b^2+q^2t^2)}.$$

Maintenant, en multipliant par q les deux membres de cette équation, et observant que $\frac{b}{q}=1+X'$, on obtient

$$\int_{0}^{1}\frac{dt'(1-t'^{X'})}{1-t'}=-\frac{1}{2(1+X')}-2\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)\{t^2+(1+X')^2\}}$$

$$+\int_{0}^{1}\frac{dt'}{1-t'}-\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{t^2+(1+X')^2}.$$

Mais

$$\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{t^2+(1+X')^2}=\frac{1}{2}\text{Log.}\left\{(1+X')^2+\infty^2\right\}-\text{Log.}(1+X');$$

partant nous avons l'équation

$$\int_0^1 \frac{dt'(1-t'^{X'})}{1-t'} = -\frac{1}{2(1+X')} + \text{Log.}(1+X') - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)\{t^2+(1+X')^2\}}$$

$$+\int_0^1 \frac{dt'}{1-t'} - \text{Log.}\infty = \frac{1}{2}\text{Log.}\left\{1+\left(\frac{1+X'}{\infty}\right)^2\right\}.$$

En développant l'on a

$$\int_0^1 \frac{dt'}{1-t'} = \int_0^1 dt'(1+t'+t'^2+t'^3+\text{etc.})$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\infty} = \text{Log.}\infty + C \quad (*),$$

où $C = 0,57721\ldots\ldots$ (Voyez pages 67 et 68 du second Volume

---

(*) Cette équation revient à dire que

$$C = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{1+x}.$$

Donc en faisant deux hyperboles dont une ait pour équation $y = \frac{1}{1-x}$, et l'autre $y = \frac{1}{1+x}$, il arrivera que l'aire *infinie* de la première comprise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et l'aire infinie de la seconde comprise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, auront une différence finie égale à $C=0,57721\ldots\ldots$ Pour expliquer cette singularité il faut observer que l'équation $y=\frac{1}{1-x}$ passe par l'infini lorsque $x=1$; et que, après ce passage, l'ordonnée devient *négative*; de sorte qu'il y a une interruption dans le cours de la courbe; tandisque dans l'hyperbole $y=\frac{1}{1+x}$ il n'y a aucune interruption depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Au reste la différence

$$\Delta = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x}\right) - \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x}\right) - \text{Log.}(1+x)$$

est telle que, en posant $x=10^6$, l'on a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{10^6} = 14,39272622\ ; \qquad \text{Log.}(1+10^6) = 13,81551156\ ,$$

et par conséquent

$$\Delta = 14,37272622 - 13,81551156 = 0,57721.466\ .$$

Ainsi ce calcul donne seulement les *cinq* premiers chiffres exacts, puisque l'on sait d'ailleurs que $C = 0,57721.566\ldots\ldots$

des *Exercices de Calcul Intégral* de LEGENDRE). Donc l'équation précédente est réductible à celle-ci ;

$$[53]\ldots\ldots \int_0^1 \frac{dt'(1-t'^{X'})}{1-t'} = C - \frac{1}{2(1+X')} + \mathrm{Log.}(1+X') - \frac{1}{2}\mathrm{Log.}\left\{1+\left(\frac{1+X'}{\infty}\right)^2\right\} - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)\{t^2+(1+X')^2\}} .$$

Lorsque la quantité $(1+X')$ n'est pas infinie, le terme $\frac{1}{2}\mathrm{Log.}\left(1+\left(\frac{1+X'}{\infty}\right)^2\right)$ est nul ; et l'on a

$$[54]\ldots\ldots \int_0^1 \frac{dt'(1-t'^{X'})}{1-t'} = C - \frac{1}{2(1+X')} + \mathrm{Log.}(1+X') - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(t^2+(1+X')^2)} ;$$

ce qui s'accorde avec l'équation qui serait donnée par la formule de LEGENDRE (Voyez page 190 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral*). Au reste, en posant

$$[55]\ldots\ldots \int_0^1 \frac{dx(1-x^a)}{1-x} = \varphi(a) ,$$

il est démontré que l'on a l'équation

$$[56]\ldots\ldots \varphi(a) = C + \frac{d.\mathrm{Log.}\,\Gamma(1+a)}{da} = C + \frac{d.\mathrm{Log.}[a\,\Gamma(a)]}{da} = C + \frac{1}{a} + Z'(a) .$$

Dans les cas où $a > 1$, la série [25] donne

$$[57]\ldots\ldots \varphi(a) = C + \mathrm{Log.}\,a + \frac{1}{2a} - \frac{A'}{2a^2} + \frac{B'}{4a^4} - \frac{C'}{6a^6} + \mathrm{etc.}$$

Telle est l'analyse rigoureuse par laquelle on parvient à démontrer,

que l'équation aux différences finies

$$[58] \quad \ldots\ldots \quad f(x) - \frac{b}{2b-1-x(b-1)} f\left(\frac{b-1+x}{2b-1-x(b-1)}\right) = h - \frac{bh}{x+b-1} = -\frac{h(1-x)}{b-1+x}$$

est intégrée, soit en prenant pour $f(x)$ le second membre de l'équation [26], soit en prenant pour $f(x)$ le second membre de l'équation [52].

Dans le cas du contact *extérieur*, l'équation correspondante à celle-ci est :

$$f(x) - \frac{b}{2b+1-x(b+1)} f\left(\frac{b+1-x}{2b+1-x(b+1)}\right) = \frac{h(1-x)}{b+1-x} .$$

Et l'on a pour la fonction $f(x)$ analogue à celle désignée par la formule [26] ;

$$f(x) = -\frac{bh}{(b+1)(1-x)} \int_0^1 \frac{\{(1-t^{X_1'}) - (1-t^{X_1''})\}}{1-t} ;$$

où les valeurs de X_1', X_1'' se forment en remplaçant $b-1$ par $b+1$ dans les équations [22]; c'est-à-dire que

$$X_1' = \frac{b}{(b+1)(1-x)} - 1 ; \qquad X_1'' = \frac{b+1-x}{(b+1)(1-x)} - 1 .$$

On voit, par ce rapprochement, que les deux cas du contact extérieur et intérieur ont une connexion analytique intime : mais il convient de les traiter à part afin d'éviter toute obscurité, et même les nombreuses distinctions qu'il faudrait faire sur le mode d'existence des résultats intermédiaires.

CHAPITRE TROISIÈME.

Analyse du cas particulier où $c=0$.

§ XIII.

Dans ce cas l'équation [5] devient

$$af(x)-\frac{a^2}{b}f\left(\frac{a^2x}{b^2}\right)=h-\frac{gb}{ax}\ .$$

Il est clair qu'elle est satisfaite en prenant

$$f(x)=\frac{b}{a(b-a)}\left(h+\frac{g}{x}\right)\ ;$$

partant l'on a

$$f\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a(b-a)}\left(h+\frac{ga}{x}\right)\ .$$

L'équation [7] donne

$$F(u)=\frac{h}{b}-\frac{1}{(b-a)}\left(h+\frac{ga}{bu}\right)\ .$$

Nous avons donc

$$f'(x)=\frac{d.f(x)}{dx}=-\frac{b}{a(b-a)}\cdot\frac{g}{x^2}\ ;$$

$$F'(u)=\frac{d.F(u)}{du}=\frac{ga}{b(b-a)}\cdot\frac{1}{u^2}\ ;$$

partant

$$f(x)+2xf'(x)=\frac{b}{a(b-a)}\left(h-\frac{g}{x}\right)\ ;$$

$$F(u)+2uF'(u)=\frac{h}{b}-\frac{1}{(b-a)}\left(h-\frac{ga}{bu}\right)\ .$$

Donc nous avons

$$f(1)+2f'(1)=\frac{b}{a(b-a)}(h-g)\ ;$$

$$f(-1)-2f'(-1)=\frac{b}{a(b-a)}(h+g)\ ;$$

$$F(1)+2F'(1)=\frac{h}{b}-\frac{1}{(b-a)}\left(h-\frac{ga}{b}\right);$$

$$F(-1)-2F(-1)=\frac{h}{b}-\frac{1}{(b-a)}\left(h+\frac{ga}{b}\right).$$

Comme il n'y a aucune raison pour que les épaisseurs de la couche électrique sur les deux points opposés soient inégales, il faut nécessairement poser $g=0$, afin de faire disparaître cette inégalité incompatible. Alors l'on a

$$f(x)=\frac{bh}{a(b-a)}; \qquad f'(x)=0;$$

$$F(u)=\frac{h}{b}-\frac{h}{b-a}; \qquad F'(u)=0.$$

Donc, dans ce cas, les deux couches électriques disséminées sur la surface sphérique du rayon a, et sur celle du rayon b ont chacune une épaisseur uniforme: et, de plus, elles n'exercent aucune action, ni sur les points intérieurs à la sphère creuse, ni sur les points qui lui sont extérieurs. L'action, qui se manifesterait sur les points extérieurs à la sphère creuse, serait due à la couche électrique disséminée sur sa surface extérieure, dont le rayon est égal à $b+\varepsilon$. Voici comment on peut déterminer l'épaisseur et l'action de cette couche, quelle que soit la distance c des deux centres.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Distribution de l'électricité à la surface extérieure de la sphère creuse.

§ XIV.

D'abord il est clair que l'état d'équilibre de cette couche et celui des deux autres couches, exige qu'elle ne puisse exercer aucune action sur tout point électrique placé d'une manière quelconque dans la cavité de la sphère creuse. Donc, en désignant par z' l'épaisseur de cette

couche, son expression doit être de la forme

$$z' = \beta \left\{ 1 + A_{(2)} Y^{(2)} + 2 A_{(3)} Y^{(3)} + 3 A_{(4)} Y^{(4)} + \text{etc.} \right\} ;$$

où $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$, etc. sont des fonctions de deux variables semblables à celles employées dans la *Théorie de la figure de la Terre*. Les coefficiens $A_{(2)}$, $A_{(3)}$, etc. sont constans, ainsi que le facteur commun β qui représente l'épaisseur moyenne.

En désignant par V_1 la somme des élémens électriques de cette couche, divisé chacun par sa distance à un point attiré placé à la distance r du centre de la sphère creuse, de manière que l'on ait $r > b + \varepsilon$, l'on a, comme l'on sait ;

$$V_1 = \frac{4\pi\beta.(b+\varepsilon)^2}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{b+\varepsilon}{r}\right)^2 A_{(2)} Y^{(2)} + \left(\frac{b+\varepsilon}{r}\right)^3 A_{(3)} Y^{(3)} + \text{etc.} \right\} .$$

Dans le cas actuel, s'il arrive que l'épaisseur de la couche soit la même sur tous les points d'un même parallèle, les fonctions $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$, etc. seront fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire de l'angle ω formé par un rayon quelconque $b + \varepsilon$ avec une ligne fixe de position. D'après cette considération, si l'on fait $\cos.\omega = x$, on sait que l'on a

$$Y^{(2)} = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} ; \qquad Y^{(3)} = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x ;$$

et en général ;

$$Y^{(n)} = \frac{1.3.5.\ldots.2n-1}{1.2.3.\ldots.n} \left\{ x^n - \frac{n.n-1}{2.(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \text{etc.} \right\} .$$

Sous forme concise l'on a

$$Y^{(n)} = \frac{1}{2^n (1.2.3.\ldots.n)} \cdot \frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n} .$$

Pour que la couche soit sphérique, il faudra que l'on ait $A_{(2)} = 0$, $A_{(3)} = 0$, etc. Mais il n'y a ici aucune condition qui force de prendre ces coefficiens absolument nuls. J'ignore s'il y a des expériences capables de mieux fixer les idées sur ce point.

Cependant on peut démontrer que si des corps électrisés, mais non conducteurs de l'électricité, sont placés en dehors de la sphère creuse, ils ne produiront aucun changement, ni dans l'état électrique de sa surface intérieure, ni dans l'état électrique de la sphère placée dans sa cavité. L'action de ces corps changera seulement, par influence, l'état électrique de la surface extérieure de la sphère creuse; de manière que, si l'on nomme V le *potentiat* électrique des corps extérieurs, et

$$V = V_0 + rV_1 + r^2V_2 + r^3V_3 + \text{etc.}$$

son développement, l'on aura

$$\varepsilon' = \frac{E+E'}{4\pi(b+\varepsilon)^2} - \frac{1}{4\pi}\left\{3V_1 + 5(b+\varepsilon)V_2 + 7(b+\varepsilon)^2V_3 + \text{etc.}\right\}$$

pour expression de l'épaisseur de la couche électrique en un point quelconque de la surface extérieure de la sphère creuse. Ici E désigne la quantité totale de l'électricité communiquée directement à la sphère creuse, et E' celle communiquée à la sphère placée dans sa cavité. Cette proposition est une conséquence fort simple d'une autre proposition plus générale démontrée en 1824 par Poisson (Voyez le *Bulletin de la Société Philomatique* pour le mois d'avril de cette année).

Remarque sur les formules [7] *et* [19].

§ XV.

La formule [7], en y faisant $u = 0$, donne

$$F(0) = \frac{h}{b} - \frac{a}{b} f\left(-\frac{c}{a}\right).$$

D'un autre côté la formule [19], en posant $x = -\frac{c}{a}$, nous fait voir que l'on aurait une valeur *infinie* pour $f\left(-\frac{c}{a}\right)$. Or cela est inadmissible, puisque la masse totale $4\pi b^2 F(0)$ de l'électricité répandue sur la surface sphérique du rayon b est finie. Donc pour faire disparaître l'infini qui se présente dans l'expression de $F(0)$, il faudra faire

$g=0$. Ainsi, dans le cas général, l'expression de $f(x)$ doit être réduite à celle-ci ;

$$[59] \ldots\ldots \quad f(x)=\frac{h}{2a}+\frac{P}{\sqrt{1-\left(\frac{k-a}{c}\right)x+x^2}}$$

$$-\frac{h(\alpha-\alpha')}{a\delta}\int_0^1\frac{dt}{(\alpha-a-cx)-(\alpha'-a-cx)t^2}$$

$$-\frac{2h}{a}\gamma_1'\int_0^\infty\frac{dt.\sin.(\delta t)}{(e^{2\pi t}-1)\{(\alpha-\gamma')^2+4m\sin.^2(\delta t)\}} .$$

C'est avec cette formule que l'on pourra entreprendre des recherches analogues à celles que j'ai exposées dans mon Mémoire de 1845.

En posant $c=b-a-\Delta$, l'on a

$$M_1=2ab+2\Delta(b-a)-\Delta^2 ;$$

$$N_1=4ab\Delta\left\{2(b-a)-\Delta\right\}+\Delta^2\left\{2(b-\alpha)-\Delta\right\}^2 .$$

En supposant Δ quantité fort petite, il suffira de prendre

$$M_1=2ab ; \qquad \sqrt{N_1}=2ab.\sqrt{\frac{2(b-a)}{ab}}.\sqrt{\Delta} ;$$

ce qui donne

$$-\delta=\text{Log.}\left\{1-\sqrt{\frac{2(b-a)}{ab}}.\Delta\right\} ;$$

c'est-à-dire

$$[60] \ldots\ldots \quad \delta=\sqrt{\frac{2(b-a)}{ab}}.\sqrt{\Delta} .$$

En partant de là on peut adapter au cas actuel une analyse semblable à celle que j'ai exposée dans le § XXV de mon premier Mémoire.

L'équation $g=0$, que nous venons de démontrer, est conforme à une autre circonstance qui mérite de ne pas être passée sous silence. Voici en quoi elle consiste.

Je reprends l'équation [2] ; savoir

$$U_1 = \frac{4\pi a^2}{x}\varphi(\mu,\ x) + \frac{4\pi b^2}{x_1}\Phi\left(\mu_1,\ \frac{b}{x_1}\right);$$

et j'observe que, en vertu des équations

$$x = \sqrt{c^2 - 2c\mu_1 x_1 + x_1^2}\ ; \qquad \mu = \frac{\mu_1 x_1 - c}{x}\ ,$$

l'on a (en fonction de x_1 et de μ_1)

$$U_1 = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{c^2 - 2c\mu_1 x_1 + x_1^2}}\varphi\left(\frac{\mu_1 x_1 - c}{\sqrt{c^2 - 2c\mu_1 x_1 + x_1^2}}\ ,\ \sqrt{c^2 - 2c\mu x_1 + x_1^2}\right)$$
$$+ \frac{4\pi b^2}{x_1}\Phi\left(\mu_1,\ \frac{b}{x_1}\right).$$

Cela posé, si l'on imagine la fonction φ développée suivant les puissances de x_1, il faudra que l'on ait une série de la forme

$$\varphi = B_{(0)} + B_{(1)}x_1 + \frac{B_{(2)}}{x_1} + \frac{B_{(3)}}{x_1^2} + \frac{B_{(4)}}{x_1^3} + \text{etc.}$$

Car, si l'on avait $B_{(1)} = 0$, l'équation [4] serait impossible, à moins d'avoir, en général, $g = 0$, puisque la fonction Φ, développée, est nécessairement de la forme

$$\Phi = M_{(0)} + \frac{M_{(1)}}{x_1} + \frac{M_{(2)}}{x_1^2} + \frac{M_{(3)}}{x_1^3} + \text{etc.}$$

Or, nous avons démontré que l'on doit faire $g = 0$ pour éviter l'infini dans l'expression de $F(0)$: donc l'équation $g = 0$ entraîne avec elle la conséquence que l'on doit aussi avoir $B_{(1)} = 0$. Mais, dans le cas particulier du contact, pour lequel la valeur de g n'est pas nulle, il arrivera que le coefficient analogue à celui désigné par $B_{(1)}$ ne sera pas égal à zéro. On conçoit que ces réflexions ne pouvaient pas être placées au commencement de ce Mémoire sans occasioner une obscurité qui ne pouvait être dissipée, que par l'exposition subséquente de toute l'analyse. En posant $g = 0$, l'équation [18] devenait beaucoup plus simple; mais cela aurait exigé une explication prolixe pour faire voir que l'on ne doit pas faire $g = 0$ dans le cas particulier du contact, où l'on a $g = h$, sans que cette constante puisse être nulle.

Remarques sur la formule

$$\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{p+nq}=\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{p-1}}{1-t^{q}}\,.$$

§ XVI.

Cette formule employée dans le § VII exige une explication. Lorsque q est une quantité positive, si l'on fait $t'=t^{q}$, les limites de la nouvelle variable t' seront encore $t'=0$, $t'=1$. Donc, en écrivant de nouveau t au lieu de t', après avoir exécuté la transformation, nous aurons l'équation

$$q\,.\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{p+nq}=\int_{0}^{1}\frac{t^{\frac{p}{q}-1}dt}{1-t}\,.$$

Or, il est aisé de démontrer, que le second membre de cette équation renferme toujours l'*infini Logarithmique*. En effet, cela revient à dire, que

$$q\,.\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{p+nq}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{1-t}-\int_{0}^{1}\frac{dt\left(1-t^{\frac{p}{q}-1}\right)}{1-t}\,.$$

Le premier terme du second membre de cette équation est évidemment infini ; et le second terme a toujours une valeur finie que l'on peut évaluer par les transcendantes ordinaires, si $\frac{p}{q}$ a une valeur rationnelle ; et, en général, par le premier coefficient différentiel du logarithme de la fonction *Gamma* de Legendre. Car, d'après la formule [24], nous avons

$$q\,.\sum_{0}^{\infty}\cdot\frac{1}{p+nq}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{1-t}-C-Z'\left(\frac{p}{q}\right)=\text{Log.}\,\infty-Z'\left(\frac{p}{q}\right)\,.$$

Lorsque $\frac{p}{q} > 1$, on peut évaluer la quantité $Z'\left(\frac{p}{q}\right)$ par la série [25]. Mais si l'on avait $\frac{p}{q} < 1$, il faut se rappeler, que l'équation

$$\text{Log.}\left[u\,\Gamma(u)\right] = \text{Log.}\,\Gamma(u+1)$$

donne

$$Z'(u) = -\frac{1}{u} + Z'(u+1)\ ;$$

et par conséquent

$$q \cdot \sum_{0}^{\infty} \cdot \frac{1}{p+nq} = \text{Log.}\,\infty + \frac{q}{p} - Z'\left(1+\frac{p}{q}\right).$$

Maintenant on calculera la valeur de $Z'\left(1+\frac{p}{q}\right)$ par la série convergente :

$$[25'] \ldots\ldots\ Z'(1+u) = -\frac{1}{1+u} + 1 - C + (S_2-1)u - (S_3-1)u^2 + (S_4-1)u^3 - (S_5-5)u^4 + (S_6-1)u^5 - \text{etc.}\ ;$$

$$[25''] \ldots\ldots\ Z'(1+u) = -\text{Log.}\,(1+u) + (1-C)u + \frac{1}{2}(S_2-1)u^2 - \frac{1}{3}(S_3-1)u^3 + \frac{1}{4}(S_4-1)u^4 - \frac{1}{5}(S_5-1)u^5 + \text{etc.}$$

(Voyez page 70 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral* de LEGENDRE).

Il suit de là et de l'équation [24] que l'on a ces deux équations ;

$$\int_0^1 \frac{dt\,(1-t^Q)}{1-t} = \frac{Q}{1+Q} + (S_2-1)Q - (S_3-1)Q^2 + (S_4-1)Q^3 - (S_5-1)Q^4 + \text{etc.}\ ;$$

$$\int_0^1 \frac{dt\,(1-t^Q)}{1-t} = \frac{1}{2Q} + \text{Log.}\,Q - \frac{A'}{2}\cdot\frac{1}{Q^2} + \frac{B'}{4}\cdot\frac{1}{Q^4} - \frac{C'}{6}\cdot\frac{1}{Q^6} + \text{etc.}$$

En revenant à la fonction $Z'(u)$ il faut observer que l'équation

$$Z'(u) = -\frac{1}{u} + Z'(u+1)$$

donne

$$Z'(u) = (1-C) - \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} + (S_2 - 1)u - (S_3 - 1)u^2 + (S_4 - 1)u^3 - \text{etc.}$$

Et que d'un autre côté l'on a

$$Z'(u) = -C + \frac{u-1}{u} + \frac{u-1}{2(u+1)} + \frac{u-1}{3(u+2)} + \frac{u-1}{6(u+3)} + \text{etc.}$$

(Voyez page 62 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral*). Lorsque u est une fort petite fraction, cette série serait beaucoup moins propre au calcul de $Z'(u)$.

L'équation [24] démontre immédiatement que $Z'(2) = 1 - C$. La série donne

$$Z'(2) = -C + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \text{etc.}$$

Mais

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \text{etc.}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\right)$$

$$= 1 .$$

Remarquons maintenant, que la différence

$$\sum_0^\infty . \frac{1}{p+nq} - \frac{1}{q} . \sum_0^\infty . \frac{1}{1+n}$$

a une valeur finie. Car l'on a

$$\sum_0^\infty . \frac{1}{1+n} = \int_0^1 \frac{dt}{1-t} ;$$

et par conséquent

$$(\varepsilon)\ \ldots\ldots\ \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{p+nq}-\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{q+nq}=-\frac{1}{q}\int_{0}^{1}\frac{dt\left(1-t^{\frac{p}{q}-1}\right)}{1-t}\ .$$

Cela posé, reprenons l'équation [20], après avoir rétabli $-bg$ au lieu de $-bh$: nous aurons

$$f(x)=\frac{P}{1-x}+bh\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{b+n(b-1)(1-x)}$$

$$-gh\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(b-1-x)+n(b-1)(1-x)}\ .$$

La quantité P étant arbitraire, rien n'empêche de remplacer P par

$$P-\frac{bh}{b-1}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{1+n}+\frac{gh}{b-1}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{1+n}\ ;$$

et alors, nous aurons

$$f(x)=\frac{P}{1-x}+bh\left\{\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{b+n(b-1)(-x)}-\frac{1}{(b-1)(1-x)}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{1+n}\right\}$$

$$-gh\left\{\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(b-1-x)+n(b-1)(1-x)}-\frac{1}{(b-1)(1-x)}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{1+n}\right\}\ .$$

Donc en appliquant à cette équation la formule (ε) nous aurons

$$f(x)=\frac{P}{1-x}-\frac{bh}{(b-1)(1-x)}\int_{0}^{1}\frac{dt(1-t^{X'})}{1-t}$$

$$+\frac{gh}{(b-1)(1-x)}\int_{0}^{1}\frac{dt(1-t^{X''})}{1-t}\ ;$$

où X', X'' sont les valeurs données dans le § VII par les équations [22]. Telle est, sous forme finie, l'intégrale de l'équation

$$f(x)-\frac{b}{2b-1-x(b-1)}f\left(\frac{b-1+x}{2b-1-x(b-1)}\right)=h-\frac{gh}{x+b-1}.$$

On peut donc éviter la présence de l'infini, en établissant l'équation [20], avec la modification que je viens de mettre en évidence; et on peut l'éviter sans faire d'abord $g=h$, ainsi que cela est nécessaire pour la solution du problème de Physique dont il est ici question. Lorsqu'on fait $g=h$, la formule précédente donne l'équation [23]. Et on aura l'équation [52] par l'application de la formule [54].

Je saisis cette occasion pour faire observer, que la somme

$$\sum_{1}^{x}\cdot\frac{1}{p+qx}=\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}+\frac{1}{p+3q}\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{p+qx}$$

peut être exprimée par la différence de deux intégrales définies semblables à celles que nous venons d'employer. En effet, d'après la série donnée par Euler à la page 449 de ses *Institutiones Calculi Differentialis*, l'on a :

$$\sum_{1}^{x}\cdot\frac{1}{p+qx}=\frac{1}{q}\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}\left(\frac{p+qx}{q}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p+qx}-\frac{A'}{2}\cdot\left(\frac{q}{p+qx}\right)^{2}\\ \qquad+\frac{B'}{4}\cdot\left(\frac{q}{p+qx}\right)^{4}-\frac{C'}{6}\cdot\left(\frac{q}{p+qx}\right)^{6}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{q}\left\{\text{Log.}\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p}-\frac{A'}{2}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{2}+\frac{B'}{4}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{4}-\text{etc.}\right\};$$

partant il est clair que, en vertu de notre valeur précédente de

$$\int_{0}^{1}\frac{dt(1-t^{q})}{1-t};$$

l'on a :

$$(\varepsilon')\ \ldots\ \sum_{1}^{x}\cdot\frac{1}{p+qx}=\frac{1}{q}\left\{\int_{0}^{1}\frac{dt\left(1-t^{x+\frac{p}{q}}\right)}{1-t}-\int_{0}^{1}\frac{dt\left(1-t^{\frac{p}{q}}\right)}{1-t}\right\}$$

$$=\frac{1}{q}\int_{0}^{1}\frac{dt.t^{\frac{p}{q}}(1-t^{x})}{1-t}.$$

Le second membre de cette équation étant une fonction *continue* de x, on pourra interpoler la fonction de x représentée par le premier. Par la décomposition d'une fraction rationnelle on pourra appliquer cette formule à d'autres sommations. Je trouve, par exemple, que l'équation

$$\frac{1}{p^2+q^2x^2}=\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{p+q.\sqrt{-1}.x}+\frac{1}{p-q.\sqrt{-1}.x}\right\}$$

donne

$$\sum_1^x.\frac{1}{p^2+q^2x^2}=-\frac{1}{pq}\int_0^1\frac{dt(1-t^x)}{(1-t)}\sin.\left(\frac{p}{q}\operatorname{Log}.t\right).$$

L'équation

$$\frac{1}{p^2+2pq\cos.\theta x+q^2x^2}=\frac{1}{2p\sin.\theta}\left\{\frac{1}{p(\sin.\theta+\cos.\theta.\sqrt{-1})+xq.\sqrt{-1}}+\frac{1}{p(\sin.\theta-\cos.\theta.\sqrt{-1})-xq.\sqrt{-1}}\right\}.$$

donne à l'aide de la même formule

$$\sum_1^x.\frac{1}{p^2+2pq\cos\theta.x+x^2q^2}$$

$$=-\frac{1}{pq\sin.\theta}\int_0^1\frac{dt.t^{\frac{p}{q}\cos.\theta}(1-t^x)\sin.\left(\frac{p}{q}\sin\theta.\operatorname{Log}.t\right)}{(1-t)}.$$

Le passage du réel à l'imaginaire fournit ces résultats d'une manière rapide.

En faisant $\theta=0$, cette formule donne

$$\sum_1^x.\frac{1}{(p+qx)^2}=-\frac{1}{q^2}\int_0^1\frac{dt.t^{\frac{p}{q}}(1-t^x)\operatorname{Log}.t}{1-t};$$

c'est-à-dire le résultat que l'on obtient immédiatement en différentiant par rapport à p l'expression précédente de

$$\sum_1^x.\frac{1}{p+qx}.$$

Il est clair que l'on a, en général,

$$\int_1^x \frac{1}{(p+qx)^n} = \frac{1}{(2.3.4.n-1)q^n} \int_0^1 \frac{dt.t^{\frac{p}{q}}(1-t^x)}{(1-t)} \left(\text{Log.}\frac{1}{t}\right)^{n-1}.$$

En appliquant la formule (ε') à la théorie de la *Pompe spirale*, on trouvera que, suivant l'hypothèse de NAVIER, le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée peut être exprimé, *sous forme finie*, par la formule

$$\frac{H+\eta \int_0^1 \frac{dt.t^{\frac{\eta}{\gamma}}}{1-t}\left(1-t^{\frac{H-\gamma}{\gamma}}\right)}{H+\eta\,\text{Log.}\left(\frac{H+\eta}{\eta}\right)};$$

où les lettres H, η et γ ont la signification qui leurs a été attribuée par NAVIER aux pages 374-378 du second Volume de son ouvrage intitulé : *Resumé des Leçons de Mécanique* (Édition de 1838 (*)).

(*) A la page 377 il faut lire $\eta+H-\gamma$ au lieu de $\eta+H-h$.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DE L'ÉQUATION

$$\varphi(t+x.\sqrt{-1})+\varphi(t-x.\sqrt{-1})$$
$$=\alpha\frac{1}{2}\varphi(t)+\alpha'\left[\varphi(t+x)+\varphi(t-x)\right]+\alpha''\left[\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)\right]$$
$$+\alpha'''\left[\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)\right]+\text{etc.}$$

DONNÉE PAR LAGRANGE (*)

pour exprimer la valeur réelle de la somme de deux quantités imaginaires, en supposant connues les valeurs réelles de $\varphi(t)$ *par le moyen d'une courbe*

PAR

JEAN PLANA

On sait comment FOURIER a trouvé le premier la véritable solution de ce problème vers le commencement du 19ème siècle. LAGRANGE s'est borné à faire voir que la transformation pouvait être opérée par cette série, en déterminant les coefficiens α', α'', α''', etc. à l'aide de ce nombre infini d'équations du premier degré; savoir

$$\left.\begin{array}{l} 1-\alpha'-\alpha''-\alpha'''-\alpha^{iv}-\alpha^{v}-\text{etc.}=\alpha\ ; \\ 1+\alpha'+2^2.\alpha''+3^2.\alpha'''+4^2.\alpha^{iv}+5^2.\alpha^{v}+\text{etc.}=0\ ; \\ 1-\alpha'-2^4.\alpha''-3^4.\alpha'''-4^4.\alpha^{iv}-5^4.\alpha^{v}-\text{etc.}=0\ ; \\ 1+\alpha'+2^6.\alpha''+3^6.\alpha'''+4^6.\alpha^{iv}+5^6.\alpha^{v}+\text{etc.}=0\ ; \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\ \ldots(1')$$

(*) *Miscellanea Taurinensia*, année 1762, 3.e Volume, pages 213-16.

et il a trouvé que l'expression générale d'un quelconque des coefficiens α', α'', α''', etc. était

$$\alpha^{(m)} = 2\alpha.\cos.(m\pi) - \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\right).\frac{m^2.\cos.(m\pi)}{1+m^2} .$$

C'est de quoi je vais donner une démonstration tout-à-fait différente de celle de LAGRANGE, qui me paraît assez remarquable.

La n.ième des équations (T) peut être écrite ainsi;

$$1 + (-1)^n \left\{\alpha' + 2^{2(n-1)}.\alpha'' + 3^{2(n-1)}.\alpha''' + 4^{2(n-1)}.\alpha^{IV} + \text{etc.}\right\} = 0 .$$

On peut considérer $\alpha^{(m)}$ comme une fonction de l'indice m: alors, en posant

$$\alpha^{(m)} = F(m) ,$$

l'on aura

$$\alpha' = F(1) ; \quad \alpha'' = F(2) ; \quad \alpha''' = F(3) ; \quad \text{etc.}$$

Ainsi, toutes les équations (T) sont comprises dans les deux équations

$$[1] \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \sum_{1}^{\infty}.F(m) = \alpha ,$$

$$[2] \ldots\ldots\ldots \quad 1 + (-1)^n.\sum_{1}^{\infty}.m^{2(n-1)}.F(m) = 0 .$$

Pour éliminer, de prime abord, la quantité α, j'observe que, en posant

$$[3] \ldots\ldots\ldots \quad F(m) = 2\alpha.\cos.m\pi + f(m) ,$$

l'on a, au lieu de l'équation [1];

$$1 - \sum_{1}^{\infty}.f(m) + 2\alpha(1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}) = \alpha ;$$

et comme

$$1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = -\frac{1}{2} ,$$

il est clair que l'on a

$$[4] \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \sum_{1}^{\infty}.f(m) = 0 .$$

L'équation [2] devient

$$1 + (-1)^n.\sum_{1}^{\infty}.m^{2(n-1)}.f(m) + (-1)^n.2\alpha.\sum_{1}^{\infty}.m^{2(n-1)}.\cos.m\pi = 0 .$$

Cela posé, je remarque que, depuis $n=2$ jusqu'à $n=\infty$, l'on a l'équation

$$[5] \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{1}^{\infty} . m^{2\lambda} \cos.(m\pi) = 0 \ .$$

Cette égalité a été démontrée par Euler (Voyez la page 501 de ses *Institutiones Calculi Differentialis*, et les pages 288-90).

Ainsi nous avons l'équation

$$[6] \ldots\ldots\ldots \quad 1+(-1)^n . \sum_{1}^{\infty} . m^{2(n-1)} . f(m) = 0 \ .$$

La question est donc réduite à trouver la fonction $f(m)$ qui rend identiques les deux équations [4] et [6]. En faisant $n=2$, cette dernière donne

$$1+\sum_{1}^{\infty} . m^2 f(m) = 0 \ .$$

Donc, en remplaçant l'unité positive par $-\sum_{1}^{\infty} . m^2 f(m)$, l'équation [4] revient à dire que l'on doit avoir

$$\sum_{1}^{\infty} . (m^2+1) f(m) = 0 \ .$$

Il suit de là que si l'on fait

$$[7] \ldots\ldots\ldots \quad f(m) = A . \frac{m^{2p}}{m^2+1} \cos. m\pi \ ;$$

A étant un coefficient indépendant de m l'on aura effectivement;

$$\sum_{1}^{\infty} . (m^2+1) f(m) = A . \sum_{1}^{\infty} . m^{2p} . \cos. m\pi = 0 \ ,$$

en vertu de l'équation [5]. D'après cela, nous pouvons remplacer les équations [4] et [6] par celles-ci;

$$[8] \ldots\ldots\ldots \quad 1 - A . \sum_{1}^{\infty} . \frac{m^{2p} . \cos. m\pi}{m^2+1} = 0 \ ;$$

$$[9] \ldots\ldots\ldots \quad 1+(-1)^n A . \sum_{1}^{\infty} . \frac{m^{2(n-1+p)} . \cos. m\pi}{m^2+1} = 0 \ .$$

Or nous avons

$$\frac{m^2}{m^2+1} = 1 - \frac{1}{m^2+1} ;$$

$$\frac{m^4}{m^2+1} = m^2 - 1 + \frac{1}{m^2+1} ;$$

$$\frac{m^6}{m^2+1} = m^4 - m^2 + 1 - \frac{1}{m^2+1} ;$$

et, en général,

$$\frac{m^{2i}}{m^2+1} = m^{2(i-1)} - m^{2(i-2)} + m^{2(i-3)} \ldots\ldots + (-1)^{i-1} + \frac{(-1)^i}{m^2+1} .$$

Donc, en vertu de l'équation [5], on peut réduire les équations [8] et [9] à celles-ci;

$$1 - (-1)^{p-1} A . \sum_1^\infty . \cos . m\pi - (-1)^p . A . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} = 0 ;$$

$$1 + (-1)^{2n+p-2} . A . \sum_1^\infty . \cos . m\pi + (-1)^{2n+p-1} . A . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} = 0 ;$$

et comme $\sum_1^\infty . \cos . m\pi = -\frac{1}{2}$, l'on a

$$1 + (-1)^{p-1} \frac{A}{2} - A(-1)^p . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} = 0 ;$$

$$1 - (-1)^{2n+p-2} \frac{A}{2} + A(-1)^{2n+p-1} . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} = 0 .$$

Cela posé, si l'on prend $p = 1$, ces deux équations se réduiront à la seule équation,

$$1 + \frac{A}{2} + A . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} = 0 ;$$

c'est-à-dire à l'équation

$$[10] \ldots\ldots \quad 2 + A \left\{ 1 + 2 . \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} \right\} = 0 .$$

Maintenant, pour avoir, sous forme finie, la valeur de

$$, \quad \sum_1^\infty . \frac{\cos . m\pi}{m^2+1} ,$$

j'observe que la série connue

$$\frac{2\varphi}{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}=2\left\{\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{\pi^2}}-\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}+\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{9\pi^2}}-\text{etc.}\right\},$$

en y faisant $\varphi=\pi$, donne

$$\frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=2\left\{\frac{1^2}{1^2+1}-\frac{2^2}{2^2+1}+\frac{3^2}{3^2+1}-\frac{4^2}{4^2+1}+\text{etc.}\right\};$$

donc en ajoutant la quantité nulle

$$\frac{1}{2}-(1-1+1-1+\text{etc.})=0,$$

nous aurons

$$\frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=2\left\{\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1^2}{1^2+1}\right)+\left(1-\frac{2^2}{2^2+1}\right)-\left(1-\frac{3^2}{3^2+1}\right)+\text{etc.}\right\};$$

c'est-à-dire

$$\frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=2\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\text{etc.}\right\}.$$

Ainsi, nous avons l'équation

$$[11]\ \ldots\ldots\qquad \frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=1+2.\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos.m\pi}{m^2+1}.$$

Il suit de là que l'équation [10] donne

$$[12]\ \ldots\ldots\qquad A=-\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\right).$$

Donc les équations [3] et [7] nous donnent

$$[13]\ \ldots\quad \alpha^{(m)}=F(m)=2\alpha.\cos.m\pi-\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\right).\frac{m^2\cos.m\pi}{m^2+1}.$$

Maintenant si l'on prend

$$[14]\ \ldots\ldots\qquad \alpha=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi},$$

l'on aura

$$[15] \ldots\ldots\ldots \qquad \alpha^{(m)} = \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\right) \cdot \frac{\cos. m\pi}{m^2 + 1} \ .$$

Lagrange est parvenu à ce résultat sans employer le théorème d'Euler exprimé par l'équation [5]. Mais il faut avouer, que sa démonstration n'est pas à l'abri de toute objection. Celle que je viens d'exposer me paraît claire et incontestable.

Pour avoir des idées justes sur le mode d'existence de l'équation [5], nous ferons remarquer que la suite infinie

$$[16] \ldots \ S = 1^{2\lambda} . x - 2^{2\lambda} . x^2 + 3^{2\lambda} . x^3 - 4^{2\lambda} . x^4 + 5^{2\lambda} . x^5 - \text{etc.} \ ,$$

en y faisant $x = \frac{y}{1-y}$, et développant suivant les puissances de y est transformée dans celle-ci ;

$$S = 1^{2\lambda} . y - (2^{2\lambda} - 1) y^2 + (3^{2\lambda} - 2 . 2^{\lambda} + 1^{2\lambda}) y^3 - \text{etc.}$$

De sorte que, par l'algorithme des différences finies, nous avons

$$S = 1^{2\lambda} . y - y^2 \Delta . 1^{2\lambda} + y^3 \Delta^2 . 1^{2\lambda} - y^4 \Delta^3 1^{2\lambda} + \text{etc.}$$

Donc en observant que $y = \frac{x}{1+x}$, l'on a

$$S = \frac{x}{1+x} . 1^{2\lambda} - \frac{x^2}{(1+x)^2} \Delta . 1^{2\lambda} + \frac{x^3}{(1+x)^3} \Delta^2 . 1^{2\lambda} - \text{etc.}$$

On sait que

$$\Delta^{2\lambda} . 1^{2\lambda} = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots 2\lambda \ ;$$

$$\Delta^{2\lambda+1} . 1^{2\lambda} = 0 \ ; \qquad \Delta^{2\lambda+2} . 1^{2\lambda} = 0 \ ; \qquad \text{etc.}$$

Donc nous avons, au lieu de l'équation [16],

$$[17] \ldots \ S = \left(\frac{x}{1+x}\right) . 1^{2\lambda} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \Delta . 1^{2\lambda} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \Delta^2 . 1^{2\lambda}$$

$$- \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \Delta^3 . 1^{2\lambda} \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2\lambda+1} \Delta^{2\lambda} . 1^{2\lambda} \ .$$

Il suit de là que, en faisant $x = 1$, l'on a

$$[18] \ldots \quad S = 1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} + 4^{2\lambda} + \text{etc.} \; ;$$

$$[19] \ldots \quad S = \frac{1}{2} . 1^{2\lambda} - \frac{1}{2^2} \Delta . 1^{2\lambda} + \frac{1}{2^3} \Delta^2 . 1^{2\lambda} \ldots\ldots + \frac{1}{2^{2\lambda+1}} \Delta^{2\lambda} . 1^{2\lambda} \; .$$

Maintenant on démontre que cette valeur *finie* de S est toujours nulle à l'aide de la formule

$$[20] \ldots \quad \Delta^n . 1^{2\lambda} = (1+n)^{2\lambda} - n . n^{2\lambda} + \frac{n.(n-1)}{2} (n-1)^{2\lambda} - \text{etc.}$$

Ainsi, il faut regarder la suite infinie

$$1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \text{etc.}$$

comme née du développement du polynome fini qui constitue le second membre de l'équation [17] suivant les puissances de x, où l'on aurait fait $x = 1$. Cette manière de voir l'existence de l'équation [5] est fondée sur un argument bien différent de celui dont Euler parle à la page 500 de ses *Institutiones Calculi Differentialis*. En faisant

$$\varphi(t + x.\sqrt{-1}) + \varphi(t - x.\sqrt{-1}) = \text{sin.}(t + x.\sqrt{-1}) + \text{sin.}(t - x.\sqrt{-1})$$

$$= \text{sin.}\, t . (e^x + e^{-x}) \; ,$$

la série de Lagrange, dont il est ici question, donne

$$(21) \ldots \quad \frac{\pi . (e^x + e^{-x})}{e^\pi - e^{-\pi}} = \frac{1}{2} - \frac{\cos . x}{1^2 + 1} + \frac{\cos . 2x}{2^2 + 1} - \frac{\cos . 3x}{3^2 + 1} + \text{etc.}$$

Cette équation cesse d'être vraie, si l'on donne à x des valeurs plus grandes que π: elle est la différentielle de celle que Fourier donne à la page 231 de sa *Théorie de la Chaleur*.

En prenant

$$\varphi(t + x.\sqrt{-1}) + \varphi(t - x.\sqrt{-1}) = \sqrt{t + x.\sqrt{-1}} + \sqrt{t - x.\sqrt{-1}}$$

$$= \sqrt{2t + 2.\sqrt{t^2 + x^2}} \; ,$$

la même formule de Lagrange donnerait

$$(22) \ldots\ldots \qquad \frac{\pi.\sqrt{2}.\sqrt{t+\sqrt{t^2+x^2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{[\sqrt{t+x}+\sqrt{t-x}]}{1^2+1} + \frac{[\sqrt{t+2x}+\sqrt{t-2x}]}{2^2+1}$$

$$- \frac{[\sqrt{t+3x}+\sqrt{t-3x}]}{3^2+1} + \text{etc.}$$

Or il est évident que cette série contiendrait des termes imaginaires: de sorte que, sans évaluer le *reste* de la série, il est impossible d'obtenir de cette manière la valeur du premier membre.

Mais en faisant

$$(23) \ldots\ldots \qquad A_{(m)} = \int_0^a du.\sqrt{u}.\cos.\left(\frac{m\pi u}{a}\right),$$

l'on aurait l'équation

$$(24) \ldots\ldots \qquad \sqrt{t} = \frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{a}.\sum_1^{\infty}.A_{(m)}.\cos.\left(\frac{m\pi t}{a}\right),$$

qui serait vraie pour toute valeur de t comprise entre zéro et a; et même pour les valeurs extrêmes $t=0$, $t=a$. Alors la série (22) donnerait la valeur de

$$\frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{a}.\sum_1^{\infty}.A_{(m)}\left(e^{\frac{m\pi x}{a}} + e^{-\frac{m\pi x}{a}}\right)\cos.\left(\frac{m\pi t}{a}\right),$$

pourvu que chaque terme $\sqrt{t \pm kx}$ soit remplacé par la formule

$$\frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{a}.\sum_1^{\infty}.A_{(m)}\cos.\left[\frac{m\pi}{a}(t \pm kx)\right].$$

En prenant

$$(25) \ldots\ldots \qquad \varphi(t+x.\sqrt{-1}) + \varphi(t-x.\sqrt{-1})$$

$$= \sqrt{a(t+x.\sqrt{-1})-(t+x.\sqrt{-1})^2} + \sqrt{a(t-x.\sqrt{-1})-(t-x.\sqrt{-1})^2}$$

$$= \sqrt{2}.\sqrt{(at-t^2+x^2)+\sqrt{(at-t^2)^2+(a-2t)^2.x^2}},$$

la série de Lagrange donnerait les valeurs de

$$(26) \ldots\ldots \quad \frac{2}{a}.\sum_{1}^{\infty}.A_{(m)}\left(e^{\frac{m\pi x}{a}}+e^{-\frac{m\pi x}{a}}\right)\sin.\left(\frac{m\pi t}{a}\right)$$

où l'on a

$$A_{(m)}=\int_{0}^{a}du.\sqrt{au-u^2}.\sin.\left(\frac{m\pi u}{a}\right).$$

Depuis $t=0$ jusqu'à $t=a$ (et non pour $t>a$)

$$(27) \ldots\ldots \quad \sqrt{at-t^2}=\frac{2}{a}.\sum_{1}^{\infty}.A_{(m)}.\sin.\left(\frac{m\pi t}{a}\right).$$

Il était indispensable d'ajouter ici ces dernières réflexions, afin d'éviter toute méprise dans les applications que l'on voudrait faire de la série de LAGRANGE dont il est ici question.

Au reste, il faut observer que LAGRANGE entendait d'appliquer sa série à des courbes telles, qui, par la nature de la question, avaient la propriété de donner $\varphi(t)=\varphi(-t)$ et $\varphi(t+kx)=\varphi(a-t')$; a étant une ligne constante donnée et t' une ligne plus petite que a. Sur cela il s'explique clairement à la page 219 du Volume cité.

DEL MOTO DE' PROIETTI

NE' MEZZI RESISTENTI

DEL CONTE

PAOLO DI SAN ROBERTO

MAGGIORE D'ARTIGLIERIA

Approvata nell'adunanza del giorno 16 luglio 1854.

PREFAZIONE

Nello stato presente della balistica si san ridurre alle quadrature le equazioni differenziali del moto de' proietti ne' mezzi, che resistono in ragione del quadrato della velocità; si conoscono le proprietà della traiettoria in questi mezzi descritta; e si possono calcolare, con quel grado d'approssimazione, che si vuole, tutte le quantità necessarie per la conoscenza del moto.

Dappoi che moltiplici sperienze provarono, che, trattandosi delle grandissime velocità de' proietti d'artiglieria, la resistenza dell'aria cresce d'un

più rapido modo, che non suppone la legge neutoniana, è divenuto necessario di studiare la questione balistica, con altre leggi di resistenza, più conformi alla natura.

Ben tentò l'Eulero ne' suoi comenti all' opera di Beniamino Robins sull'artiglieria, di determinare la traiettoria de' proietti, nell'ipotesi d'una resistenza proporzionale al quadrato, ed alla quarta potenza della velocità; ma le serie, a cui giunse, non essendo convergenti in generale, non possono servire a risolvere la questione. E noi veggiamo, che questo gran Geometra, ritornando sullo stesso soggetto nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino* (*anno* 1753), rinunciò a quella formola di resistenza per attenersi alla legge ordinaria del quadrato della velocità.

Carlo Hutton, che fece, verso il fine del secolo passato, molte sperienze intorno alla resistenza dell'aria, dimostrando, che ad esprimerla richiedesi una potenza più elevata della seconda, non ci dà l'equazione della traiettoria, e la calcola, come il Lombard, con un metodo approssimativo, che non si può applicare fuorchè al tiro poco elevato. Di fatto, questo metodo consiste in immaginare, che la palla muovasi in linea retta, e in determinare la quantità del suo abbassarsi ad ogni punto, desumendola dal tempo messo per giungervi.

A questi ultimi tempi il sig. Didion, a cui andiam debitori di ricerche importantissime, fatte co' signori Piobert e Morin, intorno alla resistenza de' mezzi, ci diede nel suo *Traité de balistique* (*Paris*, 1848) formole per calcolare il moto de' proietti in un mezzo, che resiste in ragione del quadrato e del cubo della velocità. Ma non credo queste formole applicabili al tiro a grandi angoli; essendo che il metodo, ond'ei si serve, sta in sostituire al valor variabile del coseno dell'angolo formato dalla tangente alla traiettoria coll'orizzonte, un valor medio costante. Ora, quando l'angolo di proiezione è assai grande, troppo varia questo coseno nell'estensione della curva, perchè si possa considerare come costante. Se, per esempio, l'angolo di proiezione è di 45°, il coseno varia nella proporzione di 1 a $\sqrt{2}$ nel ramo ascendente, e più ancora nel ramo

discendente. Sì fatto metodo è da gran tempo adoperato pel tiro a piccioli angoli nell'ordinaria ipotesi di resistenza; ma a niuno non venne mai in pensiero di proporlo per calcolare il tiro elevato.

Vedesi adunque, che la quistione balistica è lungi dall'essere esaurita, e che non è fuor di proposito il ripigliarla per estenderla a leggi di resistenza più complicate di quello che sia la neutoniana.

Sarebbe cosa per primo importantissima il sapere, se le proprietà della traiettoria, conosciute nell'ipotesi del quadrato della velocità, si mantengano con altre leggi di resistenza, o quali modificazioni vengano a ricevere. Appresso sarebbe a desiderare, che, in mancanza di una soluzione sotto forma finita, si potessero almeno valutar numericamente, con approssimazione illimitata, le diverse circostanze del moto in un mezzo, di cui si conosca la legge di resistenza.

Nella presente Memoria cercai di risolvere queste due quistioni. Credetti pregio dell'opera aggiugnervi lo svolgimento di alcuni altri punti della balistica, in modo a formarne un tutto, che possa riuscire di qualche utilità alla pratica.

In sei capitoli è diviso questo scritto:

Il primo contiene l'esposizione delle equazioni generali del moto di un proietto in un mezzo resistente, indipendentemente da ogni ipotesi di resistenza.

Nel secondo si tratta del moto rettilineo, il quale ha luogo o quando la perdita di peso del proietto nel mezzo pareggia il suo peso, o quando la velocità iniziale è verticale.

Il terzo s'aggira sulla discussione della curva descritta, senza astringersi ad alcuna legge determinata di resistenza, e supponendo solo, che la resistenza sia una funzione della velocità con esso lei crescente d'un modo continuo, in guisa da divenire infinita colla velocità.

Nel quarto trovasi l'analisi di alcuni casi, che si possono ridurre alle quadrature, o integrare sotto forma finita.

Nel quinto sono diversi metodi di approssimazione, per via de' quali

si possono conseguire valori indefinitamente approssimati degli elementi del moto, e segnar la traiettoria, qualunque siasi la legge della resistenza, quand'anche ella non abbia espressione matematica.

Il sesto comprende l'applicazione delle formole date dalla pratica dell'artiglieria.

In una nota in fine trovasi il calcolo di un caso particolare, ed il paragone fra i differenti metodi d'approssimazione.

INDICE DELLE MATERIE

Cap. I. - Equazioni generali del moto di un proietto in un mezzo resistente.

N.° 1. Considerazioni preliminari.
» 2. Equazioni generali indipendenti da qualunque ipotesi sulla legge della resistenza.

Cap. II. - Del moto rettilineo.

N.° 3. Moto di un corpo in un mezzo di densità uguale alla sua.
» 4. Moto verticale ascendente.
» 5. Moto verticale discendente.

Cap. III. - Discussione della traiettoria.

N.° 6. Variazioni della velocità ne' diversi punti della traiettoria.
» 7. Limiti dell' inclinazione della curva.
» 8. Tempo dopo il quale la velocità diventa infinita; nulla; minima; costante.
» 9. Lunghezza dell'arco, che risponde alla velocità infinita: nulla; minima; costante.
» 10. Degli assintoti.
» 11. Del raggio di curvatura. Punto della massima curvatura. Questo punto è più vicino al vertice, che non è il punto, dove la velocità è minima.
» 12 La velocità ed il raggio di curvatura, per inclinazioni uguali della curva, sono maggiori nel ramo ascendente, che nel discendente.
» 13. L'angolo di caduta è sempre maggiore dell'angolo di proiezione.
» 14. La velocità al punto di caduta è minore, che al punto di partenza.
» 15. L'ampiezza del ramo ascendente è maggiore di quella del ramo discendente.

Cap. IV. - Analisi di alcuni casi, in cui le equazioni del moto dei proietti si riducono alle quadrature.

N.° 16. Resistenza proporzionale ad una potenza qualunque della velocità, più una costante.
» 17. Casi, in cui gli elementi del moto si possono ottenere in termini finiti.
» 18. Relazione fra i tempi in due mezzi, le cui resistenze sono espresse da a, e $a + bu$.
» 19. Corrispondenza fra le due traiettorie descritte in due mezzi, le cui resistenze sono espresse da a, e $a + bu^2$.
» 20. Riduzione alle quadrature del caso, in cui la resistenza è espressa da $a + blu$

Cap. V. - Metodi d'approssimazione.

N.° 21. Primo metodo d'approssimazione applicabile a qualunque angolo di proiezione. Grado d'approssimazione.
» 22. Costruzione grafica della traiettoria.
» 23. Secondo metodo d'approssimazione pel tiro a piccoli angoli.
» 24. Terzo metodo d'approssimazione mediante le serie.

Cap. VI. - Applicazioni al tiro de' proietti dell'artiglieria.

N.° 25. Resistenza de' mezzi, entro cui si muovono ordinariamente i proietti dell'artiglieria
» 26. Problemi principali di balistica, che occorrono in pratica.
» 27. Passata de' proietti ne' mezzi solidi.
» 28. Formole pel tiro teso.
» 29. Del tiro in arcata.

Nota. - Calcolo numerico di un caso particolare.
Paragone fra i diversi metodi d'approssimazione.

CAP. I.

Equazioni generali del moto di un proietto in un mezzo resistente.

1. Un proietto, che si muove in un mezzo resistente, è sollecitato da due maniere di forze: dalla *gravità*, che opera sopra ogni sua particella; e dalla *resistenza*, che agisce su tutti i punti della sua superficie.

In virtù del noto teorema, che *il centro di gravità di un corpo così si muove, come se tutta la massa vi fosse riunita, e tutte le forze esterne vi fossero applicate, ciascuna secondo la sua propria direzione*, il moto progressivo del proietto è lo stesso che quello di un punto materiale, di pari massa, a cui sia applicata la risultante della gravità, e della resistenza.

La gravità varia secondo la distanza dal centro della terra: la sua direzione è verticale; ma ne'moti de' proietti, si può, senza error sensibile, supporre, che essa sia costante, e che operi secondo rette fra sè parallele, attesa la poca estensione delle curve, ch' essi descrivono, in comparazione del raggio del globo terrestre.

La resistenza dipende in generale dalla natura e densità del mezzo, dalla forma del proietto, dalle velocità dei diversi elementi della sua superficie, e dalle condensazioni o dilatazioni del mezzo in contatto con questi elementi. Essa può aver direzione diversa da quella dell'elemento della curva descritta dal centro di gravità del proietto; la qual cosa avviene ogni volta che al moto progressivo si accompagna un moto rotatorio. Ma io suppongo qui, che la resistenza sia costantemente tangente alla curva dal centro di gravità descritta.

Questa ipotesi si verifica nel caso che il proietto sia una sfera omogenea, o composta di strati concentrici omogenei, a cui non siasi comunicata veruna rotazione iniziale.

In questo scritto considero adunque il proietto come un punto materiale, in cui sia tutta la massa ristretta, ed a cui sieno applicati e il peso del proietto verticalmente, e la resistenza diretta continuamente nel verso opposto alla velocità.

Se il mezzo resistente, entro cui si muove il proietto, è un fluido, vuolsi aver riguardo alla perdita di peso, che il proietto prova nel fluido; la quale, secondo il principio d'Archimede, è uguale al peso del fluido rimosso.

Una circostanza, di cui conviene altresì tener conto, si è quella della *prora* e della *poppa fluide*, da cui sono accompagnati i corpi, che si muovono ne' fluidi. Il volume del fluido, che trae seco un proietto, pare essere indipendente dalla natura e dalla densità del fluido e del corpo, indipendente dalla loro velocità relativa, e dipendente solo dalla forma del corpo. Il Dubuat [1], che fu il primo ad avvertire siffatto fenomeno, trovò, che una sfera che oscilla così nell'aria, come nell'acqua, conduce seco un volume del fluido uguale ai *sei decimi* circa del suo volume. Questo risultamento s'accorda, da qualche lieve differenza in fuori, dovuta alla natura ed alle dimensioni degli apparecchi, con quelli conseguiti posteriormente dai signori Bessel, Sabine e Baily, in esperienze sulle oscillazioni del pendolo: e ad un risultamento poco diverso giunsero i signori Poisson [2] e Plana [3], coll'aiuto dell'analisi.

2. Venendo alla ricerca delle equazioni del moto di un grave in un mezzo resistente, convien da prima investigare, se la traiettoria è a semplice, o a doppia curvatura.

Se si fa passare un piano verticale per un elemento qualunque della curva, e se si considerano le forze, che modificano il moto, ed in virtù delle quali l'elemento consecutivo è descritto, si scorge, che queste forze (il peso e la resistenza) si esercitano in questo stesso piano; onde che il secondo elemento vi sarà pure compreso. Applicandosi il medesimo ragionamento a tutti gli elementi consecutivi della traiettoria, ne segue, che questa giace tutta nello stesso piano verticale.

---

[1] Dubuat. *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique.* 3.e Partie (Paris, 1816).

[2] Poisson. *Mémoires sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant.* Dans le Tome XI des Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut.

[3] Plana. *Mémoire sur le mouvement d'un pendule dans un milieu résistant.* Turin, 1835.

Ciò posto, sia P il peso del proietto nel vuoto; Π la perdita di peso che soffre nel mezzo; la quale è uguale al peso d'un volume del mezzo pari al volume del proietto, quando il mezzo è fluido.

Le forze, che sollecitano il proietto, quando si muove, sono il suo peso relativo $P-\Pi$, e la resistenza del mezzo R. Se si risolve la forza verticale $P-\Pi$, secondo le due direzioni, tangente e normale alla curva, si ottiene, notando con ϑ l'angolo formato dalla tangente alla curva coll'orizzonte,

$(P-\Pi)\sin.\vartheta$ per la componente tangente;

$(P-\Pi)\cos.\vartheta$ per la componente normale.

Esercitandosi sempre la resistenza R secondo la tangente, il proietto è adunque sollecitato nel verso della tangente dalla forza

$$T=-R-(P-\Pi)\sin.\vartheta\ ,$$

e nel verso della normale dalla forza

$$N=(P-\Pi)\cos.\vartheta\ .$$

Ora si sa, pei principii di meccanica, che, ridotte tutte le forze, da cui un corpo è animato, alle due T e N, secondo la tangente e la normale, si ha

$$m\frac{du}{dt}=T\ ,$$

$$m\frac{u^2}{\rho}=N\ ,$$

ove m è la massa del corpo considerato, u la sua velocità in un istante qualunque che termini il tempo t, ρ il raggio di curvatura dell'arco che descrive in quell'istante.

Nel caso presente m si compone della massa del proietto, più quella del fluido trasportato seco. Onde che, notando con $\lambda\Pi$ il peso della porzione di fluido, che rimane congiunta col proietto; con G la gravità nel vuoto (a Torino $G=9^m,80517$), si ha

$$m=\frac{P+\lambda\Pi}{G}\ .$$

Sostituendo a m, T, N i loro valori, si ottiene

$$\frac{du}{dt} = -G\frac{R}{P+\lambda\Pi} - G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\operatorname{sin.}\theta\ ,$$

$$\frac{u^2}{\rho} = G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\cos.\theta\ .$$

Queste due equazioni comprendono la piena determinazione del moto.

Pongasi

$$r = G\frac{R}{P+\lambda\Pi}\ , \qquad g = G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\ ,$$

e si avrà

$$[1] \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{du}{dt} = -r - g\operatorname{sin.}\theta\ ,$$

$$[2] \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{u^2}{\rho} = g\cos.\theta\ .$$

Le quantità r e g sono lineari e paragonabili fra loro, avvertendo che la prima varia da un istante all'altro, e che la seconda è costante, se il mezzo è omogeneo, e se si trascura la variazione della gravità.

Quando la densità del mezzo è molto piccola rispetto a quella del proietto, come avviene per lo più nelle questioni di balistica, si può trascurare Π in comparazione di P, e quindi prendere

$$r = G\frac{R}{P} \qquad \text{e} \qquad g = G\ .$$

I proietti dell'artiglieria sono a un dipresso, se pieni, 6000 volte più densi dell'aria; se vuoti, 4000 volte: onde si può benissimo, nella ricerca delle leggi del loro moto, trascurare il peso dell'aria spostata, e quello dell'aria trascinata.

Ma ciò non sarebbe più lecito in altri casi, per esempio, se il mezzo resistente fosse l'acqua, o se si trattasse di superficie sottili, di corpi cavi, come i palloni aerostatici, ecc.

Ritornando alla traiettoria notisi, che,

Se $P > \Pi$, ossia $g > 0$, ciascun punto della curva è situato di sotto della tangente alla curva nel punto che lo precede; ed in vero, delle due forze, che sollecitano il mobile, l'una (la resistenza) ha per effetto

di ritardarlo secondo la tangente; l'altra (la gravità) ha per effetto di continuamente abbassarlo dalla tangente: di modo che la traiettoria sarà una linea curva concava verso l'orizzonte.

Se $P = \Pi$, ossia $g = 0$, tutti i punti della via percorsa dal mobile si debbono trovare sulla stessa direzione: poichè in questo caso ei non è sollecitato se non se da una forza, che opera costantemente nella direzione in cui egli si muove.

Se $P < \Pi$, ossia $g < 0$, la curva rivolgerà la sua convessità verso l'orizzonte.

La soluzione dell'ultimo caso rientra in quella del primo, perchè basta capovolgere la figura della traiettoria per renderli identici.

Posto che la curva rivolga la sua concavità verso l'orizzonte, se ds è l'archetto elementare della curva, il raggio osculatore è espresso da

$$\rho = \frac{ds}{-d\theta} ;$$

il qual valore, sostituito nell'equazione [2], dà

$$-u^2 \frac{d\theta}{ds} = g \cos.\theta .$$

Onde

[3] ..... $$ds = -\frac{u^2}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos.\theta} .$$

Se si riferisce la situazione del proietto a due assi ortogonali: l'asse delle x orizzontale; e quello delle y verticale nel verso contrario della gravità, si ha

[4] ..... $$dx = ds \cos.\theta = -\frac{u^2}{g} d\theta ,$$

[5] ..... $$dy = ds \sin.\theta = -\frac{u^2}{g} \text{tang.}\theta . d\theta .$$

Inoltre è manifesto che

[6] ..... $$dt = \frac{ds}{u} = -\frac{u}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos.\theta} ,$$

e

[7] ..... $$\rho = \frac{u^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos.\theta} .$$

Se si avesse la velocità u in funzione dell'angolo θ, le equazioni [3], [4], [5], [6], [7] somministrerebbero, dopo l'integrazione, i valori di s, x, y, t, ρ in funzione di θ; e l'eliminazione di θ fra le equazioni [4], [5] fornirebbe l'equazione della traiettoria.

Per avere il valore di u in θ, pongasi il valore di dt [6] nell'equazione [1], si trova

[8] ..... $$\frac{du}{d\theta}=\frac{u}{\cos.\theta}\left(\frac{r}{g}+\sin.\theta\right),$$

ovvero

[9] ..... $$\frac{r}{g}=\frac{d(u\cos.\theta)}{u\,d\theta}.$$

Notisi, che

$$\frac{r}{g}=\frac{R}{P-\Pi};$$

sicchè l'equazione [9] fornisce il rapporto della resistenza al peso relativo del proietto.

Quando r sarà definito in funzione della velocità u, l'equazione [8] o la [9] somministrerà u per mezzo di θ.

Mediante le equazioni precedenti, quando delle tre cose: la legge della resistenza, la traiettoria, la legge della velocità, se ne conosce una, le altre due sono determinate.

La questione diretta, cioè quella in cui si tratta, conoscendo la legge delle forze da cui il mobile è sollecitato, di determinare tutte le circostanze del suo moto, è la più importante: la sua soluzione richiede primieramente l'integrazione dell'equazione differenziale [8] del primo ordine fra le due variabili u e θ, e quindi l'integrazione delle formole differenziali [3], [4], [5], [6] del primo ordine a una sola variabile (l'angolo θ). Queste integrazioni daran luogo a difficoltà analitiche più o meno grandi, che l'imperfezione del calcolo integrale potrà rendere sovente insuperabili.

La questione inversa, cioè quella, in cui si ha per oggetto di scoprire, date le circostanze caratteristiche del moto, la legge delle forze, che lo han prodotto, è molto più semplice considerata analiticamente; poichè la sua soluzione si riduce essenzialmente alla differenziazione.

Se, per esempio, la curva è data per mezzo di y in funzione di x, si possono avere immediatamente la velocità, il tempo e la resistenza in funzione dello stesso x, coll'aiuto delle formole

$$[10] \ldots\ldots\ldots \quad u = \frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}} ,$$

$$[11] \ldots\ldots\ldots \quad t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}} ,$$

$$[12] \ldots\ldots\ldots \quad \frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} ;$$

nelle quali y', y'', y''', t' esprimono le derivate di y, t per rispetto a x. Esse si deducono dalle equazioni dichiarate sopra nel modo seguente:

Si ha

$$\text{tang.}\,\theta = y' .$$

Differenziando rispetto a θ, viene

$$\frac{1}{\cos.^2\theta} = y''\frac{dx}{d\theta} .$$

E sostituendo a $\frac{dx}{d\theta}$ il suo valore, ricavato dall'equazione [4],

$$\frac{1}{\cos.^2\theta} = -\frac{u^2}{g}y'' ;$$

donde si trae, per la velocità orizzontale,

$$u\cos.\theta = \sqrt{-\frac{g}{y''}} :$$

e quindi, poichè

$$\cos.\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} ,$$

si ottiene

$$u = \frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}} .$$

Per avere il tempo basta osservare che

$$u\cos.\theta = \frac{dx}{dt} ,$$

onde

$$t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}} .$$

Stante l'equazione [9], la resistenza si trova, differenziando il valore testè rinvenuto di $u\cos.\theta$ rispetto a θ; con che si trova

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{d\theta}=\frac{g}{2}\cdot\frac{\frac{y'''}{y''^2}}{\sqrt{-\frac{g}{y''}}}\cdot\frac{dx}{d\theta}=-\frac{u^2}{2}\cdot\frac{\frac{y'''}{y''^2}}{\sqrt{-\frac{g}{y''}}}=u\frac{r}{g}\ ,$$

donde si ricava

$$\frac{r}{g}=-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}\ .$$

Il problema di trovare la resistenza che il mezzo deve opporre acciocchè il proietto descriva una curva data, fu trattato per la prima volta dal Neuton, e ripigliato poscia dal Lagrange nella sua *Théorie des fonctions analytiques*, 3.^e *Partie*, *chap.* IV. Quivi si fa vedere la vera cagione dell'abbaglio, nel quale incorse, su questo soggetto, il Neuton nella prima edizione de' *Principii*. L'errore del Neuton consiste in ciò che il valore della resistenza, da lui trovato, ha al denominatore $3y''^2$, invece di $2y''^2$.

CAP. II.

Del moto rettilineo de' proietti ne' mezzi resistenti.

3. Prima di prendere a trattare del moto curvilineo giova considerare il caso particolare, e più semplice del moto rettilineo.

La via d'un proietto in un mezzo resistente è rettilinea in due distinti casi:

1.° Quando la perdita di peso, a cui soggiace il proietto immerso nel mezzo, è uguale al suo peso, come si è già accennato di sopra (N.° 2).

Occorre un esempio di questo caso nel moto orizzontale di un corpo galleggiante sopra un liquido tranquillo.

2.° Quando la velocità del proietto, in un punto qualunque della sua via, è verticale, sia essa diretta dal basso in alto, sia dall'alto in basso. In fatti allora amendue le forze, che sollecitano il mobile, cioè la gravità e la resistenza, sono continuamente nella stessa direzione verticale, onde che egli non potrà mai uscire dalla verticale.

Cominciando dal primo caso, l'equazione del moto è, ritenute le stesse denominazioni del numero precedente,

$$\frac{du}{dt} = -r \ .$$

Quando il valore della resistenza r sia dato, egualmente che la velocità iniziale del proietto, si potrà sempre, mediante quest'equazione, determinare compiutamente il moto.

Ne' casi naturali la resistenza dipende dal valore della velocità u, e può essere risguardata come una funzione determinata di questa velocità. Porrò adunque

$$r = F(u) \ ,$$

onde

$$\frac{du}{dt} = -F(u) \ ;$$

dalla quale si trae

$$dt = -\frac{du}{F(u)} \ ,$$

e moltiplicando per u,

$$u\,dt = ds = -\frac{u\,du}{F(u)} \ .$$

Integrando, a partire dall' istante in cui la velocità è u_0, fino a quello in cui è ridotta ad un valore u, si hanno le espressioni

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{F(u)} = \int_{u}^{u_0} \frac{du}{F(u)} \ ,$$

$$s = -\int_{u_0}^{u} \frac{u\,du}{F(u)} = \int_{u}^{u_0} \frac{u\,du}{F(u)} \ ,$$

per determinare il tempo necessario per passare dalla velocità u_0 alla velocità u, e lo spazio percorso in questo tempo.

Una particolarità, che caratterizza la resistenza, si è quella, che essa non ha effetto, se non quando il mobile ha una velocità finita, e che la sua azione cessa nel momento, in cui la velocità diventa nulla. Se adunque un mobile sollecitato dalla sola resistenza viene a perdere tutta

la sua velocità, ei deve fermarsi in quel punto, dove ciò succede, e rimanervi perpetuamente in riposo.

La durata del moto e lo spazio scorso, sino all'estinzione della velocità, sono dati dalle espressioni seguenti:

$$T=\int_0^{u_0}\frac{du}{F(u)}\,,$$

$$S=\int_0^{u_0}\frac{u\,du}{F(u)}\,.$$

Questo tempo e questo spazio possono essere finiti od infiniti, secondo la natura della funzione, che rappresenta la resistenza.

Per prendere un esempio, suppongasi

$$F(u)=Au^n\,,$$

vale a dire la resistenza proporzionale ad una potenza qualunque della velocità. Si otterrà, dopo l'integrazione, pel tempo e per lo spazio,

$$(1-n)At=u_0^{1-n}-u^{1-n}\,,$$

$$(2-n)As=u_0^{2-n}-u^{2-n}\,.$$

Ad avere il tempo alla fine del quale la velocità è spenta, e lo spazio corrispondente, basta fare $u=0$; onde si trova

$$(1-n)AT=u_0^{1-n}-0^{1-n}\,,$$

$$(2-n)AS=u_0^{2-n}-0^{2-n}\,.$$

Se $n<1$ il tempo e lo spazio sono finiti, cioè il proietto perde tutta la sua velocità, e si ferma, dopo un tempo finito, e dopo avere scorso uno spazio finito.

Se $n=1$, l'equazione, che dà il tempo, diventa

$$At=l\left(\frac{u_0}{u}\right)\,,$$

e ci mostra che a $u=0$ corrisponde $T=\infty$. Al contrario lo spazio S è finito. Dunque quando $n=1$, ancorchè la velocità non diventi nulla,

se non dopo un tempo infinito, pure lo spazio, che il proietto può percorrere, è limitato, e non può oltrepassare $\frac{u_0}{A}$.

Se $n>1$ e <2, si ha ancora il tempo infinito, e lo spazio finito.

Se $n=2$, si ha $T=\infty$; l'equazione, che dà lo spazio, si cambia in

$$As=l\left(\frac{u_0}{u}\right);$$

e per $u=0$, $S=\infty$. Cioè il tempo e lo spazio, sino all'estinzione della velocità, sono tutti e due infiniti.

Se $n>2$, il tempo e lo spazio sono amendue infiniti.

Da tutto questo si raccoglie, che, *nell'ipotesi della resistenza proporzionale alla potenza n della velocità, il tempo e lo spazio, sino alla cessazione del moto, sono ambo finiti, quando* $n<1$; *sono il primo infinito, il secondo finito, quando* $n\geqq 1$ *e* <2; *sono ambo infiniti, quando* $n\geqq 2$.

Qualora la velocità iniziale fosse infinita, il tempo necessario per ridurla ad una velocità finita, e lo spazio scorso in questo tempo, sono dati dalle due equazioni

$$(1-n)At=\infty^{1-n}-u^{1-n},$$

$$(2-n)As=\infty^{2-n}-u^{2-n}.$$

Egli è manifesto, che, *se* $n\leqq 1$, *il tempo e lo spazio sono ambo infiniti; se* $n>1$ *e* $\leqq 2$, *il tempo è finito, e lo spazio infinito; se* $n>2$, *il tempo e lo spazio sono ambo finiti.*

Sicchè quando la resistenza è di grado bensì superiore al primo, ma inferiore al secondo, si ha il paradosso di una distanza infinita percorsa in un tempo finito; il qual paradosso per altro agevolmente si spiega, ove si ponga mente che la velocità iniziale del proietto è infinita.

Notisi, che il tempo e lo spazio richiesti per annullare una velocità infinita, sono in qualunque caso tutti e due infiniti.

Suppongasi ora più generalmente

$$F(u)=Au^{\alpha}+Bu^{\beta}+Cu^{\gamma}+\ldots\ldots+Mu^{\mu},$$

in cui

$$\alpha<\beta<\gamma<\ldots\ldots<\mu.$$

Il tempo e lo spazio, sino alla cessazione del moto, sono

$$T=\int_0^{u_0}\frac{du}{Au^\alpha+Bu^\beta+Cu^\gamma+\ldots\ldots+Mu^\mu}\,,$$

$$S=\int_0^{u_0}\frac{u\,du}{Au^\alpha+Bu^\beta+Cu^\gamma+\ldots\ldots+Mu^\mu}\,,$$

i quali possono mettersi sotto la forma

$$T=\int_0^{u_0}\frac{1}{A+Bu^{\beta-\alpha}+\ldots\ldots+Mu^{\mu-\alpha}}\cdot\frac{du}{u^\alpha}\,,$$

$$S=\int_0^{u_0}\frac{1}{A+Bu^{\beta-\alpha}+\ldots\ldots+Mu^{\mu-\alpha}}\cdot\frac{du}{u^{\alpha-1}}\,,$$

ove gli esponenti $\beta-\alpha$, ..., $\mu-\alpha$ sono necessariamente positivi.

Fra i limiti dell' integrazione la funzione

$$\frac{1}{A+Bu^{\beta-\alpha}+\ldots\ldots+Mu^{\mu-\alpha}}$$

conserva un valor finito. Se si nota colla lettera K una media fra i diversi valori, che acquista detta funzione pei valori di u compresi fra i limiti $u=0$, $u=u_0$, si ha, in virtù di un teorema di calcolo integrale facile a dimostrarsi,

$$T=K\int_0^{u_0}\frac{du}{u^\alpha}\,,$$

come pure

$$S=K'\int_0^{u_0}\frac{du}{u^{\alpha-1}}$$

(K' è una media diversa da K).

Il primo integrale è finito, se $\alpha<1$, ed infinito se $\alpha\geqq 1$: il secondo è finito, se $\alpha<2$, ed infinito, se $\alpha\geqq 2$.

Pertanto le conclusioni, trovate di sopra, concernenti il tempo necessario per estinguere la velocità iniziale, e lo spazio percorso corrispondente, si mantengono per una resistenza espressa da una funzione algebrica qualunque della velocità, e dipendono dall'esponente più piccolo contenuto nella funzione.

Poichè l'esperienza ci mostra, che i corpi, i quali si muovono sopra un piano solido o sopra un liquido, su cui galleggiano, si fermano dopo un tempo finito, potrebbesi argomentare che la funzione della velocità, la quale, in tai casi rappresenta la resistenza, dee contenere un termine di grado inferiore al primo.

Ad avere il tempo e lo spazio richiesti per ridurre una velocità infinita ad una velocità finita, basterà porre u^μ in fattor comune, e ragionare come qui sopra. Si otterranno le stesse conclusioni, come se la resistenza fosse espressa dal solo monomio, che ha il maggior esponente.

Ove sia $\alpha < 1$ e $\mu > 1$ il tempo necessario per mandare a zero una velocità infinita sarà finito; ed ove sia $\alpha < 2$ e $\mu > 2$ lo spazio sarà finito.

4. Passiamo ora al moto verticale, che può essere di salita o di discesa. Nel primo caso la forza, che opera sul proietto, è la somma della gravità e della resistenza; nell'ultimo, essa ne è la differenza. Onde, il moto ascendente e il discendente non sono simili, e non possono essere compresi nella stessa equazione.

Nel moto verticale ascendente, la cui equazione è

$$\frac{du}{dt} = -g - F(u) ,$$

il segno costantemente negativo di $\frac{du}{dt}$ ci rende accorti, che la velocità u va ognora decrescendo da basso in alto fino a diventar nulla.

Nell'istante in cui $u = 0$ la resistenza, attesa la sua natura, cessa di agire, ed il mobile, sollecitato dalla sola gravità, tende a discendere, e discenderà effettivamente, se la resistenza, rinascente nel verso opposto, può essere superata dal peso relativo del mobile.

Giunto adunque il mobile alla sua più grande elevazione ricadrà, se la funzione $F(u)$, che esprime la resistenza, assume per $u = 0$ un valore minor di g; all'incontro si fermerà, se per $u = 0$ essa prende un valore uguale o maggiore di g.

Se si ha insieme $t=0$, $s=0$, $u=u_0$, il tempo e lo spazio nella salita sono dati da

$$t=\int_{u}^{u_0}\frac{du}{g+F(u)}\,,$$

$$s=\int_{u}^{u_0}\frac{u\,du}{g+F(u)}\,.$$

La durata T della salita totale, e la sua altezza S, si ottengono col fare $u=0$; onde si ha

$$T=\int_{0}^{u_0}\frac{du}{g+F(u)}\,,$$

$$S=\int_{0}^{u_0}\frac{u\,du}{g+F(u)}\,.$$

Ove si supponga la velocità iniziale infinita, il tempo e lo spazio, richiesti per estinguerla, sono

$$T=\int_{0}^{\infty}\frac{du}{g+F(u)}\,,$$

$$S=\int_{0}^{\infty}\frac{u\,du}{g+F(u)}\,.$$

Questi integrali sono ora infiniti, ed ora finiti, secondo la natura di $F(u)$.

Suppongasi che $F(u)$ sia una funzione del grado n, cioè sia tale che la funzione $\frac{F(u)}{u^n}$ converga verso una quantità finita, quando u converge verso l'infinito.

Dicasi u, un valor finito e particolare di u, compreso fra 0 e ∞, gl' integrali sopra indicati possono dividersi nel modo seguente:

$$T = \int_0^{u_1} \frac{du}{g + F(u)} + \int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{g + F(u)} ,$$

$$S = \int_0^{u_1} \frac{u\,du}{g + F(u)} + \int_{u_1}^{\infty} \frac{u\,du}{g + F(u)} .$$

È manifesto che gl' integrali fra i limiti $u = 0$ e $u = u_1$ sono finiti. Quanto a quelli fra $u = u_1$ e $u = \infty$, si scrivano così:

$$\int_{u_1}^{\infty} \frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^n} ,$$

$$\int_{u_1}^{\infty} \frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^{n-1}} .$$

La frazione

$$\frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}}$$

fra i limiti $u = u_1$ e $u = \infty$ conserva sempre un valor finito; dunque una media fra i diversi valori, che riceve fra detti limiti, è pure finita. Ora, se i due integrali si pongono sotto la forma:

$$K \int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^n} ,$$

$$K' \int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^{n-1}} ,$$

apparisce che T *è infinito se* $n \leqq 1$, *e finito, se* $n > 1$: *e che* S *è infinito, se* $n \leqq 2$, *e finito, se* $n > 2$.

Da ciò si può argomentare, che, ove la resistenza dell'aria segua una ragione di grado superiore al quadrato della velocità, potrebbe,

secondo la grandezza del coefficiente della medesima, verificarsi, fra i confini stessi dell'atmosfera terrestre, un'altezza limite, oltre la quale le nostre artiglierie non potessero lanciare proietti, comunque si rendessero potenti i mezzi di proiezione, ed anche capaci d' imprimere una velocità iniziale infinita. (1)

---

(1) Per avere il valore esatto dell'altezza, a cui s' innalza un proietto nell'atmosfera, e del tempo necessario per raggiugnere quell'altezza, conviene aver riguardo alla diminuzione così della densità dell'aria, come della gravità, a mano a mano che il proietto si eleva. Tenendo conto di queste due circostanze la gravità, il peso di un volume d'aria pari a quello del proietto, e la resistenza sono rispettivamente all'altezza s

$$G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2, \qquad \Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}, \qquad Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}},$$

in cui r rappresenta il raggio della terra; G, la gravità alla sua superficie; k, un coefficiente uguale alla pressione dell'aria sull'unità di superficie, divisa pel peso di un'unità cubica d'aria.

Per conseguenza l'equazione differenziale del moto ascendente del proietto è

$$\frac{du}{dt} = -G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \cdot \frac{P - \Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}} - G\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}.$$

Senza integrare quest'equazione si possono conseguire le medesime conclusioni, che qui addietro, circa al tempo ed allo spazio richiesti per annullare una velocità iniziale infinita. A tal effetto si divida l'altezza in due parti: la prima dalla velocità infinita sino ad una velocità finita; la seconda da quest'ultima velocità sino alla velocità zero. Se nella prima parte si prescinde dalla gravità, e non si considera che la resistenza dell'aria; e se, negletta nella seconda la resistenza dell'aria, non si tien conto che della gravità, è manifesto che la somma delle due altezze così ottenute è maggiore dell'altezza vera, a cui dee salire il proietto. Ora se trovasi che questa somma è finita, si può conchiudere esserlo pure la vera altezza. Il simile si dica del tempo.

Sia s_1 lo spazio per passare da $u = \infty$ a $u = u_1$. Si determinerà s_1 mediante l'equazione

$$\frac{udu}{ds} = -G\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}.$$

Non trattandosi che di avere un limite superiore dello spazio, è chiaro che si può

L'altezza massima, a cui può essere spinto un proietto, ed il tempo messo a raggiugnere quell'altezza, possono ottenersi in termini finiti nel

---

sostituire al secondo membro (lasciato da parte il segno) una quantità, che gli sia costantemente inferiore. Ora

$$\frac{1}{P+\lambda\Pi} < \frac{1}{P+\lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}};$$

dunque potrà s_1 calcolarsi mediante l'equazione

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P+\lambda\Pi},$$

oppure, posto, come più sopra,

$$G\frac{R}{P+\lambda\Pi} = F(u),$$

mediante l'equazione

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{rs}{k(r+s)}},$$

la quale fornisce

$$s_1 = \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{\frac{rs}{k(r+s)}}\,u\,du}{F(u)}.$$

Avendo l'esponenziale, fra i limiti dell'integrazione, sempre un valor finito, si dimostra, coll'aiuto di un ragionamento simile a quello adoprato più sopra, che s_1 è finito, quando il grado di $F(u)$ sia maggiore di due.

Chiamando s_2 lo spazio per passare da $u=u_1$ a $u=0$, esso sarà dato dall'equazione

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \cdot \frac{P-\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P+\lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}},$$

alla quale, poichè

$$\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi} < \frac{P-\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P+\lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}},$$

si può sostituire la seguente

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\left(\frac{r}{r+s}\right)^2,$$

ovvero, posto, come prima,

caso di una resistenza proporzionale ad una potenza qualunque della velocità. In fatti, ponendo

$$F(u)=Au^n,$$

si hanno gl' integrali definiti

$$T=\int_0^\infty \frac{du}{g+Au^n},$$

$$S=\int_0^\infty \frac{udu}{g+Au^n};$$

che sono nel novero di quelli conosciuti. Facciasi

$$\frac{Au^n}{g}=z, \qquad \text{onde} \qquad du=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{g}{A}\right)^{\frac{1}{n}} z^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

viene

$$G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}=g,$$

$$\frac{udu}{ds}=-g\left(\frac{r}{r+s}\right)^2;$$

la quale integrata, in modo che a $u=u_1$ risponda $s=s_1$, ed a $u=0$ risponda $s=s_1+s_2$, fornisce

$$s_2=\frac{u_1^2(r+s_1)^2}{2gr^2-u_1^2(r+s_1)}.$$

Questo valore è finito purchè sia

$$u_1^2<\frac{2gr^2}{r+s_1}<2gr.$$

Nulla osta che si prenda u_1 minore di tal quantità, dunque s_2 è pure finito. Per conseguenza la gittata massima verticale è sempre finita ogni volta che il grado della funzione, che esprime la resistenza, è superiore a due.

In modo analogo si troverebbe che il tempo è finito, quando $F(u)$ è di grado superiore al primo.

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{1}{n}}T=\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{n}-1}}{1+z}dz\ ,$$

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{2}{n}}S=\int_0^\infty \frac{z^{\frac{2}{n}-1}}{1+z}dz\ .$$

Ora si sa che

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\text{sin.}\,a\pi}\ ,$$

ove a è una costante positiva e <1.

Dunque

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{1}{n}}T=\frac{\pi}{\text{sin.}\,\frac{\pi}{n}}\ ,\quad \text{quando}\quad n>1\ ,$$

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{2}{n}}S=\frac{\pi}{\text{sin.}\,\frac{2\pi}{n}}\ ,\quad \text{quando}\quad n>2\ .$$

Se

$$F(u)=Au^2+Bu^3\ ,$$

il tempo e lo spazio per toccare il punto supremo sono

$$T=\int_0^\infty \frac{du}{g+Au^2+Bu^3}\ ,$$

$$S=\int_0^\infty \frac{udu}{g+Au^2+Bu^3}\ .$$

Effettuando l'integrazione fra i limiti indicati, si trova

$$\frac{2}{C}(3g+AC^2)T=l\left(\frac{g}{BC^3}\right)+\frac{2(3g+2AC^2)}{\sqrt{g(3g+4AC^2)}}\left(\frac{\pi}{2}+\text{arc.sin.}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BC^3}}\right)\ ,$$

$$\frac{2}{C^2}(3g+AC^2)S=l\left(\frac{BC^3}{g}\right)+\frac{6g}{\sqrt{g(3g+4AC^2)}}\left(\frac{\pi}{2}+\text{arc.sin.}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BC^3}}\right)\ ,$$

in cui C è determinato dall'equazione di terzo grado

$$BC^3 - AC^2 - g = 0 .$$

La funzione qui considerata è quella, che si prende oggigiorno da molti, come appresso vedremo, per rappresentare la resistenza dell'aria ai proietti dell'artiglieria. (1)

---

(1) Per una palla da 32 si ha

$$A = 0,000\,374 , \qquad B = 0,000\,000\,86 ,$$

supposto che il metro cubo d'aria pesi $1^k,208$.

Sostituendo questi valori nelle formole qui sopra, e prendendo $g = 9^m,805\,17$, si ottiene

$$C = 483,63 , \qquad T = 19'',24 , \qquad S = 3966^m .$$

Di maniera che, se l'atmosfera fosse per tutto ugualmente densa, una palla da 32 non potrebbe in nessun modo essere cacciata all'altezza di 3966^m; altezza inferiore a quella del Monte Bianco.

Atteso la diminuzione della densità e della gravità, la vera altezza sarà alquanto maggiore. Secondo ciò che è detto nella nota precedente, si può avere un limite superiore della vera altezza, col dividere il tragitto del proietto in due parti; nella prima delle quali si trascuri l'azione della gravità, e nella seconda quella della resistenza.

Per la prima parte avremo

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{rs}{k(r+s)}} ,$$

a cui si può sostituire

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{s}{k}} .$$

essendo che

$$e^{-\frac{s}{k}} < e^{-\frac{rs}{k(r+s)}} ;$$

dunque

$$e^{-\frac{s}{k}}\,ds = -\frac{u\,du}{F(u)} = -\frac{du}{Au + Bu^2} ;$$

ed integrando in modo che $s = 0$ dia $u = \infty$. riuscirà

$$s_1 = -kl\left[1 - \frac{1}{Ak}\,l\left(1 + \frac{A}{Bu_1}\right)\right] .$$

Per la seconda avremo

Vuolsi avvertire, che non tutte le funzioni hanno un grado determinabile nel modo, che si è detto di sopra; cioè havvi delle funzioni, per le quali il limite della funzione $\frac{F(u)}{u^n}$, quando u converge verso l'infinito, è sempre nullo od infinito, qualunque sia il valore di u, che si voglia adottare. Tali sono le funzioni

$$Alu\ , \qquad Ae^{mu}\ , \qquad Au^m(lu)^n\ , \qquad \text{ecc.}$$

Di queste funzioni, altre rendono finiti gl'integrali sopra accennati, altre li rendono infiniti.

Se, per esempio, si prende

$$F(u)=Alu\ ,$$

si ha

$$T=\int_0^\infty \frac{du}{g+Alu}=\int_0^\infty \frac{lu}{g+Alu}\cdot\frac{du}{lu}=K\int_0^\infty \frac{du}{lu}=\infty\ ,$$

$$S=\int_0^\infty \frac{udu}{g+Alu}=\int_0^\infty \frac{lu}{g+Alu}\cdot\frac{udu}{lu}=K'\int_0^\infty \frac{udu}{lu}=\infty\ .$$

$$s_2=\frac{u_1^2(r+s_1)^2}{2gr^2-u_1^2(r+s_1)}\ .$$

La velocità u_1 può essere presa ad arbitrio, ma giova determinarla in modo che s_1+s_2 sia un minimo.

Stabilito, come prima,

$$A=0,000\,374\ , \qquad B=0,000\,000\,86\ ,$$

e preso

$$k=\frac{10198}{1,208}=8442\ , \qquad r=6366407^m\ ,$$

si trova prossimamente

$$u_1=175^m\ .$$

Sostituito questo valore nelle equazioni sopradette, si ottiene

$$s_1=4248^m\ , \qquad s_2=1564^m, \qquad s_1+s_2=5812^m\ .$$

Dunque l'altezza limite, che una palla da 32 non può oltrepassare, e nè anche raggiugnere, salvochè con una velocità infinita, è certamente minore di 5812^m. La quale altezza è inferiore a quella delle più alte montagne del globo, e delle elevazioni a cui s'innalzarono molti aeronauti.

Se invece si pone

$$F(u)=Ae^{mu} ,$$

si ha

$$T=\int_0^\infty \frac{du}{g+Ae^{mu}}=\int_0^\infty \frac{e^{mu}}{g+Ae^{mu}}\cdot\frac{du}{e^{mu}}=K\int_0^\infty e^{-mu}du=\frac{K}{m} ,$$

$$S=\int_0^\infty \frac{udu}{g+Ae^{mu}}=\int_0^\infty \frac{e^{mu}}{g+Ae^{mu}}\cdot\frac{udu}{e^{mu}}=K'\int_0^\infty ue^{-mu}du=\frac{K'}{m^2} .$$

In quest'ultimo caso l'integrazione del tempo è possibile, ed agevolmente si ottiene

$$mgT=l\left(1+\frac{g}{A}\right) .$$

5. Resta per ultimo da considerare il moto di discesa verticale. L'equazione fondamentale è in questo caso

$$\frac{du}{dt}=g-F(u) ,$$

dalla quale si deducono il tempo e lo spazio in funzione della velocità, mediante i due integrali

$$t=\int_{u_0}^{u}\frac{du}{g-F(u)} ,$$

$$s=\int_{u_0}^{u}\frac{udu}{g-F(u)} .$$

Il moto di discesa gode di una proprietà notabile, la quale sta in ciò, che, sia egli accelerato, sia egli ritardato, la velocità converge sempre verso un limite, che non può oltrepassare.

Partendo da $u=u_0$, la velocità comincia a crescere o a decrescere, secondo che

$$g-F(u_0)$$

è positivo o negativo; ma giunto ad un valore U di u, che soddisfi all'equazione

$$g - F(u) = 0 \ ,$$

la velocità non può cambiar più di valore. In effetto tutti i coefficienti differenziali di u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$, ecc. sono mandati a zero da questo valor particolare di u, qualora le diverse funzioni derivate $F'(u)$, $F''(u)$, ecc. di $F(u)$ non divengano infinite per $u = U$. Dunque U è un limite verso cui converge la velocità u, purchè $F(u)$ sia una funzione continua nelle vicinanze di $u = U$.

Si può dimostrar facilmente, che il tempo e lo spazio necessarii per raggiugnere questo limite sono infiniti. Sia n il numero delle radici uguali ad U, contenute nell'equazione sopradetta; si ha

$$g - F(u) = (U-u)^n \varphi(u) \ ,$$

essendo $\varphi(u)$ una funzione, che non può diventar zero per $u = U$.

Il tempo e lo spazio divengono

$$t = \int_{u_0}^{U} \frac{1}{\varphi(u)} \cdot \frac{du}{(U-u)^n} \ ,$$

$$s = \int_{u_0}^{U} \frac{u}{\varphi(u)} \cdot \frac{du}{(U-u)^n} \ .$$

Le funzioni $\frac{1}{\varphi(u)}$, $\frac{u}{\varphi(u)}$ si mantengono finite in tutta l'estensione dell'integrazione: dunque se mettonsi i due integrali sotto la forma

$$t = K \int_{u_0}^{U} \frac{du}{(U-u)^n} = \frac{K}{1-n} \left[(U-u_0)^{1-n} - (U-U)^{1-n} \right] ,$$

$$s = K' \int_{u_0}^{U} \frac{du}{(U-u)^n} = \frac{K'}{1-n} \left[(U-u_0)^{1-n} - (U-U)^{1-n} \right] .$$

K e K' saranno due medie di valor finito. Se ne conchiude che t e s sono finiti, se $n < 1$; ed infiniti, se $n \geqq 1$.

Nel caso particolare di $U=0$, essendo K' una media fra $\frac{u_0}{\varphi(u_0)}$ e 0, resta dubbio, se K' sia finito od infinitesimo. A scoprire che cosa diventi s in questo caso, si osservi che l'integrale, che lo esprime, diviene allora

$$s=\int_{u_0}^{0}\frac{1}{\varphi(u)}\cdot\frac{du}{(-u)^{n-1}}=K''\int_{u_0}^{0}\frac{du}{(-u)^{n-1}}=\frac{K''}{2-n}(u_0^{2-n}-0^{2-n})\ .$$

Per conseguenza s è finito, se $n<2$; ed infinito se $n\geqq 2$.

Quando $n<1$, le derivate successive $F'(u)$, $F''(u)$, ecc. sono infinite per $u=U$.

Da tutto questo si raccoglie, che *il moto verticale di discesa tende a diventar uniforme; ma che nol diventa rigorosamente, se non se all' infinito, quando* $F(u)$ *è funzione continua di* u.

La velocità U di tal moto, che rende

$$g=F(u)=r\ , \qquad \text{e quindi} \qquad R=P-\Pi\ ,$$

ossia la resistenza del mezzo uguale al peso apparente del mobile, fu dall' Hugenio chiamata *velocità terminale.*

Merita speciale annotazione il caso, in cui la velocità iniziale è uguale alla terminale. Egli è evidente che allora il moto si mantiene sempre uniforme.

Ove si supponga, che la funzione $F(u)$ abbia la proprietà di crescere col crescere di u, da $u=0$ fino a $u=\infty$, si scorge di leggeri dal segno di $\frac{du}{dt}$, che, se $u_0>U$, la velocità va sempre decrescendo dall'alto al basso, senza poter mai raggiugnere la velocità terminale U; che all' incontro, se $u_0<U$, la velocità va crescendo continuamente dall'alto al basso, senza mai oltrepassare la velocità terminale; e che infine se $u_0=U$, la velocità si mantiene sempre uguale alla terminale.

Nel discutere il moto verticale discendente non bisogna perdere di vista una circostanza, che si è già avvertita di sopra, dovuta all'essenza stessa della resistenza; la quale consiste in ciò, che, se $F(u)$, per $u=0$, ha un valor maggiore di g, il mobile non può passare per la velocità zero, senza fermarsi e rimanere indefinitamente in riposo nel

punto ove ciò succede. Sicchè un proietto, che sia cacciato all' ingiù, con una velocità qualunque, in un mezzo resistente, pel quale si abbia $F(o) > g$, finirà sempre per arrestarsi dopo un tempo ed uno spazio finiti.

CAP. III.

Discussione della traiettoria.

6. La natura della curva, che un proietto descrive, dipende evidentemente dalla legge di resistenza del mezzo in cui si muove. Ora la teoria della resistenza dei mezzi è ancora involta in molta oscurità. Ben si sa, che la resistenza è una funzione della velocità; ma la sola cosa, che si possa ammettere *a priori* sulla natura di questa funzione, si è, che essa vada crescendo coi valori crescenti della variabile.

Laonde, senza adottare niuna speciale ipotesi sulla resistenza del mezzo, desiderar si potrebbe la discussione della traiettoria nel caso che sopra la forma della funzione, che esprime la resistenza secondo la velocità, non si supponga altro, se non che essa vada crescendo coi valori crescenti della variabile, e converga con questa verso l' infinito. Il che è quanto io tentai di fare in ciò che segue.

Suppongo adunque

$$\frac{r}{g} = \frac{R}{P - \Pi} = f(u) \ ,$$

e

$$f'(u) > o \ , \qquad f(\infty) = \infty \ .$$

La funzione $f(u)$ può esser tale, che per $u = o$ si abbia

$$f(o) > 1 \ , \quad o \quad f(o) = 1 \ , \quad o \quad f(o) < 1 \ ;$$

vale a dire la resistenza può essere tale, che, per una velocità infinitamente piccola, il suo valore sia maggiore del peso relativo del proietto, od eguale ad esso, o minore. Nel discutere la curva vuolsi por mente a questi tre casi.

Ciò posto veniamo ad esaminare le variazioni della velocità ne' diversi punti della curva.

1.° *Caso* $f(o) > 1$. L'incremento della velocità, espresso da (equaz. [1], n.° **2.**)

$$\frac{du}{dt} = -g\left\{f(u) + \text{sin.}\theta\right\} ,$$

conserva sempre il segno meno, sia θ positivo, sia θ negativo; poichè, se negativo, il minimo valore, che può ricever sin.θ, è -1; ed il più piccolo valore, che può acquistare $f(u)$ è $f(o)$, che, giusta l'ipotesi, è maggiore di uno.

Dunque u e t variano in verso opposto, cioè, se t cresce, u decresce, ed al contrario, se t decresce, u cresce.

Pertanto, prendendo per origine un punto qualunque, se si procede dalla parte de' tempi positivi, vale a dire nel verso del moto, la velocità va sempre decrescendo; ma quando sarà diventato $u = o$, è chiaro, che il proietto dee fermarsi, e rimanere in riposo, come s'è già avvertito nel discutere il moto rettilineo. Se ne conchiude, che, dalla banda de' tempi positivi, la velocità finisce sempre per estinguersi; e ciò qualunque sia il modo con cui può variare l'angolo θ, sia esso per diventar nullo o negativo.

Dalla parte de' tempi negativi la velocità cresce continuamente, nell'allontanarsi dall'origine, ed il suo accrescimento non ha limiti; onde la velocità tende a diventarvi infinita, qualunque sieno le vicende di θ.

2.° *Caso* $f(o) = 1$. Il valore di $\frac{du}{dt}$ è pure negativo in tutta l'estensione della curva, e non diventa uguale a zero che per $u = o$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Dunque la velocità va sempre decrescendo nel verso del moto fino a diventare uguale a zero.

Dalla parte de' tempi negativi la velocità converge verso l'infinito.

3.° *Caso* $f(o) < 1$. Tuttavolta che θ è positivo, vale a dire in tutti i punti del ramo ascendente della traiettoria, $\frac{du}{dt}$ è negativo. E lo è ancora per θ negativo, da $\theta = o$ fino a quell'angolo, per cui si ha

$$f(u) + \text{sin.}\theta = o .$$

Partendo adunque da un punto qualunque situato sul ramo ascendente, la velocità va decrescendo mentre il tempo aumenta; ma sino al punto

soltanto, in cui u raggiugne un certo valore u_1, che soddisfi all'equazione

$$f(u_1) + \text{sin. } \theta_1 = 0 \ .$$

Questo valore di $u = u_1$ è un minimo. In fatti esso rende

$$\frac{du}{dt} = 0 \ ,$$

e sostituito nell'espressione del secondo coefficiente differenziale, che è

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -gf'(u)\frac{du}{dt} - g\cos.\theta\frac{d\theta}{dt} \ ,$$

ovvero, ponendo in luogo di $\frac{d\theta}{dt}$ il suo valore ricavato dall' equazione [6] N.° 2,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -gf'(u)\frac{du}{dt} + \frac{g^2\cos.^2\theta}{u} \ ,$$

lo riduce a

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{g^2\cos.^2\theta_1}{u_1} \ ;$$

cioè ad una quantità positiva, non potendo u_1 essere nè nullo, nè negativo.

Che sia u_1 differente da zero, è agevole dimostrarlo per mezzo dell'equazione [9] del N.° 2,

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{u\,d\theta} = f(u) \ ;$$

la quale posta sotto questa forma

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{u\cos.\theta} = f(u)\frac{d\theta}{\cos.\theta} \ ,$$

ed integrata nel modo seguente, a far principio da $u = u_0$ e $\theta = \theta_0$,

$$l\frac{u\cos.\theta}{u_0\cos.\theta_0} = k\,l\frac{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)} \ ,$$

si cambia in

$$u = u_0 \frac{\cos.\theta_0}{\cos.\theta} \left\{ \frac{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)} \right\}^k = u_0 \left(\frac{\cos.\theta_0}{\cos.\theta}\right)^{1-k} \left(\frac{1-\sin.\theta_0}{1-\sin.\theta}\right)^k ,$$

ove k rappresenta un valor medio fra quelli, che riceve $f(u)$ nell'intervallo dell'integrazione; e perciò positivo e minore di uno, se si prende per u_0 un valore molto vicino a $u=0$.

Ora, se u potesse diventar nullo, dovrebbe θ ottenere un valor reale capace di render nullo il secondo membro della precedente equazione; ma essendo k minore di uno, è facile di scorgere, che non vi ha valor di θ, che possa ciò fare.

Non può u neppur discendere sino ad un valor negativo; poichè diminuendo per gradi insensibili, dovrebbe prima passare per zero, ciò che si è poco anzi dichiarato impossibile.

Dunque il valore di u_1, che rende nullo $\frac{du}{dt}$, è necessariamente superiore a zero.

Di là da questo valor minimo, cambiando di segno $\frac{du}{dt}$, la velocità cresce successivamente col tempo, finchè pervenga ad un nuovo valore u_2, che soddisfi all'equazione

$$f(u_2) + \sin.\theta_2 = 0 .$$

Questo valore di $u=u_2$ non può essere un massimo propriamente detto, perchè, se lo fosse, dovrebbe u ritornare a decrescere di là da u_2, la qual cosa richiederebbe che $\frac{d^2u}{dt^2}$ diventasse negativo o nullo: ma $\frac{d^2u}{dt^2}$ conserva invece costantemente un valor positivo, e quando è nullo, tutti gli altri coefficienti differenziali si annullano del pari.

Dunque u_2 è un limite verso cui converge u col crescere del tempo.

Pertanto, nel caso di $f(0)<1$, la velocità diventa minima in un punto, dove

$$f(u_1) + \sin.\theta_1 = 0 ;$$

e di qui movendo, ed allontanandosene da una parte e dall'altra, la

velocità cresce continuamente; ma nel verso del moto la velocità si accosta indefinitamente ad un limite, che non può oltrepassare, e che è dato dall'equazione

$$f(u_1) + \text{sin.}\,\theta_1 = 0 :$$

dove che nel verso opposto la velocità va crescendo indefinitamente.

Da tutte queste considerazioni si raccoglie la conclusione, che, *movendosi un proietto in un mezzo resistente, la sua velocità tende verso l'infinito dalla parte de' tempi negativi; e che dall'altra parte, cioè dalla parte verso cui il moto ha luogo, la velocità tende verso zero, quando* $f(0) \geqq 1$, *e verso un limite fisso differente da zero, quando* $f(0) < 1$.

7. Come si è già osservato (2.), l'angolo θ decresce col crescere di t, per la ragione che delle due forze, che sollecitano il mobile, l'una (la resistenza) non fa altro, che ritardarlo sulla tangente, e l'altra (la gravità) lo abbassa dalla tangente.

Dimostreremo ora che esso converge verso $-\frac{\pi}{2}$. A tale effetto si richiami l'equazione [6] del N.° 2.,

$$dt = -\frac{u}{g} \cdot \frac{d\theta}{\text{cos.}\,\theta},$$

donde, integrando a far principio da un punto qualunque scelto per origine, ove $\theta = \theta_0$, $t = 0$,

$$gt = \int_{\theta}^{\theta_0} u \frac{d\theta}{\text{cos.}\,\theta} = Kl \frac{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)},$$

in cui K rappresenta un valor medio fra i diversi valori, che prende la velocità fra i limiti dell'integrazione.

Non potendo u diventar nullo quando $f(0) < 1$, come si è dichiarato sopra (6), ne segue che in tal caso K ha un valor finito superiore a zero.

Ciò posto, dall'esame di questa equazione, risulta che a $t = \infty$, dee corrispondere $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Dunque

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2} ,$$

e la velocità limite u_2 è data dall'equazione

$$f(u_2) - 1 = 0 .$$

Quindi è che la velocità u_2 è uguale a quella, che, nel moto rettilineo discendente, fu chiamata velocità terminale (5.).

Nel caso di $f(0) \gtreqless 1$, riducendosi sempre la velocità a zero, il precedente discorso non vale a scoprire qual sia l'angolo dell'elemento della curva al punto, dove il moto cessa.

A trovare quest'angolo si richiami l'equazione [8] N.° 2., da cui si ricava

$$\frac{d\theta}{\cos.\theta} = \frac{du}{u\{f(u) + \sin.\theta\}} .$$

Integrando viene

$$l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right) + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u\{f(u) + \sin.\theta\}} .$$

Per avere il valore di θ, che risponde a $u = 0$, converrà estendere l'integrale fino a $u = 0$. Ora l'integrale

$$\int_{u_0}^{0} \frac{du}{u\{f(u) + \sin.\theta\}}$$

è sempre infinito: infatti, ponendolo sotto la forma

$$K \int_{u_0}^{0} \frac{du}{u} ,$$

si vede che

$$\int_{u_0}^{0} \frac{du}{u} = -\infty ,$$

mentre che K è sicuramente superiore a zero.

Dunque

$$l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=-\infty\ ,$$

donde si conchiude

$$\theta=-\frac{\pi}{2}\ .$$

Pertanto *l'estremità della curva dal lato de' tempi positivi è sempre verticale.*

Veniamo ora all'altra estremità della curva, sulla quale la velocità diventa infinita, e veggiamo qual è da questa parte il limite di θ.

L'angolo corrispondente a $u=\infty$, è dato dall'equazione

$$l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)+\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{u\{f(u)+\text{sin.}\,\theta\}}\ .$$

Se $f(u)$ è una funzione di grado determinabile colle regole ordinarie, l'integrale

$$\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{u\{f(u)+\text{sin.}\,\theta\}}$$

ha un valor finito, ogni volta che il grado di $f(u)$ è maggiore di zero, ed ha invece un valore infinito quando $f(u)$ è di grado zero, vale a dire quando la resistenza è costante. In fatti essendo n il grado di $f(u)$, l'integrale ora detto può scriversi nel modo seguente:

$$\int_{u_0}^{\infty}\frac{1}{\frac{f(u)}{u^n}+\frac{\text{sin.}\,\theta}{u^n}}\cdot\frac{du}{u^{n+1}}\ .$$

Nell'estensione compresa fra $u=u_0$ (si suppone che l'origine sia di qua dal punto dove la velocità diventa minima) e $u=\infty$, il primo fattore è sempre finito. Basta adunque per accertare, se l'integrale è finito od infinito, di considerare l'integrale

$$\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{u^{n+1}}\ .$$

Ora, essendo questo finito, se $n > 0$, ed infinito, se $n = 0$, resta dimostrato quanto si è asserito sopra.

Se ne conchiude, *che* $\theta < \frac{\pi}{2}$ *quando* $n > 0$, e θ_0 *differente da* $\pm \frac{\pi}{2}$; *e che* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *quando* $n = 0$.

Se $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, il moto è verticale.

Quando $\theta < \frac{\pi}{2}$, ci può essere positivo, negativo o nullo, secondo il valore di θ_0. Acciocchè sia nullo o negativo, è mestieri che θ_0 sia negativo. In questo caso la traiettoria non ha ramo ascendente, e consiste in un sol ramo discendente.

8. Il tempo messo dal proietto a passare dalla velocità u_0 alla velocità u, è dato da

$$g\,t = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u) + \text{sin. } \theta}\,.$$

Se si vuol conoscere il tempo richiesto per passare dalla velocità infinita, che avrebbe il proietto all'estremità del ramo, che precede l'origine, alla velocità, che egli ha all'origine, conviene estendere l'integrale fino a $u = \infty$.

Si ha adunque pel suo valore

$$g\,t = -\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{f(u) + \text{sin. } \theta}\,.$$

Sia, come prima, n il grado della funzione $f(u)$, si può scrivere l'integrale così

$$g\,t = -\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{\frac{f(u)}{u^n} + \frac{\text{sin. } \theta}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^n}\,.$$

Fra i limiti dell'integrazione, il primo fattore è sempre finito: si può adunque riconoscere, se t è finito od infinito, esaminando solo l'integrale definito

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^n} .$$

Questo è infinito se $n<1$ o $n=1$, e finito se $n>1$; dunque *il tempo negativo, corrispondente ad* $u=\infty$, *è una quantità infinita ogni volta che* $f(u)$ *è di grado inferiore od uguale al primo, e conserva invece un valor finito, quando* $f(u)$ *è di grado superiore al primo.*

Passando alla ricerca del tempo necessario al proietto per giungere all'altra estremità della curva, conviene distinguere tre casi:

1.° Quando $f(0)>1$, secondo ciò che si è dichiarato di sopra, la velocità va sempre decrescendo fino a diventar nulla. Il tempo richiesto per estinguere la velocità è dato dall'integrale

$$gt=-\int_{u_0}^{0} \frac{du}{f(u)+\sin.\theta} ;$$

il quale è evidentemente una quantità finita, non potendo il denominatore giammai annullarsi. In questo caso il moto ha luogo da $t=0$ fino al valor di t fornito dal precedente integrale, e da questo valore di t fino a $t=\infty$, si avrà $u=0$, ed il proietto resterà immobile nella stessa posizione.

2.° Quando $f(0)=1$, la velocità va sempre decrescendo fino a diventar nulla. Il tempo necessario per raggiungere questa velocità zero è dato da

$$gt=-\int_{u_0}^{0} \frac{du}{f(u)+\sin.\theta} .$$

Sia n un numero capace di rendere finita la frazione

$$\frac{f(u)-1}{u^n} ,$$

per $u=0$. Se si dà all'integrale la forma

$$gt=-\int_{u_0}^{0} \frac{u^n}{f(u)+\sin.\theta}\cdot\frac{du}{u^n} ,$$

si conchiude, *che* t *è finito, se* $n<1$, *ed infinito, se* $n\geqq 1$.

3.° Quando $f(0)<1$, la velocità nel ramo discendente, va da principio decrescendo fino a diventar minima, e cresce quindi continuamente avvicinandosi ad un limite. Allorchè, dopo l'integrazione dell'equazione [9], si avrà u in funzione di θ, si potrà, mediante l'equazione

$$f(u) + \text{sin. } \theta = 0 \ ,$$

ricavare l'angolo θ_1, che risponde alla velocità minima. Indi l'equazione [6]

$$g\,t = -\int_{\theta_0}^{\theta_1} u\,\frac{d\theta}{\text{cos. } \theta}$$

darà il tempo necessario perchè la velocità diventi minima. Il qual tempo è manifestamente finito.

Il tempo dopo il quale la velocità diventa costante, è dato dall'integrale

$$g\,t = -\int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} u\,\frac{d\theta}{\text{cos. } \theta} \ ,$$

che è infinito: in fatti la velocità u è sempre finita fra i limiti dell'integrazione, e si ha d'altra parte

$$\int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\text{cos. } \theta} = -\infty \ .$$

Dunque *la velocità non raggiugne il suo limite, se non dopo un tempo infinito.*

9. Ottenendosi l'espressione dell'arco col moltiplicar solo per u la quantità sottoposta al segno $\int$ nel valore del tempo, ne segue che i risultati relativi al tempo hanno i loro analoghi rispetto all'arco, purchè si aggiunga un'unità all'esponente n.

Dunque *il punto della traiettoria, nel ramo negativo, dove* $u=\infty$, *è ad una distanza infinita dall'origine, quando* $f(u)$ *è di grado inferiore od eguale al secondo; ed invece si trova situato ad una distanza finita dall'origine, quando* $f(u)$ *è di grado superiore al secondo.*

Quando al punto, dove $u=\infty$, l'arco è finito, questo punto è sempre uno de' punti singolari della curva: in fatti il secondo coefficiente differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{g}{(u\cos.\theta)^2},$$

che si ricava dall'equazione [10] N.° 2., vi diventa nullo. La natura poi del punto singolare dipende dalla funzione $f(u)$, che entra ne' successivi coefficienti differenziali. Il ramo ulteriore risponde sempre ad un altro problema di meccanica, in cui trovasi modificata o la direzione della velocità o della resistenza. Alcune volte non esiste neppure un ramo ulteriore, salvo che non si dia maggior estensione alle equazioni del moto già stabilite.

L'arco, che termina al punto, dove $u=0$, è sempre finito, se $f(0)>1$; ma se $f(0)=1$, esso è finito, quando $n<2$, ed infinito quando $n\geqq 2$. Essendo n un numero, che rende finita l'espressione

$$\frac{f(u)-1}{u^n}$$

per $u=0$.

Giova avvertire, che il punto corrispondente a $u=0$, è anch'esso un punto singolare della curva; poichè si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\infty,$$

quando $u=0$.

Ove sia $f(0)<1$, l'arco, che risponde alla velocità minima, è finito; ed infinito quello, che risponde alla velocità terminale. Laonde *la velocità non raggiugne rigorosamente il limite, verso cui tende continuamente, se non quando lo spazio percorso è infinito.*

10. Si è visto (N.° 7.), che la tangente estrema del ramo negativo della curva è verticale, quando il grado della resistenza è uguale a zero, ed inclinata quando è maggiore di zero; e che quella del ramo positivo è sempre verticale; giova ora cercare, se queste tangenti estreme sono situate a distanze finite od infinite dall'origine, od in altri termini cercare, se la traiettoria ha degli assintoti.

Cominciando dal ramo discendente, a scoprire, se la sua tangente estrema verticale incontri l'asse delle x ad una distanza finita, basta

esaminare qual valore assuma l'integrale

$$g\,x = -\int_{\theta_0}^{\theta} u^2\,d\theta\ ,$$

ricavato dall'equazione [4] N.° 2., quando si estenda fino a $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Ora è manifesto, che questo valore di x è necessariamente finito, poichè u^2 si conserva sempre finito fra i limiti dell'integrazione; dunque *il ramo discendente ha un assintoto verticale.*

Quando il ramo discendente della curva è finito, la qual cosa accade ogni volta che $f(o) > 1$, ed alcune volte allorchè $f(o) = 1$, come si è notato di sopra, quantunque la tangente estrema sia situata ad una distanza finita dall'origine, essa non è tuttavia un assintoto propriamente detto.

Il caso di grado zero della funzione $f(u)$, cioè di una resistenza costante, non è compreso nella precedente discussione, poichè la velocità terminale diventa in quel caso infinita, se $r < g$, e quindi è dubbio, se l'integrale sopra indicato è finito od infinito. Ma posciachè allora le equazioni del moto s'integrano, si può senz'altro vedere, che per $\theta = -\frac{\pi}{2}$, il valore di x è finito quando $r > \frac{g}{2}$, ed infinito quando $r \leqq \frac{g}{2}$: per conseguenza quando la resistenza è costante, la curva ha un assintoto, se $r < g$ e $> \frac{g}{2}$, e non lo ha, se $r \leqq \frac{g}{2}$.

Ove sia $r = g$, la velocità terminale è finita, e la curva ha un assintoto.

Passando all'altra estremità della traiettoria, sia Θ l'angolo limite di θ, che risponde a $u = \infty$. La parte D dell'asse delle y, compreso fra l'origine ed il punto d'incontro di una tangente qualunque, è dato da

$$D = y - x\,\text{tang.}\,\theta\ :$$

ponendo in luogo di x e y i loro valori forniti dalle equazioni [4] e [5] N.° 2., si ottiene

$$g\,D = \text{tang.}\,\theta \int_{\theta_0}^{\theta} u^2 d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} u^2\,\text{tang.}\,\theta\,d\theta\ .$$

A determinare la posizione dell'assintoto bisogna far convergere θ verso Θ, onde si ha per l'assintoto

$$g D = \int_{\theta_0}^{\Theta} (\text{tang. } \Theta - \text{tang. } \theta)\, u^2 d\theta \ .$$

Si sostituisca in vece di $d\theta$ il suo valore in dt, ricavato dall'equazione [6], si trova

$$D = \int_{0}^{t} \cos.\ \theta\, (\text{tang. } \theta - \text{tang. } \Theta)\, u\, dt \ .$$

Al limite inferiore $\theta = \theta_0$, $u = u_0$, $t = 0$; al limite superiore $\theta = \Theta$, $u = \infty$, $t = -\infty$, se il grado della resistenza $n \leqq 1$; e $t = -$ una quantità finita, se $n > 1$. Il prodotto

$$(\text{tang. } \theta - \text{tang. } \Theta)\, u$$

è finito all'origine, ed in tutta l'estensione dell'integrazione, fino al limite superiore, ove prende la forma indeterminata $0 \times \infty$. Per avere il suo valore a tal limite, basta porlo sotto la forma

$$\frac{\text{tang. } \theta - \text{tang. } \Theta}{\frac{1}{u}} \ ,$$

e differenziare il numeratore ed il denominatore rispetto alla stessa variabile θ; con che si ottiene

$$-\frac{u^2}{\cos.^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{\cos.\ \theta \left\{ \frac{f(u)}{u} + \frac{\sin.\ \theta}{u} \right\}} \ .$$

Se si fa ora $\theta = \Theta$ e $u = \infty$, e se si ricorda che $\Theta < \frac{\pi}{2}$, è manifesto, che questa frazione si riduce ad una quantità infinita, quando $f(u)$ è di grado inferiore al primo; ad una quantità finita quando $f(u)$ è di primo grado; ed a zero quando il grado di $f(u)$ è maggiore del primo.

Sia K un valore medio fra i diversi valori, che riceve fra i limiti dell'integrazione, il prodotto

$$\cos.\ \theta\, (\text{tang. } \theta - \text{tang. } \Theta)\, u \ :$$

K è finito od infinitamente grande, se $n < 1$; finito, se $n = 1$; e finito od infinitamente piccolo, se $n > 1$.

Ciò posto, dando all'integrale la forma

$$D = K \int_0^t dt = Kt ,$$

e rammentando, che

$t = -\infty$, se $n \leqq 1$;

$t =$ — una quantità finita, se $n > 1$, se ne conchiude, che D è infinito, se $n \leqq 1$; e che invece non è una quantità infinitamente grande, se $n > 1$.

Dunque la tangente estrema, corrispondente ad $u = \infty$, è situata ad una distanza infinita dall'origine, quando $f(u)$ è di grado inferiore od eguale al primo, ed è invece situata ad una distanza finita, quando $f(u)$ è di grado superiore al primo.

Oltre il secondo grado la tangente estrema non è ciò, che chiamasi propriamente un assintoto, non estendendosi allora la curva fino all'infinito. Sicchè *non vi ha realmente assintoto, se non se quando* $f(u)$ *è di grado superiore al primo, ma non maggiore del secondo.*

Il principio, su cui si fonda la discussione, che precede, intorno all'angolo, al tempo, all'arco, ed alla tangente, corrispondenti alla velocità infinita, dipende dal modo di stabilire il grado di una funzione. Ora sonovi, come già accennai, trattando del moto rettilineo (4.), funzioni che non han grado determinabile colle regole ordinarie.

Per esempio le funzioni

$$x^\alpha lx , \quad x^\alpha llx , \quad x^\alpha (lx)^\beta , \quad x^\alpha (lx)^\beta (llx)^\gamma , \quad \text{ecc.}$$

$$x^\alpha \text{ e } {}^{\beta x} , \quad x^\alpha x^{\beta x} , \quad \text{ecc.} ,$$

e quelle che se ne ottengono per via di composizione, non hanno un grado n, perchè qualunque sia il valore di n, che si voglia adottare, si avrà sempre per limite della frazione $\frac{f(x)}{x^n}$, quando x converge verso l'infinito, una quantità nulla od infinita, e non mai una quantità finita, come ciò deve accadere, onde la $f(x)$ possa dirsi del grado n.

Per discutere questi casi si seguirà un metodo analogo a quello adoprato sopra; cioè si procaccerà di dividere la quantità sottoposta all'integrale in due fattori, l'uno de' quali sia finito in tutto l'intervallo

dell' integrazione, e che perciò si potrà metter da parte: allora il risultato, per quanto appartiene alla semplice questione di sapere, se sia finito od infinito, sarà dato dall' integrale dell'altro fattore.

11. La discussione del modo, con che varia il raggio di curvatura ne' diversi punti della traiettoria, è molto acconcia a farne conoscere la forma.

Il raggio di curvatura è espresso da (N.° 2., equaz. [7])

$$\rho = \frac{u^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos.\theta} .$$

Quest'espressione ci mostra, che il raggio di curvatura è infinito al punto corrispondente a $u = \infty$; ch'esso va diminuendo fino al vertice della curva, cioè infin tanto che $\theta > 0$, poichè così u, come $\frac{1}{\cos.\theta}$ van decrescendo.

Oltre il vertice u decresce ancora, ma $\frac{1}{\cos.\theta}$ cresce, sicchè a primo aspetto non si può decidere, se ρ continui o no a decrescere. A chiarircene basta formare il primo coefficiente differenziale di ρ rispetto a θ, ed esaminarne il segno. Or si ha

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2u}{g} \cdot \frac{1}{\cos.\theta} \cdot \frac{du}{d\theta} + \frac{u^2}{g} \cdot \frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} ;$$

sostituendo in luogo di $\frac{du}{d\theta}$ il suo valore, viene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{u^2}{g \cos.^2\theta} \left\{ 2f(u) + 3 \sin.\theta \right\} .$$

Partendo dal vertice $\frac{d\rho}{d\theta}$ è positivo; per conseguenza ρ comincia a variare nello stesso verso di θ, cioè decresce ancora oltre il vertice: ma soltanto fino al punto dove θ rende

$$2f(u) + 3 \sin.\theta = 0 ;$$

essendo che di là $\frac{d\rho}{d\theta}$ diventa negativo, come lo mostra il segno positivo del secondo coefficiente differenziale in cotal punto, il quale è

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{\rho}{\cos.^2\theta}\left\{\frac{2}{3}uf(u)f'(u) + 3\cos.^2\theta\right\} .$$

Dunque il raggio di curvatura va decrescendo fino a raggiugnere un minimo determinato dall'equazione

$$2f(u) + 3\sin.\theta = 0 ,$$

e di poi va sempre crescendo sino all'infinito.

Il valore di $\frac{du}{d\theta}$ al punto, dove il raggio di curvatura è minimo, si riduce a

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{2}u\,\text{tang.}\,\theta .$$

Essendo nel ramo discendente θ negativo, questo valore di $\frac{du}{d\theta}$ sarà positivo; dunque al punto della curvatura massima, u e θ variano nello stesso verso, cioè u decresce, e non ha ancor raggiunto il suo valor minimo, di cui si è fatto cenno sopra (6). Se ne conchiude, che *il punto della massima curvatura è più vicino al vertice, che il punto, dove la velocità diventa minima.*

12. *La velocità ed il raggio di curvatura sono maggiori nel ramo ascendente che nel discendente, per inclinazioni eguali, ma di segno contrario, della curva.* In fatti l'equazione [9], N.° 2.,

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{d\theta} = uf(u) ,$$

ci mostra, che la velocità orizzontale $u\cos.\theta$ decresce insieme con l'angolo θ, vale a dire va decrescendo col procedere dal ramo ascendente verso il discendente: dunque pel medesimo valore di $\cos.\theta$, u è maggiore nel ramo ascendente, che nel discendente.

La stessa cosa si conchiude di leggeri, rispetto al raggio di curvatura, alla semplice ispezione dell'espressione

$$\rho = \frac{u^2}{g}\cdot\frac{1}{\cos.\theta} .$$

13. Essendo il valore di y dato dall'equazione

$$gy = -\int_{\theta_0}^{\theta} u^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta \ ,$$

la maggior altezza, a cui il proietto s'innalza, è data da

$$gY = -\int_{\theta_0}^{0} u^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta = \int_{0}^{\theta_0} u^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta \ .$$

Se si chiama θ' l'angolo acuto, sotto cui il proietto ricade sull'asse delle x, ossia l'angolo di *caduta*, si ha pure

$$gY = \int_{0}^{-\theta'} u^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta \ :$$

mettendo $-\theta$ invece di θ in quest'integrale, si ottiene

$$gY = \int_{0}^{\theta'} u'^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta \ ,$$

ove u' dinota il valore di u corrispondente a $-\theta$. Si ha adunque

$$\int_{0}^{\theta_0} u^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta = \int_{0}^{\theta'} u'^2 \,\text{tang.}\,\theta . d\theta \ .$$

Ora, secondo ciò che si è dimostrato poco innanzi (12.), si ha, per un medesimo valore di θ, $u' < u$. Gli elementi del secondo integrale sono dunque minori di quelli del primo; in conseguenza, acciocchè i due integrali sieno uguali, è giuocoforza, che i limiti del primo sieno meno estesi che quelli del secondo, cioè che si abbia $\theta_0 < \theta'$. Dunque *l'angolo di caduta supera l'angolo di proiezione.*

14. Se nell'equazione [1]

$$\frac{du}{dt} = -r - g \,\text{sin.}\,\theta$$

si pone $\frac{ds}{u}$ invece di dt, si ottiene

$$u\,du = -r\,ds - g\,dy \ .$$

Integrando, a far principio da $u = u_0$, $s = 0$, $y = 0$, si ha

$$u^2 = u_0^2 - 2\int_0^s r\,ds - 2gy \ .$$

Notando con u' la velocità di caduta, e con s' la lunghezza della traiettoria, compresa fra l'origine ed il punto di caduta, si ha

$$u'^2 = u_0^2 - 2\int_0^{s'} r\,ds \ ;$$

donde è manifesto che $u' < u_0$. Dunque *la velocità al punto di caduta è minore che al punto di partenza.*

13. Si ha

$$dx = \frac{dy}{\text{tang. } \theta} \ .$$

Chiamando x' l'ampiezza del ramo ascendente, e x'' quella del ramo discendente, Y l'altezza del tiro, si ha

$$x' = \int_0^Y \frac{dy}{\text{tang. } \theta} \ ,$$

$$x'' = \int_0^{-Y} \frac{dy}{\text{tang. } \theta} \ .$$

Pongasi $-dy$ e $-\theta'$ in luogo di y e θ nel secondo integrale: i suoi limiti diventano zero e Y; e ne risulta

$$x'' = \int_0^Y \frac{dy}{\text{tang. } \theta'} \ ,$$

ove θ' indica l'angolo formato coll'asse delle x dall'elemento della curva, situato allo stesso livello dell'elemento, che forma l'angolo θ. Ora (N.° 13.) si ha $\theta < \theta'$: gli elementi del secondo integrale sono dunque minori di quelli del primo; e, dacchè i limiti sono i medesimi, si deve avere $x' > x''$. Dunque *l'ampiezza del ramo ascendente è maggiore di quella del ramo discendente.*

CAP. IV.

Analisi di alcuni casi, in cui le equazioni del moto de' proietti si riducono alle quadrature.

16. Acciocchè le equazioni del moto di un proietto in un mezzo resistente sieno riducibili alle quadrature, è necessario e sufficente, che la funzione $f(u)$, da cui è espressa la resistenza, sia tale, che si possano separare le variabili nell'equazione differenziale di primo ordine

$$du - u\left(\frac{\operatorname{sin.}\theta + f(u)}{\operatorname{cos.}\theta}\right)d\theta = 0\ ,$$

che si trae dall'equazione [8], N.° 2.

Poco numerose sono le forme di $f(u)$, che consentano siffatta separazione. (*)

Giovanni Bernoulli, pel primo, negli *Atti di Lipsia* per l'anno 1719. ridusse alle quadrature il problema balistico, quando $f(u) = au^n$; e il D'Alembert, nel suo *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744), dimostrò che la riduzione è ancora possibile, quando

(*) Vero è, che poco numerose sono le forme di $f(u)$, che rendano possibile l'integrazione, partendo da presupposizioni sulla teoria della resistenza; ma quelle, che si possono ottenere, senza preoccuparsi della conformità della legge di resistenza con quanto somministra la pratica, sono al contrario in numero indefinito. E in effetto, data una relazione qualunque fra la velocità u e l'angolo θ, si può sempre, secondo ciò che si è detto al N.° 2, determinare, coll'aiuto della semplice differenziazione, la legge di resistenza necessaria, perchè questa relazione abbia luogo nel moto del proietto. Ora non essendovi limite al numero delle relazioni fra u e θ, che si possono immaginare, ne segue che sono pure innumerevoli le leggi di resistenza, che consentono l'integrazione.

Che se invece di partire dalla legge delle velocità, si prendan le mosse dalla traiettoria, e che, supposta questa data, si cerchi la legge di resistenza necessaria, perchè il proietto la percorra, si ha un'altra sorgente, che può fornire un numero indefinito di forme per $f(u)$, capaci di rendere l'integrazione possibile

$$f(u)=a+bu^n\ ,$$

e quando

$$f(u)=a+b\,lu\ ,$$

essendo a, b, n delle costanti qualunque.

Nel presente capitolo mi propongo di esaminare questi due casi, che sono poco conosciuti.

Sia

$$f(u)=a+bu^n\ ,$$

l'equazione differenziale sopradetta diventa

$$du-u\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta-bu^{n+1}\frac{d\theta}{\cos.\theta}=0\ .$$

Quest'equazione, che ha la forma di quella detta del Bernoulli, si riduce immediatamente ad un'equazione lineare, dividendo per u^{n+1}, e facendo $u^{-n}=v$; si ottiene di fatto in tal modo

$$dv+nv\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta+nb\frac{d\theta}{\cos.\theta}=0\ ;$$

il cui integrale è

$$v=u^{-n}=e^{-n\int\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta}\left[c-nb\int e^{n\int\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta}\frac{d\theta}{\cos.\theta}\right],$$

essendo c una costante arbitraria.

Dunque

$$u=\frac{e^{\int\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta}}{\left[c-nb\int e^{n\int\left(\frac{a+\text{sin.}\,\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta}\frac{d\vartheta}{\cos.\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}\ .$$

La costante c si determina, facendo corrispondere un dato valore di θ ad un dato valore di u. Supponendo all'origine $\theta=\theta_0$, e $u=u_0$, si ha, per determinare c, l'equazione

$$u_0 = \frac{\varphi(\theta_0)}{\left[c - nb\psi(\theta_0)\right]^{\frac{1}{n}}},$$

ove

$$\varphi(\theta) = e^{\int \left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right) d\theta},$$

$$\psi(\theta) = \int \left\{\varphi(\theta)\right\}^n \frac{d\theta}{\cos.\theta}.$$

Se ne trae

$$c = \left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\psi(\theta_0),$$

che, posto a suo luogo, dà

$$u = \frac{\varphi(\theta)}{\left[\left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\left\{\psi(\theta_0) - \psi(\theta)\right\}\right]^{\frac{1}{n}}},$$

oppure, se si vuole,

$$u = \frac{e^{\int \left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right) d\theta}}{\left[\left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\int_0^{\theta_0} e^{n\int \left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right) d\theta} \frac{d\theta}{\cos.\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Si può dare un' altra forma al valore di u, determinando la costante c colla condizione, che ad $u = \infty$, risponda $\theta = \Theta$. Allora si trova, ogni volta che $\Theta < \frac{\pi}{2}$, la qual cosa si è dimostrato esser sempre (N.° 7.), purchè b non sia nullo,

$$c = nb\psi(\Theta),$$

$$u = \frac{e^{\int \left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right) d\theta}}{\left[nb\int_{\theta}^{\Theta} e^{n\int \left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right) d\theta} \frac{d\theta}{\cos.\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Si ha

$$\int_{\theta}^{\Theta}\left(\frac{a+\sin.\theta}{\cos.\theta}\right)d\theta=\frac{\text{tang.}^{a}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta}{2}\right)}{\cos.\Theta}-\frac{\text{tang.}^{a}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos.\theta},$$

e però

$$u=\frac{\text{tang.}^{a}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta}{2}\right)}{\cos.\Theta}\left[nb\int_{\theta}^{\Theta}\frac{\text{tang.}^{na}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos.^{n+1}\theta}d\theta\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Per dare una forma algebrica a queste espressioni, si ponga

$$\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=z,$$

donde si trae

$$\cos.\theta=\frac{2z}{1+z^{2}},\qquad d\theta=\frac{2dz}{1+z^{2}}.$$

Mettendo questi valori nell'equazione precedente, e chiamando Z il valore di z, corrispondente a $\theta=\Theta$, si ottiene

$$u=\frac{(1+z^{2})z^{a-1}}{\left[nb\int_{z}^{Z}(1+z^{2})^{n}z^{n(a-1)-1}dz\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

L'integrale, che trovasi al denominatore, si esprime in termini finiti, e quindi anche la velocità u, ogni volta che n è numero intero, o se è frazionario, quando $\frac{n(a-1)}{2}$, oppure $\frac{n(a+1)}{2}$ è numero intero.

L'espressione di u per via di z prende una forma semplice, quando

$$n=\frac{2}{a-1};$$

si ha infatti allora

$$\frac{b}{a+1}u^{\frac{2}{a-1}}=\frac{(1+z^{2})^{\frac{2}{a-1}}z^{2}}{(1+Z^{2})^{\frac{a+1}{a-1}}-(1+z^{2})^{\frac{a+1}{a-1}}}.$$

Introducendo il valore di u in funzione di z nelle formole seguenti (N.° 2.):

$$g\,ds = -u^2\frac{d\theta}{\cos.\theta} = -u^2\frac{dz}{z}\,,$$

$$g\,dx = -u^2\,d\theta = -2u^2\frac{dz}{1+z^2}\,,$$

$$g\,dy = -u^2\,\text{tang.}\,\theta\,.d\theta = u^2\frac{1-z^2}{1+z^2}\cdot\frac{dz}{z}\,,$$

$$g\,dt = -u\frac{d\theta}{\cos.\theta} = -u\frac{dz}{z}\,,$$

$$g\,\rho = u^2\frac{1}{\cos.\theta} = u^2\frac{1+z^2}{2z}\,,$$

si ottengono le espressioni

$$g\,s = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)^2 z^{2a-3}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}}\,,$$

$$g\,x = \int_z^{z_0} \frac{2(1+z^2)z^{2(a-1)}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}}\,,$$

$$g\,y = \int_{z_0}^{z} \frac{(1-z^4)z^{2a-3}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}}\,,$$

$$g\,t = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)z^{a-2}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{1}{n}}}\,,$$

$$2g\rho = \frac{(1+z^2)^3 z^{2a-3}}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}};$$

le quali forniscono i valori di s, x, y, t, ρ in funzione di z, o, se si vuole, in funzione di θ, per mezzo delle sole quadrature.

Notisi, che fra z_0 e Z passa la relazione

$$u_0 = \frac{(1+z_0^2) z_0^{a-1}}{\left[nb\int_{z_0}^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{1}{n}}},$$

ovvero

$$nb\int_{z_0}^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz = \left[\frac{(1+z_0^2) z_0^{a-1}}{u_0}\right]^n = \frac{2^n \text{tang.}^{na}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)}{u_0^n \cos.^n \theta_0},$$

che serve a determinare Z, quando le circostanze iniziali del moto sono assegnate.

17. Le quadrature sopra indicate si ottengono sotto forma finita nei casi particolari seguenti:

Quella, che dà s, quando

$n = 0$, qualunque sia a;
$n = 1$, purchè sia a razionale, e differente da ± 1;
$n = 2$, qualunque sia a;
$n = \frac{2}{p}$, purchè sia $a = pq \pm 1$ (essendo p e q due numeri interi).

Quelle, che danno x e y, quando

$n = 0$, qualunque sia a;
$n = 1$, purchè sia a razionale, e differente da ± 1;
$n = 2$, purchè sia a razionale, e differente da zero e da ± 1;
$n = \frac{2}{p}$, purchè sia $a = pq \pm 1$ (essendo p e q due numeri interi).

Quella, che dà t, quando

$n = 0$, qualunque sia a;

$n = 1$, qualunque sia a;

$n = \frac{1}{p}$, purchè sia $a = 2pq \pm 1$ (essendo p e q due numeri interi).

Il caso di $n = 2$ è il più importante da considerarsi, perchè una resistenza in parte costante, e in parte proporzionale al quadrato della velocità, pare che convenga ai mezzi solidi o molli, quali sono i muri, i legni, le terre, ecc., come si vedrà in appresso.

In questo caso il denominatore comune diviene

$$\int_z^Z (1+z^2)^2 z^{2a-3} dz$$

$$= \frac{Z^{2(a-1)}}{2(a-1)} + \frac{Z^{2a}}{a} + \frac{Z^{2(a+1)}}{2(a+1)} - \frac{z^{2(a-1)}}{2(a-1)} - \frac{z^{2a}}{a} - \frac{z^{2(a+1)}}{2(a+1)} .$$

Quindi è, che, quando a è razionale e differente da zero e da ± 1, le espressioni di x, y hanno la forma di frazioni razionali, le quali si possono integrare in termini finiti o per mezzo de' logaritmi, o degli archi di circolo, dappoichè saranno scomposte in frazioni parziali, i cui denominatori sieno i fattori binomii o trinomii del loro denominatore.

Gli è inutile di avvertire, che quando a è frazionario ed uguale a $\frac{p}{q}$, si deve fare $z^{\frac{1}{q}}$ uguale ad una nuova variabile, per rendere razionale il denominatore.

Questo denominatore non è più algebrico, ogni volta che $a = 0$, oppure $a = \pm 1$; in fatti nel primo caso

$$\frac{Z^{2a}}{a} - \frac{z^{2a}}{a} = \infty - \infty = 2l\frac{Z}{z} ,$$

e nel secondo

$$\frac{Z^{2(a\mp 1)}}{2(a\mp 1)} - \frac{z^{2(a\mp 1)}}{2(a\mp 1)} = l\frac{Z}{z} .$$

Allora i valori di x e y non si possono più conseguire in termini finiti.

Laonde avviene, che, mentre non si possono avere i valori finiti delle coordinate della traiettoria, nel caso più semplice della resistenza proporzionale al solo quadrato della velocità, si hanno all'incontro i valori delle stesse coordinate in termini finiti nel caso più generale, in cui si aggiunga un termine costante, purchè razionale e differente dall'unità, all'altro, che contiene il quadrato della velocità. La qual cosa agevolmente si spiega, ove s'avverta, che il grado dell'equazione da risolvere per iscomporre il denominatore, cresce a mano a mano che a diventa una frazione più piccola; e che quell'equazione diventa di grado infinito, quando $a=0$.

18. Prima di lasciare il soggetto di una resistenza composta di due termini, non taccrò di una corrispondenza notevole fra la traiettoria descritta in un mezzo, la cui resistenza è espressa da a, e le traiettorie descritte ne' mezzi, le cui resistenze sono espresse da

$$a+bu \quad \text{e} \quad a+bu^2 .$$

Allorchè $n=1$, la formola, che dà il tempo, diventa

$$bgt=\int_{z}^{z_0}\frac{(1+z^2)z^{a-2}dz}{\int_{z}^{Z}(1+z^2)z^{a-2}dz};$$

nella quale il numeratore è il differenziale esatto del denominatore, preso con segno contrario. Dunque

$$bgt=\int_{z_0}^{z}dl\int_{z}^{Z}(1+z^2)z^{a-2}dz;$$

donde, eseguendo l'integrazione fra i limiti z_0 e z,

$$bgt=l\left\{\frac{\int_{z}^{Z}(1+z^2)z^{a-2}dz}{\int_{z_0}^{Z}(1+z^2)z^{a-2}dz}\right\}.$$

Scindendo l'integrale superiore in due altri fra z e z_0, e fra z_0 e Z, e sostituendo all'integrale inferiore il suo valore, trovato sopra, in funzione dei dati iniziali, viene

$$bgt = l\left\{1 + \frac{bu_0\cos.\vartheta_0}{2z_0^a}\int_z^{z_0}(1+z^2)z^{a-2}dz\right\},$$

e quindi

$$e^{bgt} = 1 + \frac{bu_0\cos.\vartheta_0}{2z_0^a}\int_z^{z_0}(1+z^2)z^{a-2}dz.$$

Ad avere il tempo per un mezzo di resistenza costante, basta fare $b=0$ in quest'espressione, dopo aver svolto l'esponenziale. Chiamando t' questo tempo, si ha

$$gt' = \frac{u_0\cos.\vartheta_0}{2z_0^a}\int_z^{z_0}(1+z^2)z^{a-2}dz;$$

ne discende la relazione

$$e^{bgt} = 1 + bgt',$$

fra i tempi messi da due proietti eguali a descrivere due archi egualmente inclinati alle loro estremità, in due mezzi, le cui resistenze sieno espresse da $a+bu$ e da a.

Quando $t' = -\frac{1}{bg}$, $t = -\infty$. Onde che, prendendo sulla curva descritta nel mezzo di resistenza costante un arco, che sia percorso nel tempo $-\frac{1}{bg}$, e conducendo una tangente alla sua estremità, questa sarà parallela alla tangente estrema dell'altra curva prolungata all'infinito.

19. Nel caso di $n=2$, la formola, che dà l'arco s, si riduce, nello stesso modo, a

$$e^{2bgs} = 1 + \frac{b}{2}\left(\frac{u_0\cos.\vartheta_0}{z_0^a}\right)^2\int_z^{z_0}(1+z^2)z^{2a-3}dz.$$

Se si chiama s' l'arco descritto in un mezzo di resistenza costante, si trova, facendo $b=0$,

$$2gs' = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0 \cos.\theta_0}{z_0^{\,a}}\right)^2 \int_z^{z_0} (1+z^2) z^{2a-3}\, dz \ .$$

Pertanto

$$e^{2bgs} = 1 + 2bgs' \ .$$

A $s' = -\frac{1}{2bg}$ risponde $s = -\infty$. Dunque, se si prende, sulla traiettoria descritta in un mezzo di resistenza costante, un arco uguale a $-\frac{1}{2bg}$, la tangente alla sua estremità è parallela all'assintoto inclinato della traiettoria descritta in un mezzo, la cui resistenza è proporzionale al quadrato della velocità, più la stessa costante.

Quando $a = 0$, la curva descritta nel mezzo di resistenza costante, si cambia in una parabola, ed allora si cade sulla relazione conosciuta, fra la traiettoria nel vacuo, e la traiettoria in un mezzo resistente, secondo il quadrato della velocità. Tal relazione non è, come si vede, se non che un caso particolare di quella qui dichiarata, la quale credo non sia stata per anco da altri avvertita. Il simile si può dire della relazione trovata nel numero precedente.

20. Allorchè si suppone

$$f(u) = a + b\,lu \ ,$$

si ottiene facilmente

$$lu = \left(lu_0 + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{z}{z_0}\right)^b - \frac{a}{b} - z^b \int_{z_0}^{z} \frac{1-z^2}{1+z^2} z^{-b-1}\, dz \ ,$$

ove si è fatto, come sopra,

$$z = \text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) .$$

Il valore di u è finito ogni volta che b è intero.

Determinato così u in funzione di z, le formole date sopra forniranno le espressioni di s, x, y, t, ρ in funzione della medesima variabile, per via delle quadrature.

Non mi diffonderò maggiormente sopra di questa ipotesi, essendo ella più geometrica, che fisica.

CAP. V.

Metodi d'approssimazione.

21. Quantunque le equazioni del moto di un proietto in un mezzo resistente non sieno integrabili, se non se in alcuni casi particolari, tuttavia si possono sempre calcolare *numericamente*, con un'approssimazione illimitata, le diverse circostanze del moto. E ciò non solo nel caso, in cui si definisca *analiticamente* la funzione della velocità, che esprime la resistenza del mezzo; ma anche quando non si conosca la resistenza, se non per via dell'*osservazione*, cioè mediante una tavola numerica, ove si trovino, da una parte i valori molto vicini e molto numerosi della velocità, e dall'altra, i valori corrispondenti della resistenza, quali li darebbe una serie di sperimenti numerosi in modo da eliminare gli errori, ch'essi comportano, dai risultati medii.

Suppongo, che si abbia simile tavola per un dato mezzo resistente, e che col suo aiuto si voglia determinare il moto di un proietto nello stesso mezzo.

L'equazione differenziale di primo ordine (equaz. [9] N.° 2.)

$$d(u\cos.\theta)=uf(u)\,d\theta\ ,$$

che lega le variazioni infinitesime della velocità a quelle dell'angolo della curva, ci offre sempre il mezzo di calcolare *aritmeticamente*, con un'approssimazione illimitata, il valore di u corrispondente ad un dato valore di θ; e ciò qualunque sia la funzione $f(u)$, purchè continua fra i limiti dell'integrazione.

In fatti, quando si ha un'equazione differenziale

$$dy=F(x,y)\,dx\ ,$$

insieme col valor particolare y_0 della funzione y, corrispondente al valor particolare x_0 della variabile x, si può calcolare approssimativamente un altro valore Y di y, corrispondente ad un altro valore X di x, interponendo fra i limiti x_0, X, una serie crescente o decrescente di nuovi

valori di x, e facendo loro corrispondere una serie di nuovi valori di y, calcolati in modo, che, essendo due valori consecutivi di x rappresentati da

$$x, \quad x+\Delta x,$$

e i valori corrispondenti di y da

$$y, \quad y+\Delta y,$$

si abbia in generale

$$\Delta y = F(x, y)\,\Delta x .$$

Si dimostra, che l'ultimo de' valori di y, così calcolati, o quello, che risponde al valore X di x, differisce dal vero valore di y, che si otterrebbe facendo decrescere indefinitamente i valori numerici di Δx, di una quantità minore del prodotto

$$\left(B+\frac{AC}{2}\right)\left[\frac{(1+C\delta)^n-1}{C}\right]\delta ; \quad (1)$$

ove A, B, C sono tre numeri rispettivamente superiori ai valori numerici delle tre funzioni

$$F(x, y), \quad \frac{dF(x, y)}{dx}, \quad \frac{dF(x, y)}{dy}$$

fra i limiti $x=x_0$, $y=y_0$ e $x=X$, $y=Y$; n esprime il numero d'elementi, in cui si è diviso $X-x_0$; δ un numero superiore a ciascuno de' valori di Δx, non avuto riguardo al segno.

Volendosi computare il valore Y di y, corrispondente a $x=X$, con un grado dato d'approssimazione, verbi grazia, in modo che l'errore commesso sia inferiore ad un'unità decimale dell'ordine m, basterà attribuire agli elementi Δx della differenza $X-x_0$ un valore tale che si abbia

$$\delta < \frac{2C}{(10)^m(B+AC)\left[(1+C\delta)^n-1\right]} .$$

---

(1) Quest'espressione del limite dell'errore commesso è dovuta al sig. CAUCHY. Vedi, per la dimostrazione, la 28.ª Lezione del *Calcolo integrale del* MOIGNO, oppure una Memoria del CORIOLIS, inserita nel Tomo 2.° del *Journal de Mathématiques de Liouville*.

Applicando questo metodo all'equazione

$$d(u\cos.\theta)=uf(u)d\theta\ ,$$

si potrà calcolare una serie u_0, u_1, u_2, u_3, ... di valori di u, corrispondenti ad una serie θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, ... di valori di θ. Ciò fatto, sarà agevole, mediante le equazioni

$$g\,ds=-u^2\frac{d\theta}{\cos.\theta}\ ,$$

$$gdx=-u^2d\theta\ ,$$

$$gdy=-u^2\,\text{tang.}\,\theta.d\theta\ ,$$

$$g\,dt=-u\frac{d\theta}{\cos.\theta}\ ,$$

di conseguire i valori di s, x, y, t per mezzo delle quadrature.

Non tutte le forme, sotto cui può esser posta l'equazione differenziale tra u e θ, sono egualmente proprie a dare una grande approssimazione. La forma più conveniente per ciascun caso particolare dipende dalla natura della funzione $f(u)$.

Allorchè si tratta della resistenza dell'aria, si sa che ne' moti assai lenti la resistenza cresce meno del quadrato della velocità, e che il contrario succede ne' moti rapidissimi; ma che nelle mediocri velocità la resistenza non si diparte guari dalla ragione del quadrato della velocità.

Trattandosi adunque delle velocità ordinarie de' proietti dell'artiglieria, la quantità

$$\frac{f(u)}{u^2}$$

non varia, se non fra limiti assai ristretti.

In tal caso giova dare all'equazione la forma

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{u^3\cos.^3\theta}=\frac{f(u)}{u^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos.^3\theta}\ ,$$

e porre

$$y=\left(\frac{1}{u\cos.\theta}\right)^2,\qquad x=2\int\frac{d\theta}{\cos.^3\theta}\ ;$$

con che l'equazione diventa

$$dy = -\frac{f(u)}{u^2} dx \ .$$

Il valore di u non si può esprimere esplicitamente per via di x e y: ma ciò non monta, perchè si hanno tavole dell' integrale

$$x = 2\int \frac{d\theta}{\cos.^3\theta} = \frac{\sin.\ \theta}{\cos.^2\theta} + l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) ,$$

coll'aiuto delle quali si possono sempre trovare i valori di x e di y, dati θ e u, e reciprocamente.

Sieno x_0, y_0 i valori iniziali di x e y, corrispondenti a $\theta = \theta_0$, $u = u_0$. Se x diventa $x_0 + \Delta x$, si ha

$$\Delta y_0 = -\frac{f(u_0)}{u_0^2} \Delta x \ ,$$

e quindi

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 - \frac{f(u_0)}{u_0^2} \Delta x \ .$$

Ponendo invece di y il suo valore in u e θ, si trova

$$\left(\frac{1}{u_1 \cos.\ \theta_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{u_0 \cos.\ \theta_0}\right)^2 - \frac{f(u_0)}{u_0^2} \Delta x \ ,$$

donde

$$u_1^2 = \frac{\dfrac{\cos.^2\theta_0}{\cos.^2\theta_1} u_0^2}{1 - f(u_0)\cos.^2\theta_0 . \Delta x} \ .$$

Similmente si trova

$$u_2^2 = \frac{\dfrac{\cos.^2\theta_1}{\cos.^2\theta_2} u_1^2}{1 - f(u_1)\cos.^2\theta_1 . \Delta x} \ ,$$

e va dicendo.

In tal modo si possono calcolare i valori successivi di u_1, u_2, u_3, ... E poichè

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos.^3\theta} = x_2 - x_1 = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos.^3\theta} = \text{ecc.} \ ,$$

se prendesi Δx costante, la tavola dell' integrale farà conoscere i valori successivi θ_1, θ_2, θ_3, ...

L'errore commesso nel calcolo dell'ultimo valore

$$y_n = \left(\frac{1}{u_n \cos. \theta_n}\right)^2$$

di y, è minore di

$$\left(\frac{B + AC}{2}\right)\left[\frac{(1 + C\delta)^n - 1}{C}\right]\delta ,$$

essendo

$$\delta = \Delta x ,$$

e A, B, C tre numeri eguali ai maggiori valori numerici, che ricevono le funzioni

$$F = \frac{f(u)}{u^2} ,$$

$$\frac{dF}{dx} = \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \text{sin. } \theta \cos.^2 \theta ,$$

$$\frac{dF}{dy} = \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \cdot \frac{du}{dy} = -\frac{1}{2} u^3 \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \cos.^2 \theta ,$$

mentre vi si fa variare θ fra i limiti θ_0, θ_n, e u fra i limiti u_0, u_n.

In vece di far variare x in progressione aritmetica, cioè di prendere Δx costante, potrebbesi prendere $\Delta \theta$ costante, ed allora Δx sarebbe variabile.

Ottenuti i valori successivi di u, corrispondenti a quelli di θ, si possono quindi avere i valori successivi dell'arco, delle coordinate della curva e del tempo, mediante le equazioni

$$\Delta s = -\frac{u^2}{g} \cdot \frac{\Delta \theta}{\cos. \theta} ,$$

$$\Delta x = -\frac{u^2}{g} \Delta \theta ,$$

$$\Delta y = -\frac{u^2}{g} \text{tang. } \theta . \Delta \theta ,$$

$$\Delta t = -\frac{u}{g} \cdot \frac{\Delta \theta}{\cos. \theta} .$$

l'artendo dall'angolo di proiezione ϑ_0, ed effettuando il calcolo fino a $\vartheta = 0$, si potrà formare una tavola divisa in sei colonne, in cui la prima comprenda le inclinazioni successive della curva ne' suoi diversi punti; la seconda, le velocità in questi punti; la terza, gli archi compresi fra due inclinazioni consecutive; la quarta e la quinta, le proiezioni di questi archi sugli assi delle x e delle y; in fine, la sesta, i Δt: sommando i Δx e i Δy, si avrà l'ampiezza e l'altezza del ramo ascendente; sommando i Δt, si avrà la durata della salita. Facendo di poi ϑ negativo, si potrà protrarre il calcolo fin dove si vuole: aggiungendo i Δy, sin tanto che la loro somma sia eguale all'altezza del tiro, quindi i Δx, si avrà l'ampiezza del ramo discendente. La seconda colonna darà la velocità al punto di caduta; e la prima l'angolo di caduta. Il tempo totale del tragitto sarà dato dalla somma dei Δt, dall'angolo di proiezione, fino all'angolo di caduta.

Sarebbe facilissimo l'aver riguardo allo scemar della densità dell'aria, a mano a mano che il proietto s'innalza; e' basterebbe a ciò, far variare la densità, che entrar dee nella funzione $f(u)$, nel passare da un elemento all'altro della traiettoria. Avrebbesi la densità relativa ad ogni elemento, introducendo il valor trovato di y, nella formola, che esprime la diminuzione della densità alle differenti altezze.

In questo modo si potranno determinare tutte le circostanze del moto di un proietto in un mezzo, di cui si conosce la resistenza in funzione della velocità, sia questa funzione definita *analiticamente* od *empiricamente*. La sola difficoltà da superare sarebbe la lunghezza dei calcoli da effettuare; ma, pei proietti in uso nell'artiglieria, che sono cacciati con velocità e con angoli di proiezione, compresi fra limiti assai ristretti, si potrebbero ridurre i casi da calcolare ad un piccolo numero, e ridurre ad un certo numero di tavole, calcolate una volta per sempre, la soluzione di qualunque problema sul tiro.

La costruzione di simili tavole non costerebbe certo maggior fatica, di quella che hanno richiesto le tavole calcolate dal Graewenitz [1], dal

---

[1] Henning Friedrichs Grafen v. Gräwenitz Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln. Rostock 1764. Questa Memoria venne tradotta in francese dal sig. Rieffel sotto il titolo: *Mémoire sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie* (*Paris*, 1845).

Brown [1], dal sig. Otto [2], e da altri, nell' ipotesi di una resistenza proporzionale al quadrato della velocità; perocchè le formole da me suggerite coincidono alla fin fine con quelle, che si adoperano nell' ipotesi ordinaria della resistenza in ragione del quadrato della velocità.

Naturalmente prima d'accingersi a siffatto lavoro, sarebbe mestieri di conoscere perfettamente la funzione $f(u)$.

Per dare un esempio dell'applicazione delle formole esposte, calcolai, in una nota alla fine, un caso particolare, prendendo, per esprimere la resistenza, due termini rispettivamente proporzionali al quadrato ed al cubo della velocità.

Le formole sopra mentovate, se sono convenienti alle grandi velocità de' proietti dell'artiglieria, non lo sarebbero più alle piccole velocità inferiori ad $^1/_4$ di metro. Per queste velocità la resistenza è prossimamente proporzionale alla semplice velocità, ed allora giova supporre $\frac{f(u)}{u}$ costante, e dare all'equazione differenziale la forma

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{u^2\cos.^2\theta} = \frac{f(u)}{u}\cdot\frac{d\theta}{\cos.^2\theta} .$$

Chiamando u_0 e u_1 due velocità, fra'l cui intervallo, si possa fare

$$\frac{f(u)}{u} = a$$

costante, si avrà per calcolare l'arco compreso fra di esse, le formole

$$\frac{1}{u_1\cos.\theta_1} = \frac{1}{u_0\cos.\theta_0} + a(\text{tang.}\,\theta_0 - \text{tang.}\,\theta_1) ,$$

$$agx = u_0\cos.\theta_0 - \frac{u_0\cos.\theta_0}{1 + a u_0\cos.\theta_0(\text{tang.}\,\theta_0 - \text{tang.}\,\theta_1)} ,$$

$$y = x\left(\text{tang.}\,\theta_0 + \frac{1}{a u_0\cos.\theta_0}\right) + \frac{1}{a^2 g} l\left(1 - \frac{agx}{u_0\cos.\theta_0}\right) ,$$

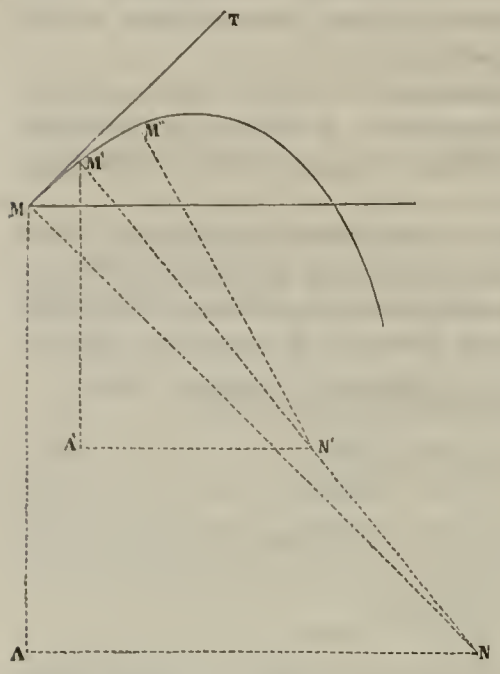
$$agt = l\left\{1 + a u_0\cos.\theta_0(\text{tang}\,\theta_0 - \text{tang.}\,\theta_1)\right\} .$$

---

[1] Hugh Brown. *The true principles of Gunnery investigated and explained.* London. 1777.

[2] Otto. Tafeln für den Bombenwurf. Berlin, 1842.

22. La serie de' valori consecutivi della velocità, corrispondente alla serie de' valori consecutivi dell' inclinazione della curva, può servire a descrivere graficamente la traiettoria. Perciò si opererà nel modo seguente:



Sia M il punto di partenza del proietto, MT la sua direzione iniziale. Sulla verticale MA, tirata pel punto M, si porti da M in A la lunghezza $2h_0$ $\left(h \text{ è l'altezza dovuta alla velocità } u, \text{ onde che } h=\frac{u^2}{2g}\right)$: al punto A si conduca un'orizzontale sino al suo incontro colla normale MN; sarà

$$MN=\frac{2h_0}{\cos.\theta_0}\ .$$

Ora l'espressione del raggio del circolo osculatore è (N.° 2., equaz. [7])

$$\rho=\frac{2h}{\cos.\theta}\ ,$$

dunque MN è uguale a questo raggio. E però, se dal centro N si descrive, col raggio NM, un arco di circolo MM' eguale a $MN(\theta_1-\theta_0)$, si avrà un elemento della traiettoria.

Si ripetano al punto M' le stesse operazioni fatte al punto M, e si troverà un secondo elemento $M'M''$ della curva. E così, di mano in mano, si verrà a descrivere la curva per via di tanti archetti di cerchio. [1]

23. Se nell'equazione

$$d(u\cos.\theta)=uf(u).d\theta\ ,$$

---

[1] Una costruzione della traiettoria de' proietti per mezzo de' circoli osculatori, simile a questa, è accennata dal PONCELET nella *Mécanique industrielle. Bruxelles*, 1839.

da cui dipende la soluzione del problema balistico, si potesse sostituire alla funzione $f(u)$ quest'altra funzione

$$\frac{f(\alpha u \cos.\theta)}{\alpha \cos.\theta},$$

essendo α una costante da determinarsi convenientemente, le variabili sarebbero immediatamente separabili. Ora, se l'angolo θ, in tutta l'estensione della curva, che si considera, varia fra limiti assai ristretti, si può fare detta sostituzione, senza grave errore, purchè si dia ad α un valor tale, che il prodotto $\alpha \cos.\theta$, si scosti il meno possibile dall'unità, per tutti i valori, che riceve fra $\theta = \theta_0$ e θ.

Operando questa sostituzione, si ottiene l'equazione

$$d(u\cos.\theta) = u\frac{f(\alpha u\cos.\theta)}{\alpha\cos.\theta}d\theta,$$

la quale si trasforma, ponendo $\alpha u\cos.\theta = v$, in

$$\frac{\alpha dv}{vf(v)} = \frac{d\theta}{\cos.^2\theta},$$

ove le variabili sono separate: essa fornisce immediatamente

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\theta_0 + \alpha\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{vf(v)},$$

che serve a legar la velocità all'angolo.

Sostituendo nell'equazione

$$g\,dx = -u^2\,d\theta = -(u\cos.\theta)^2\frac{d\theta}{\cos.^2\theta},$$

il valore, testè trovato, di $\frac{d\theta}{\cos.^2\theta}$, si ottiene

$$\alpha g\,x = -\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}.$$

Da quest'equazione si potrà ricavare il valore di v in funzione di x, quando l'integrazione sarà eseguita.

Suppongo tale operazione effettuata, e che si abbia

$$\frac{1}{v^2} = F(x) \ .$$

Per avere l'equazione della traiettoria, si riprenda l'equazione

$$g\,dx = -(u\cos.\theta)^2 \frac{d\theta}{\cos.^2\theta} \ ,$$

donde si ricava

$$\frac{d\theta}{\cos.^2\theta} = -g\frac{dx}{(u\cos.\theta)^2} = -\alpha^2 g\frac{dx}{v^2} = -\alpha^2 g\,F(x)\,dx \ .$$

Integrando, ed osservando, che all'origine $\theta = \theta_0$ e $x = 0$, si ha

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\theta_0 - \alpha^2 g\int_0^x F(x)\,dx \ ;$$

ponendo in luogo di tang. θ il suo valore $\frac{dy}{dx}$, ed integrando in modo che a $x = 0$ risponda $y = 0$, si trova

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_0 - \alpha^2 g\int_0^x dx\int_0^x F(x)\,dx \ .$$

Il tempo si determina, ponendo nell'equazione

$$\alpha g\,dx = -\frac{v\,dv}{f(v)} \ ,$$

in luogo di $\alpha\,dx$ il suo valore $v\,dt$. Onde risulta

$$g\,t = -\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)} \ .$$

Il metodo, che son venuto esponendo per trovare le equazioni del moto, è fondato sulla sostituzione della funzione

$$\frac{f(\alpha u\cos.\theta)}{\alpha\cos.\theta}$$

alla funzione $f(u)$, da cui la resistenza è espressa. Se fosse

$$f(u) = a\,u \ ,$$

vale a dire, se la resistenza fosse proporzionale alla semplice velocità, le equazioni trovate sarebbero esatte; ma in qualunque altra ipotesi di resistenza questo metodo non conduce, se non se a formole approssimate, che il sono tanto più, quanto più ristretti sono i limiti, fra cui varia l'angolo θ.

Il sig. Dimon, trattando del moto de' proietti in un mezzo, che resiste in ragione della seconda e della terza potenza della velocità, giunge, per una via diversa, a formole, che si ottengono immediatamente coll'introdurre questa legge di resistenza nelle equazioni sopra dichiarate. Ei vorrebbe estendere al tiro elevato le sue formole, la qual cosa parmi non sia lecita, salvo che si divida la traiettoria in molti archi, e si faccia variare la costante α da un arco all'altro; ciò che equivale a calcolare la curva per punti, ed in questo caso credo preferibile il primo metodo d'approssimazione da me esposto (N.° 21.).

Ed in vero la funzione

$$\frac{\alpha \cos.\theta f(u)}{f(\alpha u \cos.\theta)},$$

che si suppone costante, ed uguale all'unità, fra i limiti dell'integrazione, varia troppo, se l'angolo di proiezione è assai grande.

Il sig. Dimon assume

$$f(u) = \frac{u^2}{2gc}\left(1 + \frac{u}{r}\right);$$

onde la funzione, che si suppone costante, è

$$\frac{1}{\alpha \cos.\theta} \cdot \frac{1 + \frac{u}{r}}{1 + \frac{\alpha u \cos.\theta}{r}}.$$

Se l'angolo di proiezione è uguale a 45°, il solo primo fattore varia nella proporzione di $\sqrt{2}$ a 1, ossia come 1,4 a 1 circa, passando dall'origine al vertice; e varia ancora di più dal vertice al punto di caduta.

Si ottiene maggiore approssimazione, adoprando il primo metodo da me dichiarato (N.° 21.), quand'anche si calcoli tutta la traiettoria in una volta; il che equivale a supporre la resistenza proporzionale al solo quadrato della velocità. In fatti, la quantità $\frac{f(u)}{u^2}$ diventa, nell'ipotesi

di resistenza adottata dal sig. Didion,

$$\frac{1}{2gc}\left(1+\frac{u}{r}\right);$$

ove $r=833^m$ per le bombe: se la velocità iniziale $u_0=150^m$ (una delle maggiori velocità, che si dia in pratica alle bombe), questa funzione non varia in tutta l'estensione della traiettoria, se non se fra i limiti 1, 1 e 1.

Resta a determinare il valore della costante α. Essa deve avere un valor tale, che il prodotto $\alpha\cos.\theta$ si scosti quanto meno si possa dall'unità per tutti i valori, che riceve fra $\theta=\theta_0$ e θ. Quindi è che α dee avere un valor medio fra quelli, che acquista $\frac{1}{\cos.\theta}$ fra gli stessi limiti.

Quando l'angolo di proiezione è piccolo, e questo è il solo caso, in cui si possa calcolare, con una certa approssimazione, tutta la traiettoria con un solo valore di α, allora θ è sempre piccolo in tutta l'estensione della curva situata sopra l'asse delle x, e quindi $\frac{1}{\cos.\theta}$ si scosta poco dall'unità. In questo caso è più semplice di prendere $\alpha=1$.

Quando, per essere l'angolo di proiezione un po' più grande, si vuole calcolar la curva in diverse parti, si può prendere, per ciascun arco, α uguale alla media delle secanti degli angoli formati dalle tangenti estreme.

Il sig. Didion fa

$$\alpha=\frac{\xi(\theta_0)-\xi(\theta)}{\text{tang.}\,\theta_0-\text{tang.}\,\theta},$$

ove

$$\xi(\theta)=\int\frac{d\theta}{\cos.^3\theta}.$$ (1)

---

(1) Si può far vedere facilmente, che il valore di α così determinato, è medio fra i diversi valori, che riceve $\frac{1}{\cos.\theta}$ fra i limiti $\theta=\theta_0$ e θ. Ia fatti si sa, che la frazione

$$\frac{a+a'+a''+\text{ecc.}}{b+b'+b''+\text{ecc.}}$$

è media fra le seguenti

24. Parecchi autori tentarono di esprimere le quantità, necessarie per la cognizione del moto de' proietti, per mezzo di serie procedenti secondo le potenze o dell'ascissa, o del tempo, o di un'altra variabile. Ma le serie, che conseguirono non sono convergenti in generale, e non diventano tali, se non se fra certi limiti; ciò che le rende di poca utilità in pratica. Nulla di meno cotal metodo può adoprarsi con bastante successo, quando l'angolo di proiezione è piccolissimo.

Coll'aiuto delle equazioni differenziali date al N.° 2., e delle loro derivate di diverso ordine, non v'ha difficoltà a svolgere, colla formola del Maclaurin, le quantità, che si cercano, in serie ordinate secondo le potenze ascendenti e intere di una variabile qualunque. In quel che segue mi restringerò a trovare le espressioni dell'angolo, dell'ordinata, della velocità e del tempo in funzione dell'ascissa.

Si ha in generale, quando nessuna delle derivate diventa infinita,

$$F(x)=F(0)+F'(0)\frac{x}{1}+F''(0)\frac{x^2}{1.2}+\text{ecc.}$$

Pongasi

$$F(x)=\text{tang. }\theta\ ,$$

si ha, differenziando rispetto ad x,

$$F'(x)=\frac{1}{\cos.^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}\ ;$$

$$\frac{a}{b}\ ,\quad \frac{a'}{b'}\ ,\quad \frac{a''}{b''}\ ,\quad \text{ecc.}$$

Dunque la quantità

$$\frac{\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos.^3\theta}}{\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos.^2\theta}}=\frac{\xi(\theta_0)-\xi(\theta)}{\text{tang.}\theta_0-\text{tang.}\theta}$$

è media fra i diversi valori, che

$$\frac{\frac{1}{\cos.^3\theta}}{\frac{1}{\cos.^2\theta}}=\frac{1}{\cos.\theta}$$

acquista fra i limiti θ_0 e θ.

e sostituendo, in luogo di $\frac{d\theta}{dx}$, il suo valore ricavato dall'equazione [4], N.° 2.,

$$F'(x)=-\frac{g}{(u\cos.\theta)^2}.$$

Differenziando una seconda volta, si ottiene

$$F''(x)=\frac{2g}{(u\cos.\theta)^3}\cdot\frac{d(u\cos.\theta)}{dx}.$$

Ora, si ha (eq.^{e} [9], N.° 2.),

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{d\theta}=uf(u);$$

donde, moltiplicando pel valore di $\frac{d\theta}{dx}$,

$$\frac{d(u\cos.\theta)}{dx}=-\frac{gf(u)}{u}.$$

Dunque sostituendo

$$F''(x)=-\frac{2g^2}{(u\cos.\theta)^3}\cdot\frac{f(u)}{u}.$$

Differenziando ancora, si trova

$$F'''(x)=\frac{6g^2}{(u\cos.\theta)^4}\cdot\frac{f(u)}{u}\cdot\frac{d(u\cos.\theta)}{dx}-\frac{2g^2}{(u\cos.\theta)^3}\left[\frac{f(u)}{u}\right]'\cdot\frac{du}{dx},$$

che si riduce a

$$F'''(x)=-\frac{6g^3}{(u\cos.\theta)^4}\left[\frac{f(u)}{u}\right]^2+\frac{2g^3\sin.\theta}{(u\cos.\theta)^4}\left[\frac{f(u)}{u}\right]'+\frac{2g^3}{(u\cos.\theta)^4}f(u)\left[\frac{f(u)}{u}\right]',$$

ove si osservi, che

$$\frac{du}{dx}=-\frac{g\sin.\theta}{u\cos.\theta}-\frac{gf(u)}{u\cos.\theta}.$$

Operando così di seguito, si potranno ottenere le derivate quarta, quinta, ecc.

Posto $x=0$, e notato con u_0 e θ_0 la velocità e l'angolo all'origine, si ottiene

$$F(o) = \text{tang.}\,\theta_o\,,$$

$$F'(o) = -\frac{g}{(u_o \cos.\theta_o)^2}\,,$$

$$F''(o) = -\frac{2g^2}{(u_o \cos.\theta_o)^3}\cdot\frac{f(u_o)}{u_o}\,,$$

$$F'''(o) = -\frac{6g^3}{(u_o \cos.\theta_o)^4}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]^2 + \frac{2g^3 \sin.\theta_o}{(u_o \cos.\theta_o)^4}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]' + \frac{2g^3 f(u_o)}{(u_o \cos.\theta_o)^4}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]',$$

ecc. ecc. ,

e quindi

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\theta_o - g\frac{x}{(u_o \cos.\theta_o)^2} - g^2\frac{f(u_o)}{u_o}\cdot\frac{x^2}{(u_o \cos.\theta_o)^3}$$
$$-g^3\left\{\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]'\left(f(u_o) + \sin.\theta_o\right)\right\}\frac{x^3}{(u_o \cos.\theta_o)^4} + \text{ecc.}$$

Sostituendo in luogo di tang. θ il suo valore $\frac{dy}{dx}$, ed integrando in modo, che a $x = o$ risponda $y = o$, viene

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_o - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{u_o \cos.\theta_o}\right)^2 - \frac{g^2}{3}\cdot\frac{f(u_o)}{u_o}\left(\frac{x}{u_o \cos.\theta_o}\right)^3$$
$$-\frac{g^3}{4}\left\{\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]'\left(f(u_o) + \sin.\theta_o\right)\right\}\left(\frac{x}{u_o \cos.\theta_o}\right)^4 + \text{ecc.}$$

In modo non dissimile si ottengono, per determinare la velocità ed il tempo, le due serie

$$u \cos.\theta = u_o \cos.\theta_o - g\frac{f(u_o)}{u_o}x$$
$$+\frac{g^2}{2}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]'\left(f(u_o) + \sin.\theta_o\right)\frac{x^2}{u_o \cos.\theta_o} + \text{ecc.}\,,$$

$$t = \frac{x}{u_o \cos.\theta_o} + \frac{g}{2}\cdot\frac{f(u_o)}{u_o}\left(\frac{x}{u_o \cos.\theta_o}\right)^2$$
$$+\frac{g^2}{3}\left\{\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{f(u_o)}{u_o}\right]'\left(f(u_o) + \sin.\theta_o\right)\right\}\left(\frac{x}{u_o \cos.\theta_o}\right)^3 + \text{ecc.}$$

Queste serie non sono convergenti, che per valori di x assai piccoli. Esse possono servire, nel tiro a grandi angoli di proiezione, a calcolare la traiettoria per punti. Perciò si prenderà un'ascissa x abbastanza piccola, perchè non si abbia bisogno, se non de' primi termini delle serie; ed essendo dati u_0 e θ_0, si calcoleranno l'angolo θ, l'ordinata y, la velocità u, e il tempo t, che rispondono all'estremità di x. Quindi si prenderà una seconda ascissa, e si calcoleranno le stesse quantità, adoprando l'angolo e la velocità trovati dianzi. Verrà così determinato un secondo punto della traiettoria. Proseguendo nello stesso modo, si troverà un terzo punto, un quarto, ecc.

Quando l'angolo di proiezione è picciolissimo, le serie indicate potranno servire a calcolare la traiettoria tutta in un tratto. In questo caso si potrà avere la gittata mediante la serie seguente, che si ottiene, uguagliando a zero il valore di y, e ricavando il valore di x per mezzo del *ritorno delle serie:*

$$x = \frac{u_0^2}{g} \sin. 2\theta_0 \left\{ 1 - \frac{4}{3} f(u_0) \sin. \theta_0 + \frac{8}{9} f(u_0) \left[f(u_0) + \frac{3}{4} u_0 f'(u_0) \right] \sin.^2 \theta_0 + \text{ecc.} \right\}.$$

Notisi, che

$$\frac{u_0^2}{g} \sin. 2\theta_0$$

esprime la gittata nel vuoto.

CAP. VI.

Applicazioni al tiro de' proietti dell'artiglieria.

25. Le formole esposte ne' capitoli precedenti possono ricevere un'applicazione nel tiro de' proietti dell'artiglieria.

Anzi tutto, per poter tradurre le formole in numeri, è mestieri di conoscere la funzione, che esprime la resistenza.

Non ostante i numerosi lavori e sperimenti eseguiti per determinare le leggi della resistenza ne' mezzi, le cognizioni, che abbiamo su questa materia, lasciano molto da desiderare.

Generalmente si ammette, che un proietto, il quale si muove in un mezzo, prova due sorte di resistenze.

La prima consiste nello sforzo necessario per separare le diverse parti del mezzo, per aprirsi un varco in esso, e per vincere lo sfregamento. Questa resistenza dipende dalla coesione del mezzo, e si risguarda comunemente, come indipendente dalla velocità.

La seconda proviene dal moto impresso alle molecole del mezzo, vale a dire dall' inerzia. Questa seconda resistenza è proporzionale al quadrato della velocità.

Secondo la natura de' mezzi or l'una, or l'altra di queste due resistenze ha maggiore influenza. Ne' mezzi molto consistenti la resistenza totale dipende essenzialmente dalle forze di coesione; dove che ne' fluidi aeriformi la resistenza, dovuta a tali forze, è quasi insensibile, almeno per le velocità, che non sieno picciolissime.

Quando si tratta de' mezzi gasosi, come l'aria atmosferica, i quali sono molto compressibili, la densità diventa maggiore dinanzi al proietto in moto, e minore dietro al medesimo, di quella che corrisponde allo stato d'equilibrio del fluido. Per tener conto di questo fenomeno introducesi nell'espressione della resistenza un termine, che sarebbe, secondo l' Eulero [1], proporzionale alla quarta potenza della velocità, e secondo i signori Piobert e Duchemin [2], proporzionale al cubo della velocità.

L' Eulero oppone all' introduzione delle potenze impari della velocità nell'espressione della resistenza, l' inconveniente, che hanno esse di far cambiar valore alla resistenza, cambiando segno alla velocità.

Esaminando i tre risultati d'esperienza, riferiti dal sig. Didion nel suo *Traité de balistique* a pag. 45, di cui si serve per determinare i coefficienti dell'espressione della resistenza, trovo, che essi sono meglio rappresentati da una funzione, la quale contenga le due potenze pari, seconda e quarta, che da una, la quale contenga il quadrato ed il cubo.

Per le piccole velocità, come sarebbero quelle del pendolo, è necessario introdurre inoltre nell'espressione della resistenza dell'aria un termine proporzionale alla velocità. Ed in tal caso conviene esprimere la

---

[1] *Nouveaux principes d'artillerie de Benjamin* Robins, *commentés par Léonard* Euler, *traduits de l'allemand par* Lombard (1783), *pag.* 365 *et suiv.*

[2] Poncelet. *Introduction à la mécanique industrielle* (1839), *pag.* 619 *et suiv.*

resistenza con due termini, l'uno proporzionale alla velocità, e l'altro al quadrato della velocità, come lo dimostrano le recenti sperienze del sig. Comm. C. I. Giulio [1]. Ma pei proietti dell'artiglieria animati da grandi velocità, il termine proporzionale alla semplice velocità è del tutto trascurabile.

Egli è poi naturale, e l'esperienza lo ha confermato fra certi limiti, che la resistenza sia in ragione dell'area della proiezione del mobile sopra un piano perpendicolare alla direzione del moto.

Da tutto ciò risulta, che, entro i limiti delle velocità in uso nell'artiglieria, la resistenza de' mezzi può venire rappresentata dalla formola

$$R = A(\alpha + \beta u^2 + \gamma u^4),$$

ove

R, è la resistenza in chilogrammi;

A, l'area in metri quadrati della proiezione del proietto sopra un piano perpendicolare alla direzione del moto;

u, la velocità in metri;

α, β, γ, tre coefficienti dipendenti dalla natura del mezzo, e dalla forma del proietto.

Havvi una grande incertezza sul valore da attribuire a questi coefficienti, secondo i diversi mezzi, e secondo la forma del proietto. Giusta le più recenti sperienze fatte in Francia, si avrebbero i seguenti valori per una sfera mossa in diversi mezzi:

---

[1] *Ch. Ign* Giulio. *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air au mouvement des pendules. Turin*, 1852.

Valori de' coefficienti della resistenza in diversi mezzi.

$$R = A(\alpha + \beta u^2 + \gamma u^4) .$$

Nome de' mezzi	α	β	γ	Donde tratti
Rocce di calcare oolitico	12 000 000	180	0	
Muri	5 520 000	82,8	0	
Legno di quercia	2 085 000	41,7	0	Didion. *Traité de balistique. (Paris, 1848), pag. 240 et suiv.*
Legno di abete	1 160 000	23,2	0	
Sabbia mista di ghiaia	435 000	87	0	
Terra argillosa	345 000	27,6	0	
Acqua	0	23,06	0	Poncelet. *Introd. a la méc. ind. (Metz, 1839), p. 616.*
Aria	0	0,038 74	0,000 000 08	Valori desunti dai tre risultati d'esperienza consegnati a pagina 45 del trattato del sig. Didion.

Ne' mezzi solidi il termine indipendente dalla velocità primeggia sugli altri; e quando le velocità sono deboli, in comparazion di esso, si può aver per nullo il termine proporzionale al quadrato della velocità.

Ne' mezzi liquidi, al contrario, il secondo termine è quello, che ha maggior influenza, e gli altri si trascurano per rispetto ad esso. Ben inteso sempre quando non si tratti di velocità piccolissime, perchè allora sarebbe d'uopo d'introdurre un termine costante.

Ne' mezzi aeriformi, quando le velocità sono deboli, si può trascurare il termine proporzionale alla quarta potenza; ma per le velocità un po' forti convien tenerne conto. Per una velocità di 696^m i due termini sono eguali; ed il secondo diventa rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ del primo per le velocità di 492^m, 220^m, 69^m, 22^m.

Le velocità delle bombe nel tiro ordinario de' mortai superano raramente i 100^m, lo stesso dicasi delle velocità delle palle e delle granate nel tiro in arcata de' cannoni ed obici; sicchè in questi tiri, se non si

ha bisogno di una grande esattezza, si può fare la resistenza dell'aria proporzionale al quadrato della velocità.

Se si trattasse di piccole velocità nell'aria, sarebbe mestieri di aggiugnere un termine proporzionale alla semplice velocità: e per le velocità picciolissime sarebbe pur d'uopo d'introdurre un termine costante. Ma per le velocità in uso nell'artiglieria non è necessario di tener conto di questi due termini.

I coefficienti sopra notati per l'aria, sono relativi ad una densità di questo fluido tale, che un metro cubo di esso pesi $1^{ch.},2083$; la quale corrisponde ad una temperatura di 15° c., ad una pressione barometrica di $0^{m},75$, e ad uno stato igrometrico di $\frac{1}{2}$, che risponde a 72° dell'igrometro di Saussure. Nel caso di una densità diversa, ed in cui il peso di un metro cubo d'aria sia δ, si avrà, atteso che la resistenza dell'aria è proporzionale alla sua densità,

$$R=\frac{\delta}{1,2083}Au^2(0,03874+0,000\,000\,08u^2)\ .$$

Se si rappresenta con h l'altezza dovuta alla velocità u, si può scrivere

$$R=A\delta(0,62874\,h+0,000\,025\,46h^2)\ ,$$

(essendo $g=9^{m},805\,17$).

Laonde la resistenza, che prova una palla sferica nell'aria, è uguale al peso di un cilindro d'aria del medesimo diametro, e di un'altezza eguale a

$$0,62874\,h+0,000\,025\,46h^2\ .$$

Il sig. Comm. Giulio trovò, per mezzo de' decrementi delle oscillazioni del pendolo, che la resistenza provata dalla palla del medesimo equivale al peso di un cilindro d'aria, che ha per base il gran circolo di questa palla, e per altezza la 112^{ma} parte della sua velocità, più i due terzi dell'altezza dovuta a questa stessa velocità.

Il coefficiente $\frac{2}{3}$ della prima potenza dell'altezza, da lui trovato, differisce solo di $\frac{1}{17}$ circa da quello sopra mentovato [1].

---

[1] Ecco le altezze della colonna d'aria, il cui peso è uguale alla resistenza,

Per passare dal valor della resistenza in chilogrammi al valor dell'accelerazione in metri, devesi dividere R per la massa del proietto. Quando il proietto è sferico, se si nota con A l'area del suo gran circolo, e con D il suo diametro, il suo volume è $\frac{2}{3}AD$, e la sua massa $\frac{2}{3}\cdot\frac{AD\Delta}{g}$; essendo Δ il peso di un metro cubo della materia, onde è formato, e g la gravità. Trascuro il peso dell'aria spostata dal proietto, ed il peso dell'aria, che lo accompagna (N.° 2.), per la ragione che ciascuno di questi due pesi non è che una piccolissima frazione del peso del proietto.

Si ha adunque

$$r=\frac{3}{2}\cdot\frac{gR}{AD\Delta}=\frac{3}{2}\cdot\frac{g\delta}{D\Delta}\cdot\frac{0,03874}{1,2083}u^2\left(1+\frac{0,000\,000\,08}{0,038\,74}u^2\right).$$

Ponendo

$$k=\frac{1}{3}D\frac{\Delta}{\delta}\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{1,2083}{0,038\,74}=1,06\,D\frac{\Delta}{\delta},$$

$$c=\sqrt{\frac{0,038\,74}{0,000\,000\,08}}=696,$$

si ottiene

$$r=\frac{u^2}{2k}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Laonde si ha per la funzione, che esprime la resistenza dell'aria ad un proietto sferico,

$$f(u)=\frac{u^2}{2gk}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)\left\{\begin{array}{l}k=1,06\,D\frac{\Delta}{\delta},\\ c=696^{m}.\end{array}\right.$$

Non si hanno finora sperienze precise sulla resistenza, che incontrano

---

secondo gli Autori seguenti:

NEWTON. TEMPELHOFF ..... $0,5\,h$;

BORDA. LOMBARD ..... $0,6\,h$;

EULERO ..... $0,5\,h\,(1+0,00011\,h)$;

DUCHEMIN ..... $0,512\,h\,(1+0,0024\,u)$:

DIDION. Per le palle ..... $0,438\,h\,(1+0,0023\,u)$,

» Per le bombe..... $0,529\,h\,(1+0,0012\,u)$.

i proietti oblunghi, introdotti in questi ultimi tempi, e il cui uso si va ogni dì più estendendo. La resistenza sofferta da simili proietti è senza dubbio minore di quella de' proietti sferici, e tanto più piccola, quanto più grande è l'acutità della loro parte anteriore. Volendo far concordare le sperienze, che si conoscono sul tiro di questi proietti, colle formole balistiche, convien ridurre di molto i valori soprannotati de' coefficienti β e γ.

26. Dopo aver fissato l'espressione della resistenza de' mezzi ai proietti dell'artiglieria, veniamo all'applicazione delle formole fin qui dichiarate.

I principali problemi di balistica, che occorrono nella pratica dell'artiglieria, sono i seguenti:

1.° Determinare la passata de' proietti ne' mezzi resistenti, di cui si compongono le diverse specie di ripari militari, come terre, muri, legnami, ecc.

2.° Determinare il moto de' proietti, cacciati nell'aria con grandi velocità, e con piccoli angoli di proiezione. Questo è il problema del *tiro teso* [1].

3.° Determinare il moto de' proietti, lanciati nell'aria con deboli velocità, e con grandi angoli di elevazione. Questo problema si riferisce al *tiro in arcata*, ed al *tiro di rimbalzo*.

---

[1] Chiamo *tiro teso* quel tiro, in cui il proietto, nel suo tragitto fra la bocca da fuoco ed il segno, scorre per una linea pochissimo diversa dalla retta. I Francesi lo chiamano *tir de plein-fouet*. I Dizionarii militari italiani non hanno nome per questa specie di tiro. Il *tiro di ficco*, a cui il Grassi, nel suo Dizionario militare, vorrebbe dare questa significazione, non mi pare acconcio, però che risponda al *tir fichant* de' Francesi anzi che al *tir de plein-fouet*, come risulta d'altra parte dalla definizione, che si legge nello stesso Dizionario, del *tiro ficcante*. Il D'Antoni lo chiamò *tiro rettilineo*, la qual locuzione, parmi, debbasi sfuggire, perchè fondata sopra un' idea falsa. In Piemonte chiamasi da taluno *tiro di lanciо;* ma questa denominazione non ha in favor suo l'autorità di alcuno scrittore di buona lingua, e parmi molto impropria.

1.° PROBLEMA.

Passata de' proietti ne' mezzi solidi.

27. Secondo ciò che precede, la resistenza, che un proietto prova nel muoversi in un mezzo solido, è rappresentata da

$$R = A(\alpha + \beta u^2) \ ;$$

ove A è l'area del suo circolo massimo; α e β, due coefficienti dipendenti dalla natura del mezzo, e da determinarsi per via dell'esperienza; u, la velocità variabile durante la penetrazione.

Sia D il diametro del proietto, Δ la sua densità, si avrà per l'accelerazione dovuta alla forza R,

$$r = \frac{3g}{2D\Delta}(\alpha + \beta u^2) \ .$$

Ciò posto, le formole del N.° 16., che per $n = 2$, si riducono a

$$2gbs = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)^2 z^{2\alpha-3}\,dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2 z^{2\alpha-3}\,dz} \ ,$$

$$gbx = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2) z^{2\alpha-3}\,dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2 z^{2\alpha-3}\,dz} \ ,$$

$$2gby = \int_{z_0}^{z} \frac{(1-z^4) z^{2\alpha-3}\,dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2 z^{2\alpha-3}\,dz} \ ,$$

$$g t . \sqrt{2b} = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2) z^{a-2} dz}{z \sqrt{\int_z (1+z^2)^2 z^{2a-3} dz}} ,$$

$$4 g b \rho = \frac{(1+z^2)^3 z^{2a-3}}{z \int_z (1+z^2)^2 z^{2a-3} dz} ,$$

rinchiudono la soluzione di tutti i problemi relativi alla passata de' proietti, qualora facciasi

$$a = \frac{3\alpha}{2D\Delta} , \qquad b = \frac{3\beta}{2D\Delta} .$$

Ma la cosa, di cui si ha principal bisogno in pratica, si è la passata totale del proietto. Si trovò addietro (N.° 19.)

$$e^{2gbs} = 1 + \frac{b}{2} \left(\frac{u_0 \cos. \theta_0}{z_0^a} \right)^2 \int_z^{z_0} (1+z^2)^2 z^{2a-3} dz ,$$

per la lunghezza dell'arco compreso fra le due inclinazioni z, z_0. Supponendo il proietto lanciato orizzontalmente, si ha $\theta_0 = 0$, e quindi $z_0 = 1$. Per avere la passata totale, misurata sulla curva, è d'uopo estendere l'integrale fino a $\theta = -\frac{\pi}{2}$, ossia fino a $z = 0$. Si ha dunque, chiamando S la passata totale, se $a > 1$,

$$e^{2gbS} = 1 + \left(\frac{2a^2 - 1}{2a^2 - 2} \right) \frac{b}{a} u_0^2 ,$$

donde

$$S = \frac{1}{2gb} l \left\{ 1 + \left(\frac{2a^2 - 1}{2a^2 - 2} \right) \frac{b}{a} u_0^2 \right\} .$$

Allorchè a è molto grande, come avviene pei materiali ordinarii, si ha sensibilmente

$$S = \frac{1}{2gb} l \left(1 + \frac{b}{a} u_0^2 \right) .$$

Ponendo in luogo di a e b i loro valori, si trova

$$S=\frac{D\Delta}{3g\beta}\,l\left(1+\frac{\beta}{\alpha}u_0^2\right).$$

Si conseguirebbe lo stesso risultato, trascurando la forza di gravità in comparazione della forza di resistenza del mezzo.

Dall' ispezione della formola sopra indicata, si deduce, che se, contro lo stesso ostacolo, si sparano diverse palle colla stessa velocità, le passate sono proporzionali al prodotto del calibro per la densità del proietto.

Quando $\frac{\alpha}{\beta}>u_0^2$, si può svolgere il logaritmo in serie, e si ottiene

$$S=\frac{D\Delta}{3g\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}u_0^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}u_0^4+\text{ecc.}\right).$$

Pei valori di u_0 piccoli in confronto di $\frac{\alpha}{\beta}$, questa serie è molto convergente; ed allora si ha con sufficente esattezza, limitandosi al primo termine,

$$S=\frac{D\Delta}{3g\alpha}u_0^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{D\Delta}{\alpha}h_0.$$

La qual cosa equivale a supporre la resistenza del mezzo indipendente dalla velocità.

2.° PROBLEMA.

Tiro teso.

28. Eseguendosi sempre il tiro teso con piccoli angoli di proiezione, vi si può applicare il secondo metodo d'approssimazione, dichiarato al N.° 23., secondo il quale si sostituisce alla traiettoria reale la curva descritta in un mezzo, la cui resistenza è espressa da

$$\frac{f(\alpha u\cos.\theta)}{\alpha\cos.\theta}.$$

Assumendo

$$f(u)=au^2+bu^4,$$

l'ipotesi, che si fa, equivale a supporre, che i coefficienti a e b, invece

di essere costanti, sieno il primo proporzionale a $\cos.\theta$, il secondo a $\cos.^3\theta$. Quando l'angolo θ varia fra i limiti, che comporta il tiro teso, a e b variano assai poco. Per cagion d'esempio, facendo variare θ da $+5^\circ$ a -5°, il coefficiente a varia fra 1 e 0,996, e il coefficiente b fra 1 e 0,989.

Al vertice, ove $\theta = 0$, i valori de' coefficienti variabili coincidono coi loro veri valori, se prendesi $\alpha = 1$: ed in tutti gli altri punti sono minori di essi. Questa ipotesi dà adunque una resistenza un po' troppo debole; e quindi essa deve aumentare tutte le ordinate, e dare una curva situata tutta al di sopra della traiettoria reale.

Si può facilmente ottenere una curva inferiore alla traiettoria reale, ponendo

$$\alpha = \frac{1}{\cos.\theta_0} .$$

Allora i coefficienti variabili

$$a\frac{\cos.\theta}{\cos.\theta_0} , \qquad b\left(\frac{\cos.\theta}{\cos.\theta_0}\right)^3$$

coincidono coi veri all'origine ed al punto, dove l'inclinazione della curva è uguale a $-\theta_0$; sono maggiori dei veri per tutti i valori di θ compresi fra $+\theta_0$ e $-\theta_0$; raggiungono un valor massimo al vertice; e sono troppo piccoli pei valori di θ minori di $-\theta_0$. In tal caso la curva ottenuta è inferiore alla traiettoria; ma prolungata di là dal punto, dove l'inclinazione è uguale a quella all'origine, deve approssimarsene e finire per tagliarla.

Scegliendo adunque convenientemente il valore della costante α, si può conseguire a piacimento una curva superiore od inferiore alla traiettoria reale.

Se introducesi nelle formole date sopra (N.° **23.**) la legge di resistenza espressa da

$$f(u) = \frac{u^2}{2gk}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right) ,$$

si trova

$$\frac{\alpha x}{2k} = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} ,$$

ed effettuando l'integrazione

$$\frac{\alpha x}{k} = l\frac{v_0^2(v^2+c^2)}{v^2(v_0^2+c^2)},$$

donde si ricava

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{1}{v_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{1}{c^2} = F(x).$$

E quindi

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{v_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{\alpha x}{k} - 1\right) - \frac{\alpha^2 x^2}{2c^2}\right],$$

oppure, avvertendo che $v = \alpha u \cos.\,\theta$,

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{\alpha^2 u_0^2 \cos.^2\theta_0}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{\alpha x}{k} - 1\right) - \frac{\alpha^2 x^2}{2c^2}\right].$$

Ponendo $\alpha = 1$, si ha per l'equazione della traiettoria

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2\cos.^2\theta_0}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{x}{k} - 1\right) - \frac{x^2}{2c^2}\right],$$

e, facendo $\alpha = \frac{1}{\cos.\,\theta_0}$,

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k\cos.\theta_0}} - \frac{x}{k\cos.\theta_0} - 1\right) - \frac{x^2}{2c^2\cos.^2\theta_0}\right].$$

L'ultima equazione fornisce una curva inferiore alla traiettoria reale, e quella che la precede una curva superiore.

Il tempo è dato dall'equazione

$$t = -2k\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

dalla quale si ricava

$$\frac{c}{2k}t = \frac{c}{\alpha u\cos.\theta} - \frac{c}{\alpha u_0\cos.\theta_0} + \text{arc. tang.}\frac{\alpha u\cos.\theta}{c} - \text{arc.tang.}\frac{\alpha u_0\cos.\theta_0}{c}.$$

Quando l'angolo di proiezione è molto piccolo (che è il caso più ordinario nel tiro teso), si pone, per maggior semplicità, $\cos.\,\theta_0 = 1$,

ed allora si hanno, per risolvere tutte le questioni del tiro, le equazioni

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tang.} \theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k}}-\frac{x}{k}-1\right)-\frac{x^2}{2c^2}\right], \\ \frac{1}{u^2}=\left(\frac{1}{u_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)e^{\frac{x}{k}}-\frac{1}{c^2}, \\ \frac{c}{2k}t=\frac{c}{u}-\frac{c}{u_0}+\text{arc. tang.}\frac{u}{c}-\text{arc. tang.}\frac{u_0}{c}. \end{cases}$$

Ponendo $c=\infty$, si cade sulle note equazioni del tiro teso nell'ipotesi ordinaria della resistenza proporzionale al quadrato della velocità:

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tang.} \theta_0 - \frac{g k^2}{u_0^2}\left(e^{\frac{x}{k}}-\frac{x}{k}-1\right), \\ u = u_0 e^{-\frac{x}{2k}}, \\ t = 2k\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}\right)=\frac{2k}{u_0}\left(e^{\frac{x}{2k}}-1\right). \end{cases}$$

Posto $k=\infty$, e il coefficiente della quarta potenza della velocità $\frac{1}{2kc^2}=K$, l'equazione della traiettoria diventa

$$y = x \operatorname{tang.} \theta_0 - g\left(\frac{x^2}{2u_0^2}+\frac{Kx^3}{3}\right).$$

Questa equazione suppone la resistenza dell'aria proporzionale alla quarta potenza della velocità, ed alla terza potenza del coseno dell'angolo formato dalla tangente coll'orizzonte.

L'*Aide-Mémoire d'artillerie navale par* Lafay (*Paris*, 1850) propone, a pag. 531, una formola eguale a questa, e dice che la sua legittimità è provata così dalle sperienze fatte a Gavre durante i 18 ultimi anni, come dalle sperienze di Metz riferite nel Trattato del sig. Didion a pag. 294.

A questo proposito giova avvertire, che conviensi andar molto guardinghi in siffatta maniera di giustificare le formole per mezzo de' risultamenti del tiro. E nel vero posta un'equazione della traiettoria, se,

mediante i risultamenti del tiro, si determinano i parametri, che contiene, e se i valori così trovati si fanno servire a calcolare altri tiri, può accadere, che, mercè un compenso d'errori, la pratica s'accordi colla teoria, senza che l'equazione adottata rappresenti esattamente la traiettoria reale.

Un esempio notevole di questo compenso d'errori l'abbiamo nella teoria parabolica de' proietti nel vuoto, la quale fu per più d'un secolo, dal Galilei al Robins, creduta applicabile al moto de' proietti nell'aria; ed anzi il Blondel e il Belidor tentarono di confutare le obbiezioni fatte contro l'ipotesi del moto parabolico in un mezzo resistente; e il Belidor pretende aver fatto sperienze tali, che distruggono quelle obbiezioni (1). Siffatta illusione proveniva da questo, che, non essendo la velocità iniziale conosciuta, la si deduceva dalla gittata; onde che risultava necessariamente molto minore della velocità reale; ed introdotta nell'equazione della parabola, si conseguiva una curva, che era inviluppata dalla traiettoria reale, dal punto di partenza fino al punto di caduta; ma che non ne differiva notabilmente.

Acciocchè l'accordo delle gittate ottenute in pratica con quelle date dalle formole, sia una prova della giustezza di queste, richiedesi, che la velocità iniziale, e gli altri parametri contenuti nelle formole, sieno determinati in un modo indipendente da esse.

Qualora l'angolo di proiezione sia talmente piccolo da potersi trascurare e il termine in $\text{sin.}^2\theta_0$, ed i seguenti, nella serie concernente l'ampiezza del tiro (N.° 23.), si potrà calcolar questa colla formola semplicissima

$$x = \frac{u_0^2}{g} \text{sin. } 2\,\theta_0 \left\{ 1 - \frac{4}{3} f(u_0) \text{ sin. } \theta_0 \right\} .$$

(1) Questa illusione intorno alla poca influenza della resistenza dell'aria, era così generale sul finir del secolo XVII° e sul principiar dello scorso, che, nella storia dell'Accademia delle Scienze di Francia, leggonsi, dopo la enumerazione de'lavori di diversi matematici sopra la teoria del moto parabolico, le seguenti parole: « Il ne » paraît pas que l'on ait présentement rien à désirer sur la pratique de cet art *(quella* » *di scagliar bombe)*. Peut-être seulement pourroit-on encore perfectionner l'instrument » qui sert à pointer la pièce ou le mortier ..... Mais la géométrie » étant quitte, pour ainsi dire, envers la pratique, est en droit de pousser plus loin » la spéculation, et de donner quelque chose à la simple curiosité, quand l'utilité » est satisfaite. »

Hist. de l'Acad. R. des Sciences. A. 1707. p. 123.

3.° PROBLEMA.

Tiro in arcata.

29. Le formole testè esposte, se possono ancora, ove non si richiegga una grande esattezza, servire a calcolare il tiro di rimbalzo, non sono più applicabili al tiro in arcata; perchè allora l'angolo della tangente varia fra limiti troppo discosti nell'estensione della traiettoria.

Per questa specie di tiro il miglior partito, quello si è di calcolare per punti col primo metodo d'approssimazione (N.° 21.) diverse traiettorie, e formarne tavole simili a quelle, che furono calcolate nell'ipotesi di una resistenza in ragione del quadrato della velocità.

Se non che prima d'intraprendere cotal lavoro, che richiederebbe tempo e fatica, sarebbe mestieri di aver cognizioni men vaghe, e più sicure sulla resistenza dell'aria, e, in difetto di una teoria matematica, che consenta di esprimerla coi segni usati nell'analisi, avere almeno una serie di risultati precisi e sicuri, dai quali si possa dedurre una tavola numerica, od una curva, che faccia conoscere la resistenza corrispondente a ciascuna velocità, e reciprocamente.

E' non v'ha dubbio, che le importanti sperienze instituite a Metz, molto accrebbero le nostre cognizioni su tal soggetto; nulladimeno rimangono ancora molte incertezze da dissipare.

Gli apparecchi elettro-magnetici per misurare le velocità de' proietti, quando sieno condotti alla necessaria perfezione, paionmi convenire più particolarmente a sillatto genere di ricerche. Con questi apparecchi si può misurare la velocità in diversi punti della stessa traiettoria: dove che col pendolo balistico non si può determinare la velocità a diverse distanze, se non se operando su traiettorie diverse. Ora ognun sa, che quantunque si ponga ogni possibile cura per mettersi sempre in circostanze pari, tuttavia le velocità iniziali variano assai da un colpo all'altro: il che tende a diminuire l'esattezza de' risultamenti così ottenuti.

Mediante diversi bersagli reticolati, assai vicini, e coll'aiuto dell'apparecchio del sig. Navez, o di altri dello stesso genere, non sembra difficile determinare la velocità sopra diversi elementi della traiettoria, le cui inclinazioni sieno conosciute; allora per mezzo della formola (N.° 2.)

$$\frac{d(u\cos.\vartheta)}{u\,d\vartheta} = f(u)\ ,$$

che lega i decrementi della velocità orizzontale ai decrementi dell'angolo della tangente, si potrebbe determinare la funzione incognita $f(u)$.

Finchè non si abbia la sopra mentovata tavola per esprimere la resistenza, sulla cui esattezza non si possa muover dubbio alcuno, sarebbe opra perduta quella di calcolare per punti le tavole del tiro elevato.

Tuttavia le circostanze ordinarie del tiro elevato sono tali, che si può, senza grave errore, far uso per questo tiro delle tavole calcolate nell'ipotesi, che la resistenza segua il quadrato della velocità. Infatti, nel tiro delle bombe le velocità variano solo fra i 50^m e i 150^m; e fra tali limiti, non dipartendosi guari, come si è già notato, la resistenza dalla ragion duplicata della velocità, si può supporre $\frac{f(u)}{u^2}$ costante nell'estensione della curva, ed uguale al suo valore iniziale, o meglio, ad un valor medio fra i diversi valori che riceve; e quindi calcolare la traiettoria, con sufficente precisione, valendosi delle tavole stampate da diversi Autori, per esempio di quelle del sig. Otto [1].

Notisi, che la quantità chiamata k da quest'ultimo Autore, e che egli assume per unità di lunghezza, è tale che

$$2gk = \frac{u_0^2}{f(u_0)}\ .$$

Si ottiene maggior esattezza, ove si prenda per determinare k, invece del valor iniziale $\frac{u_0^2}{f(u_0)}$, un valor medio fra quelli, che questa funzione acquista sull'arco di curva, che si considera.

Qualora non si abbia alla mano niuna di simili tavole, e che ciò non di meno occorra di calcolare una traiettoria elevata, si potrà far uso di uno de' metodi d'approssimazione suggeriti dal Legendre [2] o dal

---

[1] Otto. Tafeln für den Bombenwurf (Berlin, 1842). Trovasi una traduzione di queste tavole in francese, fatta dal sig. Rieffel, sotto il titolo: *Tables balistiques générales pour le tir élevé (Paris, 1845).*

[2] Legendre. *Dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse pour le prix de 1782, qui lui a été adjugé dans l'Assemblée publique du 6 juin.* Questa Memoria venne ristampata a Parigi dal Corréard nel 1846.

Français [1] per calcolare le traiettorie elevate, nell'ipotesi della resistenza proporzionale al quadrato della velocità.

Si dividerà, per esempio, la traiettoria in due rami, l'uno ascendente dall'origine al vertice, l'altro discendente dal vertice al punto di caduta.

Chiamando h' l'altezza dovuta alla velocità del mobile al vertice, si ha

$$h' = \frac{h_0 \cos.^2 \theta_0}{1 + 2\frac{h_0}{k}\cos.^2\theta_0 \xi(\theta_0)} ,$$

in cui

$$\frac{h_0}{k} = f(u_0) ,$$

$$\xi(\theta) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta} + l\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\} .$$

Si determineranno le coordinate del punto culminante, che nomino x', y', mediante le due equazioni

$$\frac{x'}{k'} = 1 - \cos.\theta_0 + Cl\left(\frac{1-C}{\cos.\theta_0 - C}\right) ,$$

$$\frac{y'}{k'} = \frac{1-C^2}{\alpha}\cdot\frac{x'}{k'} - \frac{C}{2}\,\text{tang.}\,\theta_0 - \frac{1}{3\alpha}(1 - \cos.^3\theta_0) ,$$

che trovansi all'art.° 51 della Dissertazione del Legendre, e dove

$$\alpha = \sin.\theta_0 \cos.\theta_0 ,$$

$$C = \cos.\theta_0 - \frac{k'\,\text{tang.}\,\theta_0}{4h_0} ,$$

$$2gk' = \frac{\left(\frac{u_0+u'}{2}\right)^2}{f\left(\frac{u_0+u'}{2}\right)} .$$

---

[1] L'opera del Français non è stampata: se ne trova un estratto nel *Traité de balistique par Is.* Didion *(Paris, 1848)*.

L'ampiezza del ramo discendente, che denomino x'', si ricaverà dall'equazione

$$\frac{4h'}{3}y' = \frac{x''^2}{3 - \frac{x''}{k''}} ,$$

che rinviensi all'art.° 66 della sopra citata Dissertazione, e dove si può prendere

$$k'' = \frac{h'}{f(u')} .$$

L'ampiezza totale sarà eguale a $x' + x''$.

NOTA.

Applicazione delle formole precedenti ad un caso particolare.

Prenderò per esempio la curva descritta da una bomba da $0^m, 22$, cacciata colla velocità di 120^m, coll'angolo di 45°, in un mezzo di densità costante, e la cui resistenza sia espressa da

$$f(u) = \frac{u^2}{2gc}\left(1 + \frac{u}{r}\right) ,$$

ove

$$c = 992^m , \qquad \frac{1}{r} = 0,0012 , \qquad g = 9^m, 809 . \ (1)$$

Coll'aiuto delle formole (N.° 21.)

$$\frac{1}{h_1 \cos.^2\theta_1} = \frac{1}{h_0 \cos.^2\theta_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_0}{r}\right)\left[\xi(\theta_0) - \xi(\theta_1)\right] ,$$

$$\frac{1}{h_2 \cos.^2\theta_2} = \frac{1}{h_1 \cos.^2\theta_1} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_1}{r}\right)\left[\xi(\theta_1) - \xi(\theta_2)\right] ,$$

ecc. ecc. ecc. ,

---

(1) Questi valori delle costanti sono ricavati dal *Traité de balistique par* Dubois Tav. VI.

ove

$$\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos.^3\theta} \,,$$ (1)

si calcolerà una serie di valori di h corrispondenti ad una serie di valori di θ, che giova prendere in progressione aritmetica.

Si farà dapprima variare θ di grado in grado, da $\theta = 45°$ a $\theta = 39°$, e si otterranno i valori seguenti:

θ	h	h tang. θ
45°	734m, 0	734m, 0
44	681 , 5	658 , 1
43	635 , 8	592 , 9
42	595 , 6	536 , 3
41	560 , 0	486 , 8
40	528 , 4	443 , 4
39	500 , 1	405 , 0

I valori di x e y, corrispondenti al punto, dove $\theta = 39°$, sono dati dai due integrali

$$x = 2 \int_{\theta=39°}^{\theta=45°} h\,d\theta \,,$$

$$y = 2 \int_{\theta=39°}^{\theta=45°} h \,\text{tang.}\,\theta\,.\,d\theta \,;$$

ai quali, applicando il metodo delle quadrature del Simpson, si trova

$$x = 126^m, 2 \,,$$

$$y = 114 \,, 6 \,.$$

(1) I valori di $\xi(\theta)$ si trovano in molti scritti di balistica, p. e., nel sopracitato, Tav V.

Si può ora partire da $\theta = 39^\circ$ per far variare gli angoli θ di 2 gradi. Si conseguirà

θ	h	h tang. θ
39°	$500^m, 1$	$405^m, 0$
37	451 , 6	340 , 3
35	411 , 7	288 , 3

Da cui si ricava pei valori delle coordinate, da $\theta = 39^\circ$, fino a $\theta = 35^\circ$,

$$x = 63^m, 3^{\cdot},$$
$$y = 47 , 8 .$$

Facendo quindi variare gli angoli θ di $2^\circ \frac{1}{2}$, si ottiene

θ	h	h tang. θ
35°	$411^m, 7$	$288^m, 3$
32, 5	371 , 0	236 , 3
30	338 , 0	195 , 1

onde che

$$x = 65^m, 0 ,$$
$$y = 41 , 6 ,$$

da $\theta = 35^\circ$ fino a $\theta = 30^\circ$.

Se, partendo da 30°, si fanno variare gli angoli θ di 5°, si formerà la tavola seguente:

θ	h	h tang. θ
30°	$338^m, 0$	$195^m, 1$
25	288 , 3	134 , 5
20	253 , 6	92 , 3
15	228 , 7	61 , 3
10	210 , 8	37 , 2
5	198 , 2	17 , 3
0	189 , 6	0

Donde si ricava, da $\theta = 30°$ fino a $\theta = 0°$,

$$x = 251^{m},2 \ ,$$

$$y = 76 \ ,0 \ .$$

Sommando insieme i valori trovati di x e di y, si avrà per le coordinate, che rispondono al vertice della curva,

$$x = 505^{m},7 \ ,$$

$$y = 280 \ ,0 \ .$$

Passando al ramo discendente, sopra il quale θ diventa negativo, e facendo variare l'angolo di 5°, si formerà la tavola seguente:

θ	h	h tang. θ
0°	$189^{m},6$	0^{m}
— 5	184 ,4	16 ,1
— 10	182 ,2	32 ,1
— 15	182 ,9	49 ,0
— 20	186 ,3	67 ,8
— 25	192 ,7	89 ,9
— 30	202 ,3	116 ,8
— 35	215 ,8	151 ,1
— 40	233 ,8	196 ,2
— 45	257 ,6	257 ,6
— 50	288 ,6	343 ,9

dalla quale si ricava

$$x = 361^{m},9 \ ,$$

$$y = -199,2$$

pei valori di x e y compresi fra 'l vertice ed il punto, dove $\theta = -50°$.

Facendo quindi variare l'angolo θ di 3 gradi, si ottiene

θ	h	h tang. θ
$-50°$	$288^m, 6$	$343^m, 9$
-53	$311, 5$	$413, 3$
-56	$338, 2$	$501, 4$

donde

$$x = 65^m, 4 ,$$

$$y = -87, 2 ,$$

da $\theta = -50°$ fino a $\theta = -56°$.

Di modo che i valori di x e y dal vertice fino al punto, dove $\theta = -56°$, sono

$$x = 427^m, 3 ,$$

$$y = -286, 4 .$$

L'altezza del ramo ascendente, che si è trovata sopra, è inferiore a questa di $6^m, 4$; onde che, per avere l'ampiezza del ramo discendente, bisogna diminuire $427^m, 3$ di

$$6^m, 4 . \text{cot. } 56° = 4^m, 3 .$$

Si ha adunque

Ampiezza del ramo discendente	$423^m, 0$
Ampiezza del ramo ascendente	$505, 7$
Ampiezza totale	$928^m, 7$
Altezza del tiro	$280, 0$.

Poichè $65^m, 4$ corrispondono a $6°$ di differenza nell'angolo θ, si trova che $4^m, 3$ rispondono ad una differenza di $24'$ circa; di modo che l'angolo di caduta debb'essere intorno a $55° 36'$.

Nel calcolare i valori di x e y colla formola delle quadrature del Simpson, non si è tenuto conto della correzione, che sarebbe facilissimo ottenere, formando le differenze quarte de' valori successivi di h e di h tang. θ; perchè essa non ha influenza sulle cifre decimali, che si sono ritenute.

Grado d'approssimazione.

Acciocchè i risultamenti, testè trovati, possano servire di paragone per giudicare del grado di precisione degli altri metodi d'approssimazione, egli è necessario di fissare il limite dell'errore commesso. Se si nota con ε l'errore commesso sul valore di $\frac{1}{h\cos.^2\theta}$, si ha (N.° 21.)

$$\varepsilon < \left(\frac{B+AC}{2}\right)\left[\frac{(1+C\delta)^n - 1}{C}\right]\delta ,$$

in cui δ è un numero uguale o superiore a ciascuno degli elementi della differenza $X - x_0$; n, il numero di questi elementi; A, B, C sono tre numeri uguali o superiori ai più gran valori numerici, che possono ricevere le funzioni

$$\frac{2}{c}\left(1+\frac{u}{r}\right) ,$$

$$\frac{2u}{cr}\,\text{sin.}\,\theta.\cos.^2\theta ,$$

$$\frac{u^3}{2gcr}\cos.^2\theta ,$$

fra i limiti dell'integrazione.

Esaminando tali funzioni, si scorge, che, nel ramo ascendente, i loro valori vanno scemando, accostandosi al vertice. Onde che, in questo ramo, si può prendere per A, B, C i valori acquistati da dette funzioni al primo limite dell'integrazione.

Nel ramo discendente la prima decresce dal vertice fino al punto, dove ha luogo la velocità minima; e di là cresce fino al punto di caduta. La seconda funzione, al contrario, cresce dal vertice fino ad un punto, dove diventa massima; quindi scema fino al punto di caduta. Il punto corrispondente al massimo si trova mediante l'equazione

$$2\cos.\theta + f(u)\,\text{tang.}\,2\theta = 0 ,$$

la quale fornisce $\theta = 40°$ circa. Il valore poi della terza funzione decresce dal vertice fino al punto di caduta.

Nel ramo discendente adunque convien prendere per A, dal vertice fino al punto, dove $\theta = -15°$ circa, il valore, che acquista la prima funzione al primo limite; poscia da questo punto fino al punto di caduta prendere il valore, che riceve al secondo limite. All' incontro si prenderà per B, dal vertice fino a $40°$, il valore acquistato dalla seconda funzione al secondo limite; e di poi quello ottenuto al primo limite. Quanto a C si prenderà sempre il valore, che riceve la terza funzione al primo limite.

Calcolando con tali norme i valori di A, B, C; e chiamando η, ξ, υ gli errori commessi sui valori di h, x, y, si trovano i risultamenti seguenti:

	Da 45° a 39°	39° a 35°	35° a 30°	30° a 0°	0° a −15°	−15° a −30°	−30° a −40°	−40° a −50°	−50° a −56°
$A =$	0, 002 31	0, 002 26	0, 002 23	0, 00 221	0, 002 16	0, 002 17	0, 002 18	0, 002 20	0, 002 21
$B =$	0, 000 10	0, 000 09	0, 000 08	0, 00 007	0, 000 03	0, 000 06	0, 000 06	0, 000 06	0, 000 06
$C =$	0, 053 28	0, 036 19	0, 030 03	0, 024 97	0, 013 98	0, 012 36	0, 011 56	0, 011 24	0, 010 85
$\delta =$	0, 048 11	0, 071 37	0, 075 96	0, 125 29	0, 093 88	0, 125 29	0, 175 32	0, 284 57	0, 268 20
$n =$	6	2	2	6	3	3	2	2	2
ε >	−0, 000 001 5	−0, 000 002 4	−0, 000 003 3	−0, 000 009 6	−0, 000 010 4	−0, 000 010 4	−0, 000 010 4	−0, 000 010 5	−0, 000 010 6
ε <	0	0	0	0	0	0, 000 002 1	0, 000 004 9	0, 000 011 4	0, 000 017 3
η <	0, 2	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 3	0, 4	0, 4
η >	0	0	0	0	0	−0, 06	−0, 16	−0, 4	−0, 6
ξ <	0, 04	0, 04	0, 05	0, 32	0, 16	0, 16	0, 10	0, 14	0, 08
ξ >	0	0	0	0	0	−0, 03	−0, 06	−0, 14	−0, 13
ω <	0, 04	0, 03	0, 03	0, 09	0, 02	0, 07	0, 07	0, 14	0, 11
ω >	0	0	0	0	0	−0, 01	−0, 04	−0, 14	−0, 17

Ciascun valore del limite dell'errore ε si compone di due parti: la prima espressa da

$$\left(\frac{B+AC}{2}\right)\left[\frac{(1+C\delta)^n-1}{C}\right]\delta ,$$

è dovuta all'alterazione, che riceverebbe l'ultimo valore di $\frac{1}{h\cos.^2\theta}$, se invece di dividere l'intervallo dell'integrazione in n parti, si dividesse in un numero infinito di parti: la seconda si ottiene moltiplicando l'errore commesso sul primo valore di $\frac{1}{h\cos.^2\theta}$ per

$$(1+C\delta)^n ;$$

ed è dovuta all'alterazione prodotta sull'ultimo valore di $\frac{1}{h\cos.^2\theta}$ dalla variazione del primo. (1)

Avvertasi, che nel nostro caso la prima parte dell'errore è negativa da 45° a −15°, e da indi in là sempre positiva.

Per calcolare i limiti degli errori commessi su x e y, si è supposto, che l'errore fatto su h, si mantenesse uguale in tutta l'estensione dell'arco, che si considera; cioè, si è calcolato il limite dell'errore corrispondente ad x colla formola

$$2\eta(\theta_0-\theta) ,$$

e quello relativo ad y colla formola

$$2\eta l\frac{\cos.\theta}{\cos.\theta_0} .$$

Sieno x' e y' l'ampiezza e l'altezza del ramo ascendente; x'' e y'' l'ampiezza e l'altezza del ramo discendente da 0° a −56°; ξ', υ', ξ'', υ'' gli errori corrispondenti; si avrà

$$x' = 505,7+\xi' ,$$
$$y' = 280,0+\upsilon' ,$$
$$x'' = 427,3+\xi'' ,$$
$$y'' = 286,4+\upsilon'' ,$$

(1) Veggasi la già citata Memoria del CORIOLIS nel *Journal de mathématiques de Liouville. Tome* 2.e, *année* 1837.

dove, giusta la tavola precedente,

$$\xi' > 0 \quad \text{e} \quad < 0,45 ,$$
$$\upsilon' > 0 \quad \text{e} \quad < 0,19 ,$$
$$\xi'' > -0,36 \quad \text{e} \quad < 0,64 ,$$
$$\upsilon'' > -0,36 \quad \text{e} \quad < 0,41 .$$

L'ampiezza totale, o gittata G, sarà

$$G = x' + x'' - (y'' - y') \operatorname{cot.} 56^\circ ,$$

ovvero

$$G = 928,7 + \xi' + \xi'' - (\upsilon'' - \upsilon') \operatorname{cot.} 56^\circ .$$

Se in questa espressione si mette in luogo di ξ', ξ'', υ' i loro limiti superiori, ed in vece di υ'' il suo limite inferiore, si otterrà un valore superiore alla vera gittata. All'incontro, si avrà un valore inferiore, sostituendo a ξ', ξ'', υ' i loro limiti inferiori, ed a υ'' il suo limite superiore.

Sarà adunque

$$G < 930^{m},3 ,$$
$$G > 927 ,9 .$$

Sicchè, prendendo la gittata uguale a $928^{m},7$, siam certi di non fare un errore assoluto maggiore di $1^{m},6$, nè un errore relativo maggiore di $\frac{1}{580}$.

L'errore assoluto commesso nel prendere l'altezza del tiro uguale a $280^{m},0$, non è maggiore di $0^{m},2$, ed il relativo di $\frac{1}{1400}$.

Di qui si vede, che il primo metodo d'approssimazione è suscettibile di una grande precisione; poichè il vero errore commesso è senza dubbio molto minore di quello or ora trovato.

Risultamenti, che si ottengono, adoprando le tavole del sig. Otto.

Supponendo la resistenza proporzionale al solo quadrato della velocità, e prendendo

$$k = \frac{c}{1 + \frac{u_n}{r}} = \frac{992}{1 + 0,0012 \times 120} = 867^m ,$$

trovasi, mediante le tavole del sig. Otto, essere la gittata uguale a $918^m,5$, l'altezza del tiro $279^m,5$, l'angolo di caduta $56° 5'$. Cotal gittata debb'essere minore della vera, perchè, stante il valore attribuito a k, risulta la resistenza troppo grande in tutta l'estensione della traiettoria.

Per avere una gittata maggiore della vera, basta far corrispondere il valore di k alla velocità minima; la quale si trova essere 59^m, prendendo $k = 867^m$: poichè in tal modo si rende la resistenza troppo piccola in tutta la traiettoria. Così operando si ottiene $k = 926^m$; gittata $= 939^m,2$; altezza del tiro $= 283^m,8$; angolo di caduta $= 55° 37'$.

La media aritmetica fra le due gittate, $928^m,8$, si accosta molto alla gittata vera.

Risultamenti forniti dal metodo del sig. Didion.

Le formole del sig. Didion, quando si consideri la traiettoria intera in un solo arco, e che si assuma

$$\alpha = \frac{\xi(45°)}{\text{tang.}(45°)} ,$$

danno una gittata eguale a $943^m,5$. Questo risultamento è più lontano dal vero, che quelli conseguiti poc'anzi, mediante le tavole del sig. Otto.

Se per avere maggior esattezza si divide la traiettoria in cinque archi: il primo da 45° a 30°; il secondo da 30° a 0°; il terzo da 0° a −30°; il quarto da −30° a −45°; il quinto finalmente da −45° fino al punto di caduta; si ottiene per la gittata $932^m,3$, per l'altezza del tiro $281^m,9$. La gittata differisce almeno di $\frac{1}{465}$ dalla vera, e l'altezza del tiro di $\frac{1}{164}$.

Nel trattato di balistica del sig. Didion trovasi descritta graficamente la traiettoria, che qui scelsi per esempio. Dal disegno, che ivi rinviensi, risulta che

L'ampiezza del ramo ascendente è ..... 514^m

L'ampiezza del ramo discendente 430

L'ampiezza totale 944

L'altezza del tiro 286

La velocità al punto di caduta ..... 79,5 .

Di qui si vede, che la costruzione grafica adoperata non è gnari precisa.

Calcolo separato del ramo ascendente e del ramo discendente col metodo del LEGENDRE.

Da ultimo calcolerò lo stesso esempio colle formole del LEGENDRE citate più su (N.° 29.).

L'altezza dovuta alla velocità al vertice si ricava da

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h_0 \cos.^2\theta_0} + 4g \frac{f(u_0)}{u_0^2} \xi(\theta_0) .$$

Ammettendo sempre la stessa legge di resistenza, si ha

$$\frac{f(u_0)}{u_0^2} = \frac{1}{2gc}\left(1 + \frac{u_0}{r}\right) .$$

Onde che

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h_0 \cos.^2\theta_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_0}{r}\right)\xi(\theta_0) .$$

Essendo $u_0 = 120^m$, e quindi

$h_0 = 734^m$, $\theta_0 = 45°$, $\xi(\theta_0) = 1,147934$, $c = 992^m$, $\frac{1}{r} = 0,0012$,

si trova

$$h' = 186^m , \qquad \text{e però} \qquad u' = 60^m .$$

Variando adunque la velocità nel ramo ascendente fra 120^m e 60^m, prenderò, per determinare k, una velocità media aritmetica fra queste due estreme, ed avrò

$$k' = \frac{992}{1 + 0,0012 \times 90} = 895^m .$$

L'ampiezza e l'altezza del ramo ascendente sono, prendendo k per unità,

$$x' = 1 - \cos.\theta_0 + Cl\left(\frac{1-C}{\cos.\theta_0 - C}\right),$$

$$y' = \frac{1-C^2}{\alpha}x' - \frac{C}{2}\,\text{tang.}\,\theta_0 - \frac{1}{3\alpha}(1 - \cos.^3\theta_0);$$

ove

$$C = \cos.\theta_0 - \frac{\text{tang.}\,\theta_0}{4h_0},$$

$$\alpha = \sin.\theta_0 . \cos.\theta_0 .$$

Fatte le sostituzioni, si ottiene

$$C = 0,4023, \qquad \alpha = \frac{1}{2};$$

$$x' = 0,5638, \qquad y' = 0,3130.$$

Moltiplicando per l'unità di misura, si trova:

Ampiezza del ramo ascendente	$504^m,6$
Altezza del tiro	$280,1$

Facendo $h' = 186^m$ e $y' = 280^m,1$ nell'equazione

$$\frac{x^2}{3 - \frac{x}{k''}} = \frac{4h'}{3}y',$$

e prendendo

$$k'' = \frac{992}{1 + 0,0012 \times 60} = 925^m,$$

si trova $420^m,5$ per l'ampiezza del ramo discendente; la quale, aggiunta all'ampiezza conseguita pel ramo ascendente, darà l'ampiezza totale uguale a $925^m,1$.

Quest'esempio mostra, che siffatto metodo del LEGENDRE, qualora si faccia variare convenientemente il valore del coefficiente della resistenza dell'aria, è suscettibile di una precisione maggiore di quello del sig. DIDION, mentre che i calcoli ne sono molto meno complicati.

JUNGERMANNIEARUM AMERICANARUM PUGILLUS

AUCTORE

J. DE NOTARIS

Exhib. 17 decembris 1854.

Parvo hocce opusculo exhibentur Jungermannicarum species aliquot Chilenses et Columbicae, quas fere omnes educere contigit e distinctis fasciculis plantarum Cryptogamicarum, superioribus annis a rev. De Negri Botanices sedulo cultore, et a clarissimo M. D. Ph. De Filippi, in R. Archigymnasio Taurinensi Zoologiae Professore benevole mihi commissis. Chilenses species, unica tantum excepta, debentur Pharmacopolae Clavarensi D.^no^ Puccio Valparaiso olim commoranti, Columbicas vero, cum muscis rarioribus proxime describendis, gazarum naturalium ad flumen *Napo* collectarum a strenuo Mediolanensi peregrinatore D. Osculati particulam sistunt. Collectionem Columbicam, muscorum numero praesertim superbientem, a cl. Professore De Filippi accepi, Chilensem a rev. De Negri, iisque, data occasione, gratias quammaximas memori mente persolvo.

Pleraeque hae species novis nominibus signatae, nec temere, nec inconsulte hic prodeunt; adprobatione etenim clarissimorum Virorum, in hac re peritissimorum, amiciss. Montagne et Hamburgensis Profess. Lehmann, earundem descriptionem adgredior.

Defectu fructificationis quo species pleraeque peccant, mederi studui. diligenti, per quantum fieri potuit, structurae foliorum descriptione, quae

optimos, insignesque saepe characteres suppeditat ad species difficiliores distinguendas.

Foliorum structura, sive sic dicta areolatio, leviter nimis ab hepaticologiae scriptoribus hodie significatur, splendidioresque hepaticarum icones Hookeri, Montagnei, Lindenbergii, hoc sub respectu, plerumque mancae esse videntur, confidimusque hoc nostrum ut ut valde imperfectum specimen, viam in posterum, in hepaticis describendis, tenendam, paraturum esse.

Genuae, Junio, 1854.

SPECIERUM INDEX

Frullania fertilis	N.°	24.
—— leptophylla	»	23.
—— Osculatiana	»	25.
Gottschea lamellata	»	1.
Jungermannia arcta	»	7.
—— haliotiphylla	»	6.
—— involutifolia	»	5.
—— obvolutaeformis	»	9.
—— Poeppioana	»	10.
—— spectabilis	»	8.
Lejeunia Osculatiana	»	22.
Lepidozia columbica	»	13.
—— filamentosa	»	14.
Lepidozia setiformis	N.°	15.
Lophocolea chilensis	»	11.
—— Osculatiana	»	12.
Madotheca foetens	»	21.
Plagiochila ambigua	»	2.
—— dura	»	3.
Polyotus magellanicus	»	17.
Scapania pycnophylla	»	4
Sendtnera chilensis	»	18.
—— piligera	»	20.
—— rigida	»	19.
Trichocolea elegans	»	16.

JUNGERMANNIEARUM AMERICANARUM

PUGILLUS.

GOTTSCHEA

Nees, Lindenb., Gottsch. Syn. hepatic. p. XVII. et 13.

1. Gottschea lamellata.

N. L. G. Syn. hepatic. p. 20. n. 14. et 623.

Jungermannia lamellata Hook. Musc. exot. tab. XLIX. Hook. F. Cryptog. antart. p. 118. n. 3.

Memorabilis haec species, socia *Metzgeria fucoide*, in udis prope urbem Valparaiso abundat.

PLAGIOCHILA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XVII. et 22.

2. Plagiochila ambigua n. sp.

Crescit inter caespites *Stereocauli ramulosi* prope Valparaiso.

E minoribus in hoc genere, olivaceo-fuscescens, in greges inextricabiles coadunata.

Caulis rhizomatoideus, repens, teres, ultrasetaceus, rufo-fuscus, rigidus, contortus, foliis annorum praegressorum huc illuc vestitus, crebre inordinateque ramosus. Rami madore erectiusculi, dimidio centimetro vix longiores, simplices, vel ex axilla foliorum superiorum innovantes, in sicco deflexi, imbricantes. Folia ab inferiori parte ad ramorum apicem gradatim ampliora, infima exigua, squamacea, rotundata, alterna, dissita, caetera alterne disticha, subhorizontalia, erecto-patula, vel patentissima, remotiuscula, e basi semiamplectente late ovato-rotundata, ambitu toto minutissime, remoteque denticulata, ad basim nonnihil depressam concaviuscula, caeterum convexa, utroque margine, praesertim vero ventrali,

recurvata, in sicco dorsum versus secundato-deflexa. In ramis nondum perfecte evolutis, folia in utraque rami extremitate decrescentia observantur. Amphigastria nulla.

Fructus desunt.

Folia sub vitris aerioribus reticulata, densiuscula, areolis irregulariter polygonis, rotundatisve, spatiis intercellularibus inconspicuis.

Plagiochilae porelloidis Lindenbergii (Spec. hepat. p. 61. tab. 12.) aemula, distinguitur foliis non decurrentibus, fere horizontalibus, ovato-rotundatis, potinsquam obovatis, margine toto sub vitro denticulatis, nec integris.

Icon I.

1. 2. Ramorum particulae et 3. 4. folia, decies auct. — 5. Folii segmentum ad augm. 100. diametr. — 6. Segmentum folii ad augm. 300. diametr.

3. Plagiochila dura n. sp.

Surculis *Hymenophylli elegantis* immixta circa Valparaiso.

Exigua, pallescens, fragillima, laxe gregaria.

Caulis rhizomatoideus, inferiori parte denudatus, cicatricibus foliorum superiorum annorum notatus, rigidus, fragilis, decumbens vel adscendens, superne varie divisus, cum ramis eximie a latere compressis, alternis fasciculatisve plerisque simplicibus, rectis vel varie curvatis, centimetrum altitudine vix superans. Folia parva, caulis latitudinem vix duplo excedentia, fere horizontalia, semiamplectentia, alterne bifaria, imbricata, erecto-patula, in sicco arcte adpressa, vix nisi ad basim qua parte ramis accommodantur concaviuscula, circumscriptione orbiculata, margine dorsali in caulem brevissime decurrente, toto ambitu minute denticulata, pallescentia. Amphigastria nulla.

Fructificatio deest.

Folia pro plantae exiguitate firmiuscula, cellulis minutis, quadrato-subrotundis, ovatisve variis, invicem, nulla substantia intercellulari extante, connatis.

Unice cum *Plagiochila minuta* Taylori (Hepat. antart. p. 40. n. 11. et Hook. F. Cryptog. antart. p. 121. tab. CLVII. fig. I.) et *Plagiochila pusilla* Montagnii (Voyag Pol. sud. p. 270. tab. 16. fig. 3. eximia), in sectione

Plagiochilarum heteromallarum, species foliis basi haud conjunctis complectente, comparari meretur, sed a priori evidentissime diversa, caulium divisione, foliis planis, orbiculatis, basi haud angustatis nec obovatis, cellulis marginalibus foliorum reliquis minoribus, quae in minutula « *the cells of the margin conspicuous, of the rest indistinct* » Tayl. l. c. A Plagiochila pusilla denique differt statura multo minore, colore pallescente nec laete viridi, foliis simpliciter denticulatis, sed ex iconis saltem comparatione ei valde affinis.

Icon II.

1. 2. Ramorum particulae a latere visae et 3. foliorum par a dorso viceties auct. — 4. Segmentum folii ad augm. 100. diametr. — 5. Cellulae folii ad augm. 300. diametr.

SCAPANIA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XVIII. et 61.

4. Scapania pycnophylla n. sp.

Circa Valparaiso, locis humentibus, in societate *Polyoti magellanici* et *Racomitrii* speciei *lanuginoso* affinis.

Laxe caespitosa, junior pallescens, senio ferruginea, nudo oculo eleganter plumulata.

Caulis erectus vel adscendens, duo centimetra altitudine vix excedens, totus foliis obductus, simplex, sed demum superiori parte ramo unico, binisve elongatis, rectis, caulis ipsius longitudinem etiam superantibus, continuatus. Folia horizontalia, in planum exacte disticha, alterna, erecto-patula, vix ad apicem leniter decurva, e basi late cordata, subinflata, amplectente, ovata, exacte conduplicata, ab apice ad tertiam partem vel paullo ultra bifida, lobis rotundatis, indivisis, conniventibus, divaricatisve, caeterum margine dense, longe, subtiliterque ciliata, in caule primario densissime imbricantia, in ramis laxiora, tenuiora, pallescentia.

Deest fructificatio.

Cellulae foliorum mediocres, subrotundae, vel anguloso-rotundatae, discretae ob substantiam intercellularem interpositam. Cilia piliformia, cellulis 2. 3. constantia, quarum ultima longissima, decolor.

Speciosa planta cum *Scapania densifolia*, *vertebrali*, *chloroleuca*, quorum habitum refert, comparanda. A Scapania densifolia Neesii (Syn. hepat. p. 72. – Hook. Musc. exot. tab. XXXV.) evidenter differt, foliis erecto-patulis, brevius bilobis, lobis planis haud cirrhatis, dimensione omnium partium conspicue minore. A *Scapania vertebrali* porro et *chloroleuca* (Syn. hepat. p. 72. n. 20. et p. 662. n. 19. *b.*) foliorum lobis rotundatis, nec bicuspidato-excectis, nec bifidis abunde distincta. Species, ut citatae, in genere, ob fructuum defectum incerta.

Observ. Cellulae foliorum in hac specie, ut et in aliis Jungermannicis compluribus, rudimentum membranae interioris, sub forma annuli peripherici, in margine cellulae cavitatem spectante, flexuosi, in sicco persaepe ostendunt. Hoc fit, ni fallimur, ex utriculo primordiali, vel potius e velo pertenui substantiae peculiaris subfluidae elasticae, quae cellulas ipsas vegetas intus exacte obducit, quodque arefactione contrahitur, et praemissis characteribus consistit. Velamen hocce interiorem parietem cellularum obducens, quadantenus adsimilari potest sic dictae membranae interiori granulorum pollinicorum, quae pariter velum substantiae subfluidae, maxime elasticae, potiusquam genuinam membranam praebet.

Icon III.

1. Pars caulis, et 2. 3. folia decies auct. — 4. Segmentum e folii basi et 5. segmentum ex apice folii viceties auct. — 6. Cellulae foliorum ad augm. 300. diametr.

JUNGERMANNIA.

N. L. G. Syn. hepatic. p. XVIII. et 73.

5. Jungermannia involutifolia.

Montagn. in N. L. G. Syn. hepat. p. 81. n. 15. Montagn. Voyag. Pol. sud. p. 260.

Parasitat ad muscos et ad *Polytotum magellanicum* prope Valparaiso.

Papyracea, fusco-punicea, nitida, sparsa.

Caulis serpens, in visis speciminibus simplex, estolonosus, ventre nudus, rigidus, fusco-rutilans, centimetrum longitudine paullo excedens. Folia semihorizontalia, alterne bifaria, incuba, contigua, sed vix imbricata.

in planum erecto-patula, sed antrorsum surrecta, subfalcata, e basi late amplectente ovata, integra, apice sinu obtuso, rectangulove breviter emarginato-bidentata, margine supero, sive ventrali, a medio ad apicem incurvo, infero altius involuto, cauli subadpresso, eumque obvallante, ob dentes denique apicis invicem convergentes vel incumbentes, primo intuito subcucullato-truncata. Amphigastria nulla.

* *major*. Caulis centimetra sex longitudine attingens, e dorso, superiori parte innovans, folia laxiuscula, ampliora, margine utroque breviter involuta, in sicco subconniventia, corrugata, cauli adpressa.

Deest fructus tum in specie cum in ejusdem varietate majore.

Folia densiuscula, firma, cellulis pentagonis, hexagonisve, substellatis, spatiis intercellularibus amplis, lobatis, farctis, distinctis.

Color plantae a cl. Montagne l. c. descriptae, fusco-nigricans, quod in nostra non observatur, sed caeteri validiores characteres, apprime foliorum forma, in nostra exacte quadrant. Quod ad foliorum structuram *J. involutifolia* accedit ad *J. puniceam* Neesii (Montagn. Voyag. Pol. sud. p. 201. tab. 17. fig. 3.) sed in hac specie foliorum dentes acutati, sinu rotundato distincti.

Nearest ally to this plant is J. notophylla cl. Hookerus junior affirmat (Crypt. antart. p. 125.) sed immerito, *Jungermannia notophylla* enim (Crypt. antart. p. 39. tab. LXIV. fig. III.) amphigastriis gaudet, foliisque aliter effiguratis.

Icon IV.

1. Pars caulis a dorso. — 2. Eadem a facie ventrali. — 3. Folium explanatum. — 4. Pars caulis varietatis majoris, a dorso. — 5. Folium ejusdem varietatis explanatum: omnes decies quam in natura majores. — 6. Fragmentum folii ad augm. 300. diametr.

6. Jungermannia? haliotiphylla n. sp.

In agro Valparaisiano inter caespites *Racomitrii lanuginoso* affinis, sociis nonnullis aliis Jungermanniearum speciebus.

Spadiceo-fusca, nitida, firmula, haud caespitosa.

Caulis longitudine centimetra sex usque attingens, surculis Racomitrii superius citati adhaerens, fereque scandens, flexuosus, in sicco fragilis, rigidulus, fusco-rutilans, radiculis, saltem in speciminibus quae ad manus

sunt, omnino carens, simplicissimus, apice obtusatus, sed demum e dorso stolonibus flagelliformibus, folia parva, squamacea, dissita, subsemicircularia, adpressa gerentibus, innovans. Folia bifaria, succuba, cauli subhorizontaliter adnata, semiamplectentia, concinne imbricata, surrecto-conniventia, quasi falcato-secunda, circumscriptione oblique cordato-ovata, apice rotundata, margine ventrali integro, plica fere falciformi dorsum versus inflexo, subfornicata, inferiore plano a medio ad apicem argute denticulato, in facie denique ventrali, praesertim in sicco concaviuscula. Amphigastria nulla.

Desunt fructus.

Folia quod ad compaginem firmiuscula, cellulis, nonnullis exceptis a basi ad medium folii excurrentibus, quae paralellogramae vel oblongatae, minutis punctiformibus contexta. Hae cellulae rotundatae vel subhexagonae, parietibus crassis donatae, substantia intercellulari, eas inter retis ad instar excurrente, simul nectuntur.

Jungermannia Plagiochila sphalera Kookeri jun. et Taylori (Crypt. antart. p. 121. tab. CLVI. fig. VIII., N. L. G. Syn. hepat. p. 653.) plura, ex icone et descriptione auctorum citatorum, praebere videtur, quae huic nostrae speciei conveniunt; sed praeterquamquod planta nostra a Plagiochilis veris non parum toto habitu distat, a specie adducta differt: 1.° caulibus serpentibus, stoloniferis, simplicibus, haud caespitosis: 2.° foliis etiam in planta madefacta conniventibus non patulis, nec apice bifidis, nec bidentatis, margine dorsali inferiori parte integerrimo: 3.° denique foliis basi late ovata caulem subhorizontaliter semiamplectentibus, minime vero *distinctly narrowed at the base.*

Ab *Jungermannia hemicardia* et *unciformi* ejusdem praeclari operis (tab. LXIII. fig. II., tab. CLVI. fig. V.) quae pariter ob foliorum marginem ventralem incurvum ad speciem nostram accedere viderentur, foliorum forma insigniter differt.

Icon V.

1. Pars superior caulis a latere et 2. 3. 4. 5. folia, omnes 10. auctae. — 6. Fragmentum folii ad augm. 100. diametr. — 7. Cellulae aliquot folii ad augm. 300. diametr.

7. Jungermannia? arcta n. sp.

Eodem loco ac praecedens cum qua commixta, et aeque sterilis.

Junior rubiginosa, demum senescendo dilutior in cinnamomum vergens, haud gregaria.

Caulis in sicco fragilis, ex foliorum dispositione a latere eximie compressus, radiculis albidis, longiusculis e ventre egredientibus serpens, varie flexuosus, interdum hue illue geniculatus, rigidulus, e dorso innovans, centimetra duo longitudine vix metiens. Folia exacte bifaria, approximata, succubo-imbricata, horizontalia, madore erecto-patula, in sicco, et praeprimis ad basim, cauli arcte adpressa, e basi semiamplectente utrinque, sed evidentius in latere dorsali, breviter decurrentia, circumscriptione suborbicularia, diametro tamen transverso quidquam longitudinali majore, integerrima, apice leniter recurvantia. Amphigastria nulla. Stolones, ab ortu ob folia parva, convexiuscula adpressa fere moniliformes, perfecte evoluti, cauli primario omnino similes.

Compago foliorum densa. Cellulae marginantes subquadratae, vel ovato-truncatae, reliquae subrotundae, grandes, parietibus crassis donatae, granula numerosa foventes, interstitiis amplis discretae.

Nudo oculo haec species *Jungermanniam coloratam* (N. L. G. Syn. hepat. p. 86.), vel colore, vel statura, vel foliis in sicco arcte conniventibus mentitur, verum ab hac specie, cujus specimina e Capite Bonae Spei a cl. Hampeo missa possidemus, foliis horizontaliter cauli adnatis, cellulis eorundem marginalibus quadratis vel ovato-truncatis, quae in colorata caeteris exiguiores valde differt. Cum europaea *Jungermannia crenulata* vix comparari meretur.

Icon VI.

1. Pars caulis a latere et 2. 3. folia a dorso et a latere decies auct. — 4. Fragmentum folii ad augm. 100. diametr. — 5. Cellulae folior. ad augm. 300. diametr.

8. Jungermannia? spectabilis n. sp.

In societate *Polyoti magellanici* prope Valparaiso.

Sparsim crescens, dilute cinnamomea, molliuscula, a latere eximie compressa.

Caulis elongatus, flexuosus, flaccidus, in speciminibus omnibus quae nunc restant simplicissimus, centimetra 7. 8. longitudine aequans, ventre albidis, brevibus, fasciculatisque radiculis serpens, estoloniferus, nonnisi ex solo apice continuatus. Folia bifaria, succuba, sursum arcte conniventia, madore vix hiantia, laxiuscule imbricata semiverticalia, circumscriptione subrotunda, integerrima, concaviuscula, margine dorsali sensim attenuato in caulem, per tractum dimidiam folii latitudinem aequans decurrentia. Amphigastria nulla.

Fructificatio ignota.

Cellulae marginales foliorum subquadratae, reliquae rotundato-quadratae, rotundataeve, subseriatae, interstitiis plerumque tetragonis distinctae, intus granulis rotundatis plus minusve numerosis foetae.

Haec species tum habitu, cum statura et foliorum colore, *Sphagnocetis communis* varietates quasdam refert, sed praeterquamquod defectu stolonum ventralium ab hoc genere abhorrere videtur, ab omnibus Sphagnocetibus huensque cognitis perbelle differt foliis in caulem attenuato-decurrentibus. In sectione porro genuinarum Jungermanniarum integrifoliarum, in qua planta nostra cadit, prae caeteris comparanda est cum *Jungermannia rotata* Taylori (Hep. nov. Zeland. p. 66. n. 8. N. L. G. Syn. hepat. p. 672. n. 20. *b.*) et cum *Jungermannia grandiflora* (Syn. hepatic. p. 673. n. 23. *b.*), quae duae species folia in caulem decurrentia praebent; sed illis caulis ramosus, caespitosus, vel flagellifer. Species caeterum ipsis clarissimis Lehmannio et Montagneo, in hac re peritissimis, plane ignota.

Icon VII.

1. Pars superior caulis a latere visa et 2. folium seorsim visum, decies auct. — 3. Segmentum folii ad augm. 100. diametr. — 4. Aliquot e cellulis foliorum ad augm. 300. diametror.

9. Jungermannia orvolutaeformis n. sp.

Super caules *Dicrani* cujusdam sterilis, in agro Valparaisiano.

Flaccida, expallens, senescendo et in sicco dilute fuscescens, vix gregaria.

Caulis solitarius, ventre adrepens, sed radiculis vix praeditus, simplex, vel ramulo uno alterove parce divisus, in omnibus repertis speciminibus

ellagelliferus, vix centimetrum longitudine excedens. Folia, pro plantae dimensione, sat ampla, bifaria, succuba, imbricantia, lata basi cauli verticaliter adnata, circumscriptione subreniformia (alaeformia dici mererentur), undulata, margine ventrali rotundato, integro, in omnibus conformi, ultra caulem in facie ventrali nonnihil producto, caeterum cum margine dorsali varie effigurato grosse, remote, irregulariterque dentata, in sicco convoluto-conniventia, corrugataque. Amphigastria grandia, dimidium folium fere aequantia, remotiuscula, e basi semiamplectente exacte cordato-ovata, apice sinu obtuso, subacutove, breviter emarginato-bidentata, integra, concaviuscula, subercta.

Fructus non vidimus.

Folia amphigastriaque membranacea, prorsus decolora, cellulis amplis, forma variis subquadratis, rotundatis, cuneiformibus composita.

Pulchra species, ad *Jungermanniam obvolutam* Hookeri jun. et Taylori (Cryptog. antart. p. 126. tab. CLXI. fig. I., N. L. G. Syn. hepat. p. 669.) accedens, ab ea tamen distinguendam esse suadent: 1.° folia numquam bifida, et margine eorundem ventrali ultra caulem porrecto: 2.° amphigastria quae in *obvoluta* rotundata, utrinque unidentata.

Icon VIII.

1. 2. 3. Folia et amphigastria vario modo inspecta ad augm. 10. diametr. — 4. Segmentum folii ad augm. 100. diametr.

10. Jungermannia? Puccioana n. sp.

Prope urbem Valparaiso super *Racomitrium* pluries citatum.

E minoribus, ochroleuca inter surculos Racomitrii dispersa.

Caulis rutilans, fasciculis radicularum albidarum ex amphigastriorum axilla oriundis arcte serpens, longitudine centimetro paullo major, interrupte vel inferiori tantum parte, ramulis brevibus, gracillimis, millimetra duo raro excedentibus, ex unaquaque foliorum axilla alternis, patulis eleganter pinnatus, apice saepius simplex, innovationibus lateralibus cauli ipso primario conformibus continuatus vel divisus. Folia expallentia, bifariam caulem ambientia, succuba, laxe imbricata, semiverticalia, circumscriptione subsemicircularia, integerrima, oblique erecto-patula, margine incurvo concava, subundulatave, in sicco corrugata, sursum conniventia. Folia ramulorum, caulinis multoties minora, fornicato-concava. Amphigastria

grandia, erecta, late-ovata, concava, apice sinu lato concavo, emarginato-bidentata, in ramulis pinnaeformibus obsoleta.

Fructus deest in omnibus repertis speciminibus.

Folia et amphigastria, pro plantae tenuitate, densiuscula, non flaccida, cellulis rotundis ellipticisve seriatis composita, peripheriis reliquis minoribus dimidiatis. Cellulae parietibus crassis instructae, interstitiis quadrangularibus saepius interpositis.

Habitu fere *Lejeunioideo* in Jungermanniarum genere cui interim adscribitur ob fructus defectum, abnormis; ex amicissimo Montagneo ad *Omphalanthos* quadantenus accedens, ast ab hoc genere foliis succubis aeque distat.

Icon IX.

1. Pars surculi primarii a latere visa, 2. eadem a ventre, 3. amphigastria, 4. pars ramuli, omnes 20. auct. — 5. Segmentum folii ad augm. 100. diametrorum. — 6. Cellulae folior. ad augm. 300. diametr.

LOPHOCOLEA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XVIII. et 151.

11. Lophocolea chilensis n. sp.

In locis humentibus circa Valparaiso.

Ochroleuco-fuscescens, flaccida, vix gregaria.

Caulis serpens, debilis, elongatus, rectus, ad centimetra quatuor longitudine productus, superiori parte ramo uno alterove innovans, ad amphigastriorum insertionem fasciculos radicularum capillarium edens. Folia fere verticalia, exacte complanato-disticha, subopposita, vix succubo-imbricata, patentissima e lata basi ovato subtrapezioidea, integra, sinu lato obtusoque apice emarginato-bidentata, dentibus acuminatis, breviusculis, porrectis, vel divergentibus, vel sursum varie curvatis, margine ventrali plus minusve rotundata, subindeque reflexa, dorsali oblique breviterque in caulem producta, in sicco vix corrugata. Amphigastria foliis multo minora, ovata vel reniformi hexagona, caulis latitudinem paullo excedentia, erectiuscula, cum foliis haud confluentia, quadridentata, dentibus subulatis, quorum intermedii longiores, divergentes, inflexive, laterales patuli, vel varie curvati. Folia in parte innovationum inferiore

alterna, vix imbricantia, margine dorsali longius in caulem descendente, fere falcato-truncata.

Fructus desideratur.

Folia amphigastriaque membranacea, cellulis amplis rotundatis, magnitudine variis, parietibus crassis fuscescentibus donatis, substantia intercellulari ab invicem sejunctis, peripheriis dimidiatis.

Affinis *Lophocoleae leptanthae* Taylori (N. L. G. Syn. hepat. p. 604. n. 28. c., Hook. jun. Cryptog. antart. p. 129. tab. CLIX. fig. VI.) differt foliis latioribus dentibus eorundem brevioribus et praesertim amphigastriis quae in illa palmato-quadrifida, segmentis subaequalibus, triangulo-acutatis, porrectis, et ab ea separamus auctoritate celeberrimorum synopseos Hepaticarum Auctorum innixi, qui Lophocoleas regionum australium inter se arcta affinitate conjunctas, characteribus subtilibus, tantum sed iis constantibus distinctas esse autumant. Collata insuper cum caeteris sectionis secundae speciebus vel foliorum dispositione, vel eorundem forma, vel amphigastriis, ni fallimur, satis superque differt.

Icon X.

1. Pars caulis a ventre, 2. pars caulis a dorso, 3. pars inferior rami innovantis a dorso, omnes decies auctae. — 4. Amphigastria ad augm. 20. diametr. — 6. Segmentum folii ad augm. 100. diametr.

12. Lophocolea Osculatiana n. sp.

Inter muscos, in locis umbrosis, humentibus secus flumen *Napo* in Columbia.

Sparsa, tenerrima livido-fuscescens.

Caulis erectiusculus, innovando parce ramosus, debilis, filiformis, eradiculosus, centimetro vix major. Folia exacte complanato-disticha, fere verticalia, opposita vel vix alterna ad angulum rectum patula, approximata vel succubo-subimbricantia, margine dorsali rectiusculo nuda, ventrali vulgo convexo, apiceque grosse dentato-ciliata, dentibus subulato-setaceis dimidiam folii longitudinem saepius superantibus, sinubus latis rotundatis distinctis, caeterum folia figura variabilia subquadrata, semiovata, subindeque fere triangularia. Amphigastria, utroque latere, ala angustissima brevi in folia decurrentia, subhexagono-reniformia, quadri-

dentata, dentibus setaceis, sinubus latis obtusis diremtis, quorum medii longiores subrecti, laterales breviores, patuli, deflexive.

Fructificatio deest.

Folia tenuia, cellulis amplis rotundatis, parietibus crassiusculis fuscescentibus, rugosis instructis spatiis plerisque triangularibus, substantia intercellulari lutescente farctis, pulcherrima! Dentes foliorum et amphigastriorum conferviformes.

Spectat ad sectionem primam Lophocolearum Synopseos hepaticarum, quae species amphigastriis decurrentibus et cum foliis connatis instructas complectitur, et prae reliquis accedere videtur ad *Lophocoleam Breutelii* (N. L. G. Syn. hepat. p. 154. n. 4.), sed in hac specie foliorum margo dorsalis uni-bidentatus, amphigastria orbiculata, ciliis utrinque ternis, quaternisve praedita. Longius a nostra distant *Lophocolea trapezioidea* Montagne (Ann. Scienc. naturell. Ser. II. v. XIX. p. 251. tab. 8. fig. 2.) et *Lophocolea columbica* Gottschei (Syn. hepat. p. 155.).

Icon XI.

1. Pars caulis a facie dorsali et 2. pars caulis a ventre 10. auct. — 3. Amphigastria 20. auct. — 6. Cellula folii ad augm. 300. diametr.

LEPIDOZIA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XIX. et 200.

15. Lepidozia columbica n. sp.

Ad flumen Napo in Columbia, ad terram muscosam.

Dilute virens, sparsim inter muscos crescens.

Caulis procumbens rigidulus, flexuosus, eradiculosus, simplex vel ramo uno alterove divisus, ramellos debiles, breves, attenuatos, distantes, stoloniformes edens, centimetra duo vel tria longitudine attingens. Folia incuba, semiverticalia, alterna, disticho-complanata, ad angulum rectum patula, vix nisi lenissime decurva, discreta vel approximata sed vix imbricantia, circumscriptione quadrato-subovata, convexiuscula, ad medium fere trifida, segmentis triangulo-acuminatis inaequalibus, plerisque porrectis, superiore ut plurimum paullo ampliore, caeterum vel ambitu toto serrata, vel inferiore ventrali integra. Amphigastria adpressa, ampla, folia

fere aequantia, quadrifido-palmata, segmentis lineari-lanceolatis serratis. Folia ramulorum caulinis multo minora; ovata, serrulata, apice sinu angusto bidentata, dentibus triangularibus, amphigastria minuta, ovata, bifida, integra.

Desunt fructus.

Folia amphigastriaque firmula, reticulata, cellulis grandibus, rotundatis, oblongisve composita, sed sub vitris acrioribus, cellulae pleraeque exacte polygonae, crassis parietibus instructae, utriculo primordiali sat perspicuo intus vestitae.

Foliis caulis primarii omnibus trifidis, ramulorum bifidis, facile distincta videtur ab omnibus Lepidoziis in Synopsi hepaticarum adnumeratis. Memoranda tamen venit, utpote ad nostram speciem notis nonnullis accedens, *Lepidozia capilligera* (N. L. G. Syn. hepat. p. 204. n. 11.) quae foliis amphigastriisque subquadrifidis se praebet, sed vel foliorum insertione vel caulis divisione, ramisque capillaribus a nostro omnino distincta est.

Icon XII.

1. Pars caulis primarii a dorso visa, 2. pars caulis ex alio specimine, a ventre, 3. ramuli particula a facie ventrali, omnes 10. auct. — 4. Amphigastrium e caule primario viceties auctum. — 5. Segmentum amphigastrii ad augm. 100. diametr. — 6. Cellulae aliquot folii ad augm. 300. diametr.

14. Lepidozia filamentosa.

N. L. G. Syn. hepat. p. 206. n. 19. Montagn. Voyag. Pol. sud. p. 246.

Jungermannia filamentosa Lehman. Pug. VI. p. 29.

Vulgaris circa Valparaiso, ad *Polyotum magellanicum*, ad *Trichomanes*, ad *Hypnum aciculare*, etc.

15. Lepidozia setiformis n. sp.

Caulibus Racomitrii superius allati haeret prope urbem Valparaiso.

Pertenuis, capillo vix major, saturate fusca, sub simplici lente fere spinulosa, sparsim crescens.

Caulis fusco-nigricans, rigidulus, scandens, varie flexuoso-contortus, inordinate ramosus, centimetrum longitudine metiens, ramisque caule

primario tenuioribus vix radiculosis. Folia olivaceo-lutescentia, exigua, horizontalia, remota, alterne disticha, patenti-erecta, pleraque cuneiformi quadrifida, segmentis triangulo-acutis, divergentibus, vix incurvatis, apice diaphanis, concaviuscula, rigidula, subinde tum in caule primario cum in ramis trifida. Amphigastria foliis vix minora, iisque omni parte conformia, remota, patula, ita ut trifariam foliata dici mereatur.

Fructus desiderantur.

Caulis cellulis elongatis, densis, opacis, constat. Cellulae foliorum, pro plantae dimensionibus, sat grandes, subquadratae, parietibus crassiusculis instructae, utriculo primordiali, in planta sicca, contracto, corrugato, cellularum interstitia obliterata.

In systemate, prope *Lepidoziam capillarem* (N. L. G. Syn. hepat. p. 212. n. 36.) locanda a qua distinguendam esse contendimus, foliis in nostra haud verticalibus, nec subimbricatis, amphigastriisque plerisque quadrifidis nec quadripartitis. Addendum insuper amphigastria in planta nostra, folia magnitudine aequare, dum e contra foliis minora se praebent in *Jungermannia hippuroide* Hookeri jun. (Cryptog. antart. p. 47. tab. LXV. fig. VII.) quae ex clarissimis N. L. et G. ad *capillarem* spectat.

Icon XIII.

1. Pars caulis a ventre visa, 2. 3. folia amphigastriaque e caule excisa et perfecte explanata, 4. fragmentum caulis folium et amphigastrium exhibens tantum trifida, omnes viceties auctae. — 5. Segmentum folii ad augm. 100. diametr. — 6. Cellulae foliorum ad augm. 300. diametr.

TRICHOCOLEA

N. L. G. Synops. hepatic. p. XX. et 236.

16. Trichocolea elegans.

Lehmann herb. ex Hohenack. Pl. chilens. Lechlerianae n. 588.

Ad truncos arborum provinciae Valdiviae ex Lechlero.

Pulchram hanc Trichocoleam commemoramus, ex eo quod certe differt a vulgari *T. tomentella*, caulibus simpliciter pinnatis, ramisque confertis subfastigiatis, densissime foliosis, et prae reliquis foliis fere verticalibus, basi altius membranaceis, fimbriis eorundem tenuioribus.

POLYOTUS

N. L. G. Syn. hepatic. p. XX. et 244.

17. Polyotus magellanicus.

Jungermannia magellanica Schwaegr. Muscor. hepatic. prodr. p. 14. n. 3. et p. 39. cum Icone.

Habitat circa Valparaiso in locis udis.

Polyoti magellanici descriptio in Synopsi hepaticarum (p. 248. n. 6.) cum planta nostra, quae characteribus validioribus cum specie a Schwaegrichenio descripta adamussim congruit, minus exacte quadrat, et verosimiliter hoc nomine species fortasse plures in posterum distinguendae complectuntur.

Caulis in nostro, ramique ejusdem principes elegantissime bi, vel tripinnati, pinnis, pinnulisque contiguis, vel maxime confertis invicem imbricantibus. Folia caulis principis, discreta vel plus minusve adproximata, imbricatave, circumscriptione ut in Schwaegrichenii icone, vel in speciminibus varietatis confertae ramosae, oblique cordato-ovata, obtusa, densiora, basi ciliis aliquot longis, subfasciculatisve praedita. Auriculae alternae, vel per paria approximatae, fere conjugatae, prout folia magis vel minus conferta se praebent, ovatae, obtusae, margine toto vel utroque tantum latere recurvatae, integrae vel apice denticulatae, vel demum exteriori latere ciliis aliquot elongatis instructae. Amphigastria late reniformia, fere hippocrepidoidea, apice obsolete plerumque retusa, margine toto recurvata, basi interdum ciliifera. Folia axeos pinnarum caulinis minora, margine supero denticulata, vix ciliata, infero et basi praesertim longe ciliata. Amphigastria caulinis similia sed ad latera ciliis longis patentibus praedita. Auriculae forma variae, longe ciliatae, subinde basi insigniter constrictae, fere petiolulatae, ibidemque in exteriore latere appendicula subulato-falcata, auriculam ipsam aequante, incurva, auctae. In pinnulis denique folia, auriculae, amphigastriaque, exacte ut in adducta Icone, sed in pinnulis nonnullis folia observantur orbiculata, toto ambitu breviter denticulata, amphigastria margine tantum ut folia denticulis brevibus instructa. Color plantae siccatae rubiginosus. Cellulae foliorum oblongae, rotundataeve, paucis interstitiis trigonis, quadrangularibusve sejunctae.

In unico exemplari formae conferte bipinnatae, ad caulis primarii latus observavimus ramulum brevem, crassum, capituliformem, foliis amplis, amplectentibus, imbricatis, margine longe ciliatis, basi simul in tubulum subinfundibuliformem connatis, consitum, nullis vel archegoniorum vel fructus vestigiis extantibus. Quo ramulo, involucrum foliis ample ovatis compositum sistente, haec species recedere videtur a *Polyoto magellanico* Synopseos hepaticarum, in quo folia involucralia ovato-lanceolata describuntur. Quamobrem Polyoti hujus nostri specimina sub nomine *Polyoti decipientis* superioribus annis evulgavimus. Iconem *Jungermanniae magellanicae* celeb. Hookeri (Musc. exot. vol. II.) videre non contigit.

SENDTNERA

N. L. G. Synops. hepatic. p. XX. et 238.

18. Sendtnera chilensis n. sp.

In agro Valparaisiano inter caespites Trichomanidum.

Luteo-fulvescens, nitidula, in sicco rigida, fragilis.

Caulis fuscescens, e basi procumbente adsurgens, apice interdum nutans, simplex, centimetra duo altitudine quidquam excedens, inferiori parte, ad flexuram nempe, stolonem unicum geminosve flagelliformes, prostratos edens, iisque, ex speciminibus saltem quae ad manus habemus, sequentibus annis, caulem primarium subrogantibus, iterumque propaginibus novis continuatis. Folia amphigastriaque in caulis parte inferiore atque in stolonibus hornotinis, parva, squamaeformia, discreta, trifariam disposita, vel ovata ad medium bifida, segmentis triangulo-acutis, concaviuscula, margine toto integra. Folia perfecte evoluta, in caulis parte superiore conferta, praecedentibus multoties majora, bifaria, subhorizontalia, ventrem caulis versus deflexa, falcato-secunda, e basi ovata concava obsolete denticulata, profunde bifida, segmentis sinu acuto-distinctis, canaliculatis, rectis, divergentibus subfalcatisve, lineari subulatis, acutissimis, dimidio folio longioribus, caeterum ut folii parte inferiore omnino enerviis. Amphigastria foliis conformia sed paullo angustiora. Folia interdum trifida.

Fructu caret.

Folia in sicco subpapyracea, sub vitro anguste sed evidenter marginata,

constant cellulis plerisque oblongatis, intus strato secundario interrupto incrassatis, quapropter folia lineolis longitudinaliter seriatis, rectangulis, vel flexuosis notata videntur.

Sendtnerae juniperinae Neesii (Syn. hepat. p. 239. n. 1.) cujus specimina, ex Java et insulis Mascarenis a cell. Montagne et Hampe missa, possidemus, valde affinis, sed, ni fallimur, characteribus validis distincta. Folia *Sendtnerae juniperinae* vittam cellularum ampliorum, quae nervi ad instar a foliorum basi ad apicem fere usque segmentorum eorundem extenduntur, praebent, margine diaphano omnino carent, structuram demum alienam praeseferunt. Cellulae enim hujusce speciei strato interiori interrupto carere videntur, simulque connectuntur substantia intercellulari copiosiore. *Sendtnera* denique *runcinata* Taylori (Syn. hepat. p. 721. 1. *b.*) ad nostram pariter accedens, dignoscitur foliis, *quibus vitta pellucida magis lutea* quam reliqua folii pars.

Icon XIV.

1. 2. Folia decies aucta. — 3. Amphigastrium ad idem augmentum. — 4. Segmentum e basi folii 20. auct. — 5. Segment. folii ad augm. 100. diametr. — 6. Folium e stolone 20. auct. — 7. Cellula folii ad augm. 300. diam.

19. Sendtnera rigida n. sp.

Ad terram muscosam madidam supra Valparaiso.

In sicco fuscescens, nudo oculo fere tota hispida, ex foliorum fimbriis subsquarrosis, latis, intricatisque gregibus degens.

Caulis valde rigidus, flexuoso-erectus, simplex vel furcatus, plerumque inferiori parte tenuior, centimetra octo longitudine aequans, alterne ramosus, ramis discretis, subaequidistantibus, subaequilongis, plerisque recurvatis, trigonis, attenuatove-subulatis, rarius furcatis. Folia amphigastriaque conformia, carnosula, fragillima, caulem primarium ex integro obtegentia, adpressa, horizontalia, circumscriptione late cuneiformia, vix concava, bis bifida, in segmenta nempe duo bifida ad basim fere usque secta. Haec segmenta pleraque lineari-angustata apicem versus in fimbrias angustas piliformes varie soluta, margine nuda vel ramentis aliquot aeque piliformibus, erectis, vel patulis praedita. Segmenta foliorum primaria interdum trifida observantur. Folia amphigastriaque ramorum minora,

tristiche imbricata, sed pariter bis bifida, vel profunde quadrifida, segmentis angustis, divergentibus, nudis ciliiferisque, subcuneiformi palmata. Involucrum capituliforme in ramo brevi laterale, vel rectius forte terminale, sed ob ramum pone involucrum ortum, caulemque continuantem pseudolaterale. Folia involucralia perianthium ambientia, plura, lineari-attenuata, margine ramentaceo-fimbriata, cum perianthio ipso connascentia, basi in facie dorsali ramentis piliformibus copiosissimis densis hirta. Perianthium 6–8. fidum, segmentis folia involucralia subaequantibus iisque conformibus. Calyptra cum perianthio connata, membranacea, tenera. Capsula ovalis sed maturam non vidimus.

Folia humecta dilute olivacea, cellulis oblongis subflexuosis contexta, cellulae immediate invicem connascentes, parietibus crassis utriculo primordiali duplicatis instructae.

Quod ad habitum et staturam, *Sendtnerae Scolopendrae* Neesii (Syn. hepat. p. 240. *b.*, Hook. Musc. exot. tab. XL.) similis, sed ab ea quammaxime recedit vel foliorum forma vel perianthii structura. Notis nonnullis ad insequentem etiam accedit sed foliis fimbriatis, statura multo robustiore apte distinguitur.

Icon XV.

1. 2. 3. Folia et amphigastrium e caule primario, 4. 5. 6. folia et amphigastrium e ramulo, omnes decies auctae. — 7. Segment. folii ad augm. 100. diametr., 8. cellulae folii ad augm. 300. diametr. — 9. Perianthium a latere visum demtis foliis involucralibus.

20. Sendtnera ochroleuca piligera.

In Trichomanidum consortio ad Valparaiso.

Nudo oculo filiformis, ochroleuco-fuscescens, ob foliorum segmenta piliformia, hispidula, gregibus laxis, vix invicem intricatis crescens.

Caulis, etsi valde tenuis, rigidulus, diversimode flexuoso-contortus, serpens, centimetrum altitudine vix superans, simpliciter alterneque pinnatus, ex ramis discretis, patulis, subaequilongis, vel demum innovando, furcatim divisus. Ramorum nonnulli saepe in apicem filiformem attenuati, deflexi, subcirrhiformes. Folia subhorizontalia, erecta, incubo-imbricantia, plana, e basi late cuneiformi bis bifida, polymorpha, margine basim versus praecaeteris ramentis aliquot ciliiformibus instructa vel nuda.

Segmenta foliorum primaria recta, vel plus minusve divergentia, sinu acuto vel rotundato distincta, reliqua, secundaria nempe, triangulo-subulata, apice canescenti-piliformia. Amphigastria imbricata, plana, foliis prorsus similia vel simpliciter bifida. In ramis folia, amphigastriaque caulinis conformia sed angustiora.

Fructu caret.

Folia madefacta pallide olivaceo-virentia, cellulis parietibus crassis instructis, oblongis, flexuosis, vel marginalibus reniformibus, composita.

A *Sendtnera ochroleuca* e Capite Bonae Spei a clariss. Hampeo communicata, recedit habitu tenuiore, foliorum amphigastriorumque segmentis longius subulato-piligeris.

Icon XVI.

1. 2. 3. 4. folia, 5. 6. amphigastria ad augm. 10. diametr. — 7. Pars folii ad augm. 100. diametr. — 8. Cellul. aliquot folii ad augm. 300. diametr.

MADOTHECA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XXI. et 262.

21. Madotheca foetens.

Ad arborum truncos circa Valparaiso.

Sicca fuscescens, nitoris fere omnino expers, madefacta in olivaceum vergens, odoremque gravem, ingratum spirans.

Rami e caulibus primariis repentibus, flexuosis, firmis, vix radicantibus, foliis marcescentibus vestitis vel denudatis, alterni, prostrati, in caespites amplos invicem implexi, vel imbricati, flexuosi, rigiduli, centimetra usque quinque longitudine attingentes, nunc alterne patenterve subfurcati, nunc ramulis unilateralibus simplicibus, furcatisve, brevibus intervallis remotis, semipinnati, nunc demum exacte pinnati, plerique ad ortum contracti. Folia biloba, imbricata, lobis omnino distinctis! Dorsalis concaviusculus, adpressus, semiverticalis, basi angusta cauli adnatus, transverse subrotundo-ovatus, obtusus, toto ambitu integerrimus, apice inflexus, margine inferiore libero plano leniterve subundulato. Lobus inferior sive ventralis superiore multoties minor, subverticalis, brevissime, externo latere, in caulem decurrens, oblique cuneiformi-obovatus, integer apice obtusissimo reflexus. Amphigastria contigua sed vix imbricantia,

adpressa, semicirculari lunata, caulem semiamplectentia, utrinque breviter decurrentia, apice lateribus, vel margine toto deflexa, basi conspicue inflato gibba, ex quo caulis in facie prona, linea fere moniliformi notatus se prodit. Fructus lateralis e ramorum primariorum facie ventrali, sessilis. Folia involucralia late ovata, sinu acuto biloba, segmentis late triangulo-acuminatis, inaequalibus, margine remote denticulatis, perianthio conspicue breviora, parte inferiore canaliculata amplectentia sed vix conduplicata. Amphigastria ad folia involucralia, ni fallimur, minuta, plana apice emarginata, vel prorsus obliterata. Perianthium ab ortu membranaceum, tenerrimum, ovato-campanulatum, longitudinaliter subplicatum, ore fimbriis ciliiformibus instructum, archegonia plura cylindracea fovens; perfectum subcoriaceum, obovatum, obtuse trigonum, faciebus depressis, apice contracto-apiculatum, demum varie fissum. Capsulam maturam non vidimus.

Folia pulchre reticulata. Cellulae rotundatae vel subrotundo-hexagonae, interstitiis trigonis parvis, saepius regularibus interjectis, ita ut cellulae singulae seorsim sumptae appendiculis triangularibus quinis, senisve aequidistantibus redimitae adparent.

In tota serie specierum hujusce generis insignis, unice *Madotheca Stangeri* Lindenbergii et Gottschei (Syn. hepat. p. 280. et 735.) et *Madotheca partita* Taylori (Hepat. antart. p 27. n. 56., Syn. hepat. p. 279.) cum nostra comparandae veniunt. Ad *Madothecam Stangeri*, cui ex cell. Synopseos hepaticarum auctoribus accensenda *Madotheca elegantula* Montagnei (Voyag. Pol. sud. p. 232. tab. 18. fig. 3.) colore, statura, habitu nonnihil accedere videtur, sed foliorum lobis sejunctis, amphigastriorumque forma satis superque differt. Propius *Madothecam partitam* aemulatur, praecipue ob foliorum lobos distinctos, sed ab hac quoque differt foliis haud recurvis, eorundem lobo inferiore integro, et insuper amphigastriis, quae in *Madotheca partita*, ovalia, obtusissima, integerrima plana (Tayl. l. c.).

Icon XVII.

1. Particula caulis cum pari foliorum a dorso: 2. pars caulis a ventre: 3. amphigastria: 5. perianthium junius: 6. unum e foliis involucralibus: 7. perianthium capsula jam deperdita, omnes decies auct. — 4. Segmentum folii ad augm. 100. diametr.: 7. cellula folii ad augm. 300. diametr.

LEJEUNIA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XXII. et 308.

22. Lejeunia Osculatiana n. sp.

Ad terram humidam muscosam, socia *Metzgeria furcata* ad flumen *Napo* in Columbia.

Latis densisque caespitibus crescit, in sicco dilute fuscescens.

Caulis erectus, filiformis, debilis, saepius subflexuosus, vel apice nutans, eradiculosus, centimetra 6 altitudine aequans, simplex, vel ramo uno alterove, quandoque suboppositis, innovans. Folia exacte complanato-disticha, verticalia, alterna, in parte caulis, ramorumque inferiore, vel in ramis novellis minuta, dissite exacte alterna, triangulari-acuminata fere dentiformia, elobulata; caetera sensim ampliata, contigua, vel perbrevi tractu ab invicem remota, circumscriptione triangulari-ovata acuta, attenuatove apiculata, apice sursum verso, vel patulo, vel quandoque subdeflexo, integerrima, latere infero longiore laeviter convexo, supero plus minusve arcuato, basi lobulo destituta, vel lobulo minuto, plicaeformi, adpresso, triangulari instructa, in sicco vix corrugata. Amphigastria remota, ut plurimum tractu unumquodque foliorum par aequante distincta, erecto-patula, concavinscula, magnitudine folium dimidium aequantia vel excedentia, ovato-bifida, segmentis triangularibus acutis, saepius leniter incurvis, sinu late acuto distinctis, integra. Amphigastria in ramis novellis minora, segmentis eorumdem angustioribus, acutioribusque, subcuspidatisve.

Fructificatio desideratur.

Folia et amphigastria tenuia, membranacea, diaphana, pulchre reticulata, areolis subrotundis, interstitiis triangularibus distinctis.

Prima fronte haec species *Lophocoleam* vel *Chyloscyphum* mentitur, sed foliis evidenter basi lobulatis, generi Lejeuniarum adnectitur. In quo genere farragine specierum difficiliore, nonnullae prostant quae ad plantam nostram pluribus momentis accedere videntur. Cum affinioribus collata, nempe *Lejeunia acuminata* Lehmanni et Lindenbergii (Syn. hepat. p. 354. n. 104., Lehman Pugill. VI. p. 49. n. 104. sub Jungermannia), *Lejeunia conformi* Neesii et Montagnei (Syn. hepat. p. 355. n. 106.)

et *Lejeunia Neumanniana* Neesii (Syn. p. 356. n. 108.), ab hisce omnibus aliisque, quas nimis taedio sum foret enumerare, planta nostra, caulibus haud repentibus, foliis verticalibus, amphigastriorum amplitudine differt. *Lejeuniae acuminatae* specimen possidemus a cl. Montagneo missum. Inter hepaticas denique a Moritzio in Columbia collectas (Hampe Bericht über die Hepaticeae n. 40.), *Lejeunia caripensis* Hampei nostram quadantenus aemulari videtur, sed huic quoque sunt caules repentes, et insuper folia acuminato-subulata, basi sinuata decurrentia, amphigastria subrotunda.

Icon XVIII.

1. Pars caulis a dorso: 2. pars caulis a facie ventrali ut prior decies auct. — 3. Folium et amphigastrium 20. auct. — 4. Apex folii ad augm. 100. diametr. — 5. Cellul. folii ad augm. 300. diametr.

FRULLANIA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XXII. et 408.

25. Frullania leptophylla n. sp.

In thallo *Hageniae Casarettianae* in montibus Brasiliae *Serra dos Orgaos* dictis legit cl. M. D. Casaretto.

Flaccida, parvula, e cinnamomeo-fuscescens.

Caulis serpens e dorso amphigastriorum radicans, filiformis, debilis, subflexuosus, centimetro cum dimidio vix longior, alterne pinnatus. Rami subcontigui, breves, obtusi, sursum sensim decrescentes, simplices, ad angulum fere rectum patentes, vel ramellis exiguis, brevissimis, folia vix excedentibus pinnulati, subinde unus vel alter inferiorum ramorum ut caulis primarius subpinnatus. Folia membranacea diaphana, e basi semiamplectente subverticalia, ad angulum fere rectum patula, adpressa, laxiuscule imbricata, circumscriptione subreniformi-orbiculata, rotundatave, integerrima, apice leniter incurvo subinde acutata, convexa, in sicco haud corrugata. Auriculae exsertae cylindraceae, leniter divergentes, vix tertiam folii latitudinis partem superantes, in sicco incurvae, lobulo ovato, obtuso, concavo auctae. Amphigastria ampla caule conspicue latiora, discreta, patula, e basi semiamplectente subrotunda, concaviuscula, dorso radiculigera, apice sinu lato subrectangulo profunde bidentata,

dentibus acutis, porrectis, caeterum integerrima. Fructus in ramis breviusculis lateralibus terminales sparsi. Perianthium membranaceum, flaccidum, obovatum dorso planiusculum, facie ventrali acute carinatum, ex apice retuso mucronatum, foliis involucralibus subduplo longius, in sicco collabescens. Folia involucralia laxiuscule perianthium amplectentia, complicato-biloba, lobo ventrali oblongo, superiore ovato subacuto, integra, cum amphigastriis ovatis, apice bifidis non connata.

Folia compaginis tenuioris, diaphana, cellulis pro planta amplis, subconcentrice seriatis, contexta. Cellulae marginales dimidiatae, centrales oblongae, intermediae subrotundae, vel subrotundo-hexagonae, interstitiis angustis distinctae.

Frullaniae brasilienses, in volumine primo Florae Brasiliensis a celeberrimo Nees descriptae, quae ad plantam nostram accedunt, sunt *Frullania caulisequa* (Fl. Bras. 1. p. 373. n. 57., N. L. G. Syn. hepat. p. 448. n. 81.) et *Frullania Martiana* Gottsche (Syn. hepat. l. c. n. 80. *Jungermannia cordistipula* ex parte Fl. Brasil. p. 371. n. 55.). Prior vero harum specierum amphigastriis parvis et areolis retis foliorum minutis orbiculatis gaudet, quae in nostra e contra sat amplae, ut et amphigastria caulis latitudinem duplo saltem superantia. *Frullania Martiana* porro differre videtur auriculis inferioribus parvis, superioribus et ramulorum majoribus, quod in nostra non observatur.

Icon XIX.

1. Pars caulis primarii a dorso; 2. pars caulis a parte ventrali: 3. ramulus fructifer a parte ventrali ut priores decies auct. — 4. Lobulus folii cum auricula viceties auct. — 5. Folii segmentum ad augm. 300. diametr.

24. Frullania fertilis n. sp.

Ad truncos prope Valparaiso, cum *Parmelia* quadam *caperatae* similis, ejusdemque thallo etiam instrata.

E minoribus, badio-fusca, caespitibus laxis serpens. Caulis tenuis, prostratus, ex amphigastriorum dorso radicatis, flexuosus, parce vageque divisus, ramulis alternis, patentibus, deorsum curvulis, caule fere duplo angustioribus pinnatus, centimetro longitudine vix major. Folia subverticalia, laxiuscule imbricata, adpressa, ad angulum rectum patula, ob latus ventrale breviter arcuatum, circumscriptione reniformi-orbiculata,

integra, vix apice inflexa, concaviuscula. Auriculae obovoideae, crassiusculae, minori diametro foliorum plus duplo breviores, exsertae, deorsum patulae, cum lobulo ovato, obtuso, minuto interjecto basi connascentes. Folia in ramulis caulinis multo minora, subrotunda, densius approximata, auriculis folium ipsud longitudine aequantibus instructa. Amphigastria parva, caulis latitudinem vix excedentia, late ovata, convexiuscula, margine integra, apice sinu rotundato bidentata. Fructus crebri terminales in ramulis lateralibus, breviusculis adscendentibus, e caule vel ex ejusdem divisionibus primariis sine ordine nascentibus. Perianthium oblongum, amplum, obtuse triquetrum, apice mucrone obtuso terminatum, facie dorsali planiusculum. Capsulam maturam non vidimus. Folia involucralia perianthio multo breviora, integerrima, complicato-biloba ad flexuram acute carinata, lobo ventrali margine utrinque inflexo, auriculaeformi obtuso, dorsali obovato-rotundato. Amphigastrium involucrale caeteris major, profundius bifidum segmentis acutatis.

Folia, pro plantae tenuitate, compaginis densiusculae, cellulis plerisque elliptico-oblongis, nonnullis rotundatis intermixtis, parietibus crassiusculis instructis, subpuniceis, interstitiis diaphanis sejunctis.

Minoribus cum speciebus sectionis 2. *B.* Synopseos hepaticarum collata, nemini descriptarum tute subscribenda; ab omnibus vel foliis involucralibus integerrimis, vel auriculis obovoides divergentibus, lobulo plano iisdem connexo auctis differre nobis visum est. Nudo oculo adspectum *Frullaniae parasiticae* Hampei (N. L. G. Syn. hepat. p. 444. n. 72.) praebet, sed haec pariter a nostra abhorret auriculis cauli adpressis.

Icon XX.

1. Pars caulis a facie ventrali: 2. pars superior ramuli: 3. folium cum amphigastrio: 4. ramulus fructifer: 5. folium involucri, omnes viceties auctae. — 6. Segmentum folii ad augm. 300. diametr.

25. Frullania Osculatiana n. sp.

In Columbia secus flumen *Napo*.

Sicca et nudo oculo aterrima, nitidula.

Caulis decumbens, laeviter flexuosus, centimetra sex longitudine aequans, eleganter laxeque alterne bipinnatus, ramis patulis, ramulisque varie flexis, remotis, subaequidistantibus, inferioribus attenuato-filifor-

mibus, summis crassiusculis, obtusis. Folia subhorizontalia, alterna, bifaria, laxiuscule imbricata, adpressa, erectiuscula, e basi cordata semiamplectente oblique ovata, in apicem sensim attenuato-acuminata, cuspidulataque, latere inferiore involuta, superiore lenissime subrecurva, caeterum integerrima, in sicco cauli arcte adpressa cumque circumvolventia. Auriculae simplices cylindraceae, obtusae, cauli paralellae eique fere contigua, foliis amphigastriisque tectae. Amphigastria e basi cordata, utrinque breviter obtuseque auriculata, ovata, obovatave, diametro fere duplo longiora, margine lenissime recurva, adpressa, vix invicem se tegentia, integra, vel basim versus subinde obsolete denticulata, apice sinu acuto, angusto, breviter bifida, segmentis acutiusculis.

Fructu caret.

Folia madefacta punicco-fuscescentia, firmiuscula, eleganter cellulosa. Cellulae pleraeque oblongae, ambitu leniter flexuosae, parietibus crassis donatae, in series transversas alternantes, apicibus invicem arcte contiguis, sed interstitiis pellucentibus elongatis sejunctae, pulcherrimae!

Etiamsi habitu et characteribus pluribus a *Frullania atrata* Nees (Syn. hepatic. p. 463. n. 118.) non multum distans, tamen *Frullania atrata*, secundum specimina brasilicusia a cell. Kunzeo, Hampeo, Montagneo accepta, differt a nostra, caulibus in sicco, ob folia minus convolutacea, haud filiformibus, foliis laxioribus, vix cuspidato-mucronatis, colore foliorum dilutiore olivacco-fuscescente, nec punicco, nec non cellulis brevioribus, vel ambitu eximie repandis, vel interstitiis nullis sejunctis, et reticulatim connexis, adeo ut species plures Frullaniae atratae nomine confusas iri vereamur. *Frullaniae Osculatianae* affines insuper sunt *Frullania vaginata*, *mucronata*, *macrocephala*, *aculeataque*, quae caeteris missis, *Frullania aculeata* saltem excepta, cujus speciminibus caremus, a nostra facile cellulis foliorum distinguuntur. In *Frullania vaginata* Nees (Syn. hepatic. n. 120.) cellulae foliorum obscurae reticulatim connascentes: in *Frullania mucronata* Lehmanni et Lindenbergii (Syn. hepatic. n. 114.) folia tenuiora, cellulis reticulatim connexis contexta: in *macrocephala* Lehmanni et Lindenbergii denique (Syn hepatic. n. 109.) folia itidem tenuiora, diaphana, cellulis tenuibus cum substantia intercellulari prorsus confusis, interstitiis cellulas ipsas fere aequantibus.

Icon XXI.

1. Pars caulis a dorso: 2. eadem a facie ventrali: 3. folia a latere

inferiore cum auriculis: 4. folia explanata demtis auriculis: 5. amphigastria, omnes decies auctae. — 6. Apex folii et 7. cellulae e parte folii centrali ad augm. 300. diametr.

METZGERIA

N. L. G. Syn. hepatic. p. XXII. et 501.

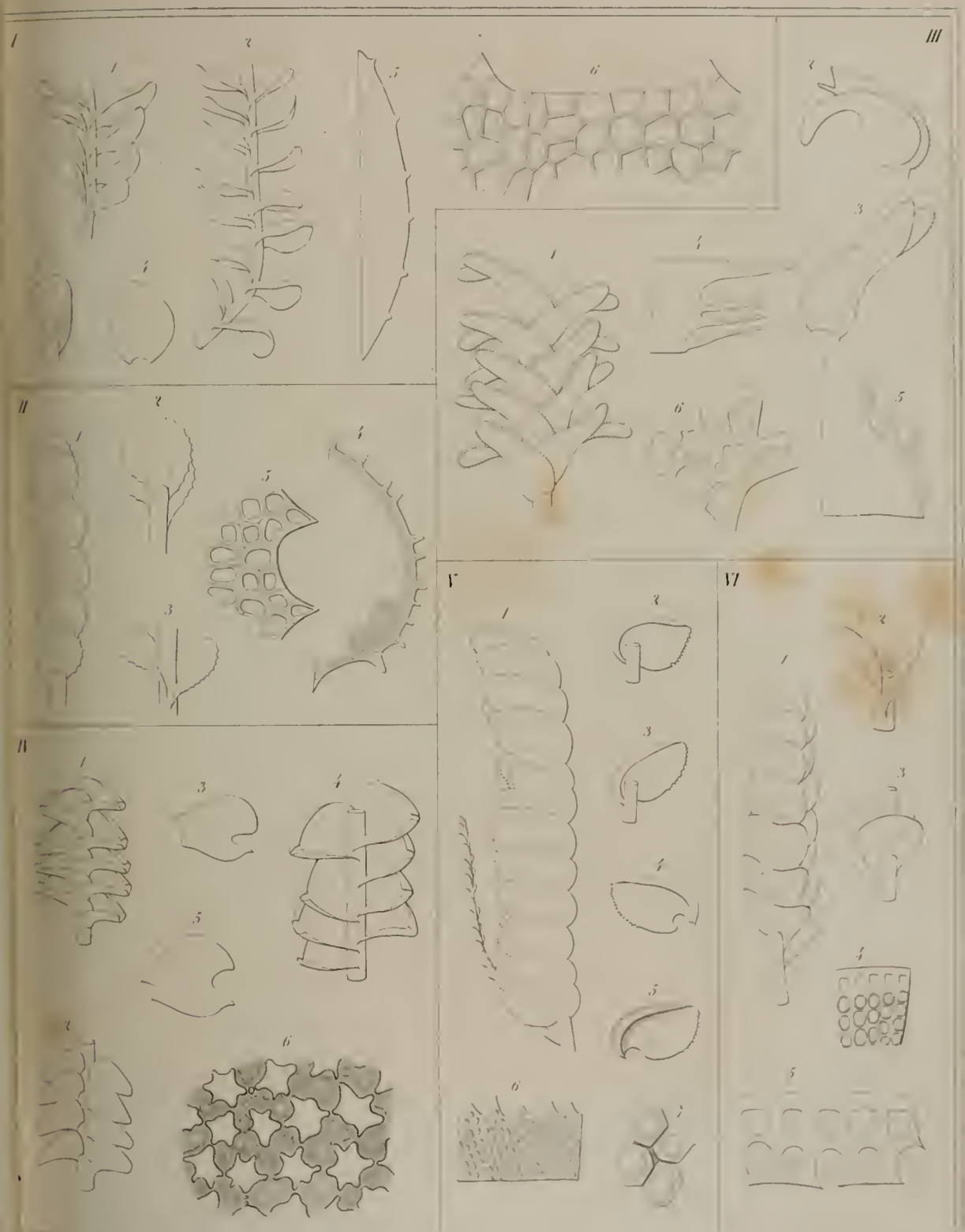
26. Metzgeria fucoides.

Montagn. et Nees Florul. Boliv. p. 60., N. L. G. Syn. hepatic. p. 506. n. 6.

Jungermannia fucoides Swartz. — Hook. Musc. exotic. tab. LXXXV.

Circa Valparaiso ad caespites *Polyoti magellanici* abunde.

Costa pinnularum angusta, sed non ita eminens, ut in optima icone Hookeriana adducta.



I. *Plagiochila ambigua*

II. *Plagiochila dura*

III. *Scapania pycnophylla*

IV. *Jungermannia convolutifolia*

V. *Jungermannia hadrophylla*

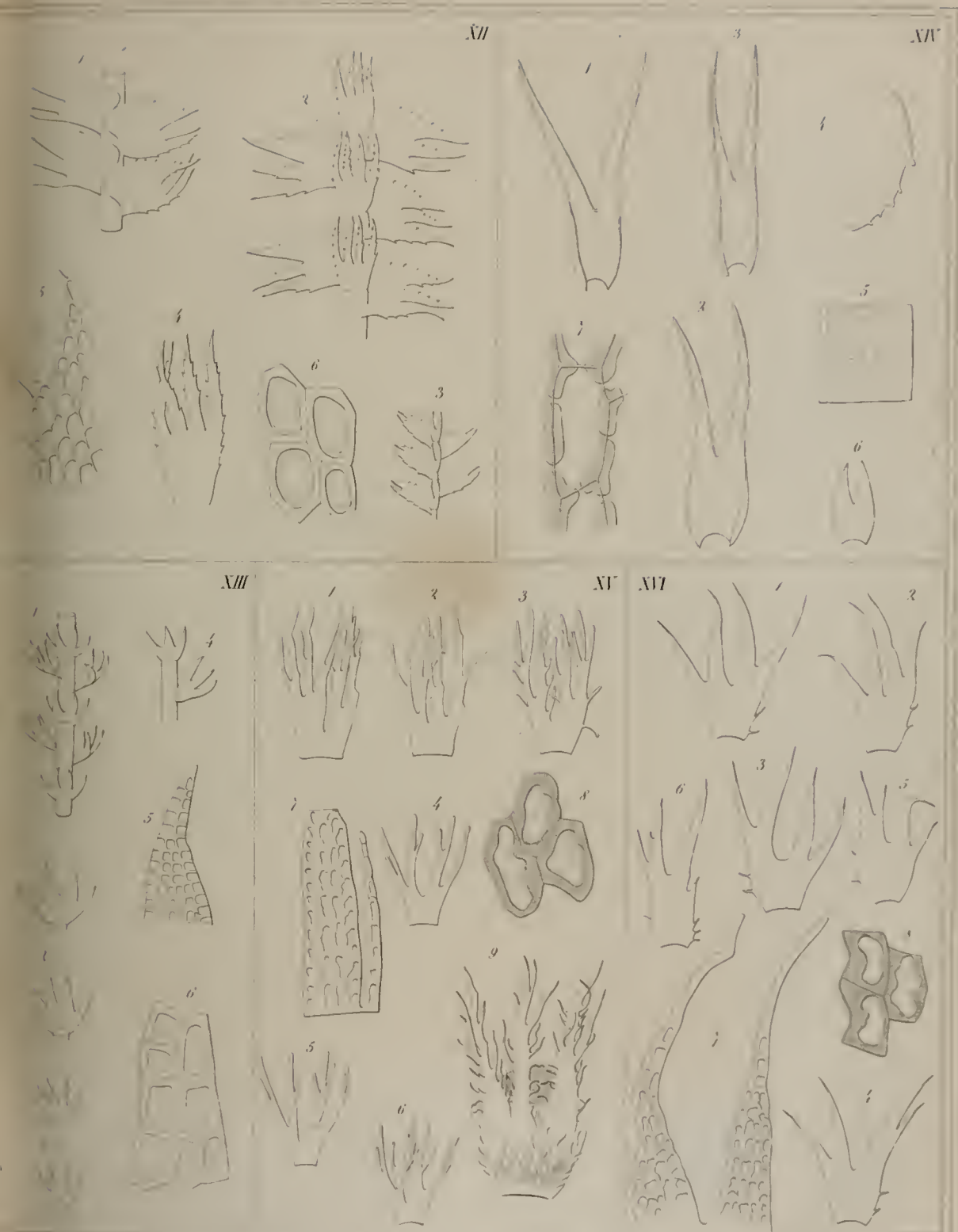
VI. *Jungermannia arcta*

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

VII. *Jungermannia spectabilis* VIII. *Jungermannia obvolutaeformis* IX. *Jungermannia Buccii*

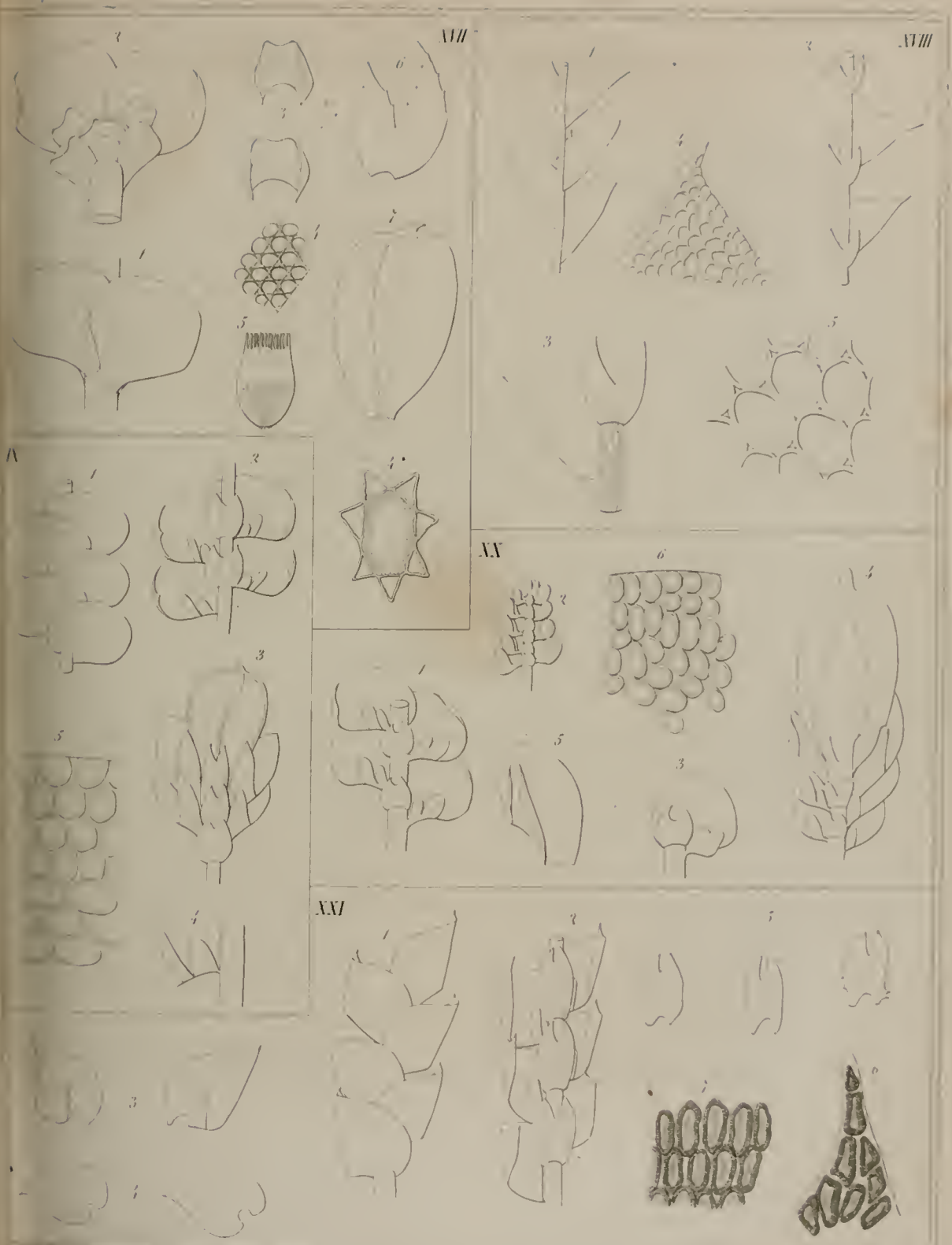
X. *Lophocolea chilensis* XI. *Lophocolea Escalloniana*

NATURAL HISTORY



XII. *Lepidozia retamoides* XIII. *Lepidozia scalpriformis* XIV. *Acolea chilensis*

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



XVII. Madotheca patens XVIII. Lejeunia Oculatiana XIX. Frullania leptophylla

XX. Frullania fertilis XXI. Frullania Oculatiana

NATURAL HISTORY

SERTULUM ORIENTALE

SEU

RECENSIO PLANTARUM IN OLYMPO BITHYNICO, IN AGRO BYZANTINO ET HELLENICO

NONNULLISQUE ALIIS ORIENTIS REGIONIBUS

ANNIS 1849—1850

A

JOSEPHO CLEMENTI

IN GENUENSI COLLEGIO HISTORIAE NATURALIS PROF. COLLECTARUM

Exhib. 11 junii 1854.

PRAEFATIO

Æstate 1849 Anconam oppidum, Austriacis eo ingruentibus, invite salutans, Corcyram insulam primum, deinde Graeciam, Thraciam, nonnullasque Asiae minoris regiones adivi. Ob Patriae conculcatae moerorem, profunde vehementerque animo fractus, studiis gravioribus impar, in hac mea peregrinatione colligendis stirpibus minus notis vel earum regionum rarioribus operam dedi.

Corcyrae litora omnia, ejusdemque montem altiorem *Pandokratora* nuncupatum, pluries investigavi.

Athenis deinde menses septem commoratus, planitiem paene universam, Piraeei et Phalerei litora nec non montes *Parnis*, *Pentilicum* et *Hymettum* septentrionalem meridionalemque perlustravi.

Eodem anno 1850, a vere exeunte in aestatem, Byzantii suburbia, terrasque remotiores Pontum Euxinum pertingentes, oram Bosphori orientalem

vel Bosphorum ultra Scutarianam ditionem ad *Ciamliciae* usque verticem, Katikioy (Chalcedonia) et Phanaraki litora, cunctis fere diebus, rimatus sum.

Quae omnia citra ultraque Bosphorum loca admodum argillosa, platanis aliquot giganteis, quae fontes diligunt et exornant, exceptis, sterilitate et vastatione miserrimis affliguntur!

Augusto mense ejusdem anni Brussam asiaticam petii; et primum hujusce regionis colles occidentales ad pagum *Demerdesch* apricos et calidissimos, accurate investigavi. Deinde Olympum bithynicum conscendi et in regione abietum superiore occidentali-meridionali, et speciatim in tugurio Domini Falcifer, veluti in centro, ex quo loca pervaria singillatim perquirere minus arduum erat, per dies sexdecim commoratus sum.

Juga olympica a N. E. ad S. O. longe progrediuntur et in ipsam Brussam civitatem, sex circiter miliariis a mare dissitam, pedem ad meridiem immittunt. E latere S. E. sublationibus calcareis immanibus, stirpibus pretiosis superbientibus, mons conformatur Ab latere opposito, idest N. O., rupes praeruptae, inferne graniticae, licet igneae, deteguntur; in quarum fragmentis dirutis et in convallibus coacervatis, rarissimae stirpes etiam hospitantur.

Ab excursionibus olympicis Byzantium redii, locaque illa omnia, vertente autumno, rursum perlustravi. Brevi vero rerum orientalium satietate affectus, morum turpitudinem, ignaviam, insciliam, miseriam incolarum fastidiens, laboribus, molestiisque innumeris defatigatus, Genuam, uti ad incolumitatis arcam cito me transtuli.

Opusculi jam tunc promissi editionem ad hanc usque diem protrahere coactus sum, sive ob supellectilis ad definiendas stirpes defectum, sive ob aerumnas exilii; sed botanicos momenta hujusmodi aequo animo aestimaturos, veniamque morae, invito animo protractae, mihi daturos esse confido.

Gratias quamplurimas et toto ex corde ago clarissimis Boissier, De Notaris, Gay, Savi, Spach, Webb, qui consilio et opera sive in plantis denominandis, sive in herbariis celeberrimis perlibenter mihi patefaciendis, me in tenui labore adjuverunt. Eq. Webbius autem multa alia officia, praesertim in *flora olympica exsiccata* divulganda, magnanime mihi praebuit. Prof. Savius in Trifoliorum novis speciebus dignoscendis praestantem operam amicissime contulit. Et Prof. De Notarisius collectionem universam, nec non illustrationes quas offero, summa doctrina ac amicitia excudendas curavit.

Nec brevitatis amore, nec multo minus ingrati animi caussa, ea omnia quae, summa liberalitate, vel perrara in me amicitia, nonnulli humanissimi viri mihi in meo itinere impertiti sunt, obliviscar.

Et primum Doctorem Brailam coreyrensem, qui meam in insula receptionem, tunc, pro eventibus adversis, arduam, summa alacritate explanavit, et deinde epistolas intimas ad iter per Graeciam prosequendum dedit, grato animo recordor. Praeclarae et nobilissimae Familiae Principis Suzi, Metaxa, et Maurocordato meum domicilium atheniense, exquisita urbanitate, sedatum dulceque fecerunt; et Dominus Orphanidius, nunc rei herbariae in illa Universitate Professor, in excursionibus semper mihi dux et comes carissimus fuit. Byzantii Dynastes Teccus, Sardiniae Regni apud Osmanidos Minister praestantissimus benevolenter patrocinio suo mihi adfuit. Eq. Gaspar Fossati Architectus valentissimus et Familia ejus perexcellens animum mihi dederunt, meque domum apud se insigni liberalitate recepernnt, nec non officia permulta in pervariis negotiis mihi praestiterunt. Idem dicam de Severino Leonio medico eximio, qui amicissimus et perbenevolus semper mihi fuit. Brussae Dominus Falghesius me ospitio excepit et iter meum olympicum, plurimis facile reddidit.

De Osmanidis et aliis gentibus diversis Byzantii, sicut in bulga incomposita, commorantibus, quid dicam?? Dignitario Scheff-Ked-Bey, Magno Cancellario Noridyn-Bey, quorum benevolentia et animi liberalitas non dubiae fuere, honorem et grati animi significationem tribuo. Indigam populi partem etiam commemoro, quae, quamvis ignara et desidiosa, integra tamen et bona servatur.

Addo: hoc in meo Sertulo de plantis etiam haud novis adnotatiunculis magis abundare quam deficere praetuli; ex eo quod in re herbaria hodierna, ob diagnosium insufficientiam, absque speciminum autenticorum comparatione, nulla fere stirps certe denominari potest! Idcirco botanicos obsecro, non solum ut meas analyses benigno animo accipere velint; sed etiam ut et ipsi magis magisque in speciebus novis describendis accuratiores fieri studeant.

Quarumdam specierum nomina in herbario exsiccato evulgata rejicere coactus sum, eaque in hoc opusculo brevitatis gratia omissa sunt; unicuique, caeterum, obvium erit immutationes quae hic sunt dignoscere, synonimaque exacte conferre.

RANUNCULACEAE.

ANEMONE APENNINA L. Sp. 762.

Hab. Ad radices montis Pentilici atheniensis legi vere 1850.

Obs. A stirpe italica tantum laciniis foliorum oblongo-obtusiusculis subintegerrimis, nec lanceolatis inciso-dentatis, recedit.

ANEMONE HORTENSIS L. Sp. 761.

Hab. Crescit ad margines agrorum planitiei atheniensis et floret vere.

Obs. Segmenta foliorum valde indibunda observavi.

ANEMONE CORONARIA L. Sp. 760.

Hab. Iisdem in locis cum praecedente legi vere.

Obs. Segmenta foliorum rarius dentato-mucronata plerumque obtusiuscula sunt.

Prope Piraeum ath. *A. coronariae* varietatem performosam, floribus maximis intense coccineis, legi etiam primo vere.

CLEMATIS FLAMMULA L.

Hab. Atticae, ad Kiephyssum flumen.

CERATOCEPHALUS FALCATUS PERS.

Hab. Abunde crescit in arvis circa Athenas, ubi legi vere et aestate incipiente.

Obs. Magnitudine varius, pedunculos etiam fructificantes interdum abbreviatos, in anthesi niveo-lanatos, fert.

FICARIA CALTHAEFOLIA RCHB.

Hab. Atticae; locis humentibus.

FICARIA RANUNCULOIDES MOENCH.

Hab. In herbidis byzantinis.

RANUNCULUS CAMOZZIANUS mihi.

R. caule unifloro erecto, subtortuoso, leviter striato piloso, basi fibris erectis vestito; foliis radicalibus pinnatisectis, segmentis cuneato-

incisis, laciniis lanceolato-linearibus integerrimis dentatisve; caulinis duobus tribus sensim sessilibus lineari-incisis: sepalis laxiusculis patentibus pilosis, apicem versus nudis; toro piloso; petalis amplis luteo-croceis, obovato-cuneatis, integerrimis; carpellis nudis semiovato-rotundatis, stylis subcircinnato-uncinatis.

R. dissectus Auch.! ad specimina Aucheriana in herb. Mus. Paris. non M. B. — *R. dissectus* β. *glabrescens* Boiss.! ad specimina Pinardi in herb. Webb.

Hab. Legi in loco humente in regione alpina Olympi bith., ubi cum *Stellaria cerastoide* promiscue crescit et floret Augusto mense.

Ranunculus aquatilis Sp. *varietas*.

Hab. Legi semel in aquis stagnantibus prope Byzantium, aestate.

Obs. Folia emersa vix 3-loba, lobis vix et irregulariter lobulatis; immersa saepius trichotoma.

Ranunculus ophioglossifolius Vill.

Hab. Legi cum praecedenti eodem tempore.

Adonis aestivalis L.

Hab. In arvis Atticae.

Nigella divaricata Beaupré.

Hab. Una vice mihi occurrit in collibus *Demerdesch* ditionis Brussianae. Solo glareoso et calcareo delectatur. Floret Julio et Augusto.

Delphinium junceum DC.

Hab. Legi aestate in insula Corcyra, ubi laete viget et ex coespitibus compactis ramos numerosissimos vimineos edit.

Delphinium peregrinum All.

Hab. Legi in collibus Brussianis aestate decedente. A stirpe Dalmatica haud diversum.

BERBERIDEAE.

Leontice Leontopetalum W.

Hab. Frequenter occurrit primo vere in arvis circa Athenas.

Berberis cretica L.

Hab. In Monte Parnis.

PAPAVERACEAE.

Papaver pilosum Sibth. et Sm. DC. Syst. 2. p. 80.

Hab. In Olympo bith. una tantum vice reperi iisdem in locis ubi primum id detexit cl. Sibthorp, seriusque Aucherus. Augusto vertente.

Obs. Stirps venusta, in locis apricis robusta, villoso-argentea, in umbrosis gracillima calvescens: variat insuper petalis aurantiacis, stigmate 6-8-radiato, nec semper 6-*radiato*, pilis rigidis fere strigosis, nec *simpliciter pilosum*.

Papaver Rhoeas L.

Hab. In arvis byzantinis sterilibus tota aestate.

Obs. Hujusce specici varietas tantum perpusilla, etiam statura sesquipollicaris mihi circa Byzantium occurrit. Ei sunt folia varie incisa; laciniis seta longiuscula praeditis, flores pro planta grandiusculi, pedunculi filiformes.

Hypecoum litorale Wulf.

Hab. In sabuletis prope Phalereum athen. legi primo vere.

Obs. Plerumque perpusillum et arena mobili suffocatum.

Hypecoum grandiflorum L.

Hab. In arvis circa Athenas ubique frequentissimum occurrit primo vere.

FUMARIACEAE.

Fumaria macrocarpa Boiss.!

Hab. In cultis collinis humilioribus ad radices montis *Cabetis* athen. primissimo vere cum sequenti specie promiscue crescit et floret.

Obs. A *F. micrantha* non solum fructibus plus minusve grandioribus, sed forma foliorum, glaucedine, facieque propria apte distinguitur.

Fumaria micrantha Lagasc.

Hab. Cum praecedenti ut diximus.

Obs. Variat subinde pusilla, simplex, subindeque elatior et valde ramosa, sed semper floribus minimis et pinnis foliorum minutissime sectis praedita.

CRUCIFERAE.

Matthiola montana Boiss.!

Hab. Legi Augusto in declivitatibus alpinis Olympi bith., orientem versus.

Obs. Frutienlus ramis tortuosis, decumbentibus. Flores petalis linearioblongis, apice contortis, sordide purpurascentibus ornantur. Siliquae maturae subglabratae, compressae, stigmate trilobo sessili terminatae, ultra decimetrum longae, ramos longitudine aequantes vel superantes, juniores ut folia nivco-lanatae. Cum speciminibus herb. Mus. Paris. ab Aucherio in Cappadocia lectis sufficienter quadrat, sed petala utriusque comparare non contingit.

Cheiranthus Jacomelli mihi.

Hab. Legi in pratis saxosis planitiei alpinae Olympi bith. latere N. E. Augusto mense, fructu plene maturo.

Radix perennis, longissima, descendens. Rami, ortu hypogeo, plures, radiciformes, repentes, parte exserta foliorum petiolis arefactis duris vestiti; deinde confertim adsurgentes erecti, simplices, sublignosi, angulosostriati, pilis bipartitis adpressis haud crebris ad flores usque scabridi.

Folia inferiora fasciculato-congesta, vix carnosula, angustissime et obverse lanceolato-linearia, vel linearia anguste spathulata in petiolum longum basi dilatatum carnosulum attenuata, obtusiuscula, pilis bipartitis arcte adpressis scabriuscula; superiora sensim rariora lineari-conformia subtrinervato-carinata. Flores .....? Pedunculi fructus solitarii, m. 0,01 remoti, sparsi ebracteati, erecto-patentes, m. 0,006 ad m. 0,008 longi. Torus conspicuus, cicatrice exteriori luteola. Siliqua matura m. 0,07 ad m. 0,08 longa exacte complanata m. 0,003 circiter lata, utrinque sensim angustata, pilis ut caules et folia adpressis subscabrida; valvis nervo prominente diremtis, inferne in dissepimenti conjunctione parce callosis. Stylus persistens m. 0,005-0,006 longit. aequans, inferne more siliquae pilosulus plus minusve purpurascens, superne lutescens; stigmatis lobi parvi erecto vel complanato-patentes. Semina breviter alata! Cotyledones accumbentes!

Obs. A Ch. Cheiri toto coelo distinctus; nulli ex specimin̄ibus orientalibus in herb. Mus. Paris. et Webbii a me collatis similis.

Arabis hirsuta L.

Arabis Thaliana L.

Hab. Ad Bosphorum.

Arabis drabaeformis Boiss.! non *A. Boissieri* Griseb.

Hab. Declivitatibus saxosis nivi perpetuae proximis in Olympo bith. delectatur. Floret Aug. mens.

Obs. Surculi sunt abbreviati erectiusculi, nec elongati repentes ut in A. Boissieri *Fl. rumel.*; folia ovata spathulata, nec elliptica; corolla calyce triplo, nec duplo longior.

Stirps stolonibus multiplicibus abbreviatis remotis, caulibus filiformibus nudis, rigidis, lucentibus facie singulari et distincta.

Arabis alpina olympica Clem. — *A. Thyrsoidea* Sibth.

Hab. In regione alpina Olympi bith. legi Augusto.

Obs. Habitu, foliorum margine arguto denticulatorum forma, indumento *Arabidi alpinae* persimilis; differt tamen statura humiliore, valvulis fructus nervo prominente exaratis, seminibus, in fructu saltem immaturo, vix membranacco-marginatis.

CARDAMINE HIRSUTA L.

Hab. Atticae et Byzantii.

MALCOLMIA INCRASSATA DC.

Hab. Ad litora maris prope Piraeum ath. vere floret.

Obs. Folia inferiora haud mucronata; pili simplices non stellati. Tota planta in locis sterilibus et siccis contracta, rigida; et contra in locis umbrosis vel humentibus elatior. foliis, caulibus elongatis, floribusque gracillimis.

SISYMBRIUM ORIENTALE L.

Hab. Ad muros in ipsa urbe Byzantii tota aestate occurrit et floret.

SISYMBRIUM POLYCERATIUM L.

Hab. Crescit ad vias in ipsa Scutari asiatica et floret tota aestate.

RAPHANUS LANDRA MORETT.

Hab. Circa Byzantium.

BRASSICA ERUCA L.

Hab. Circa Athenas. Planta 2-3 pollicaris, caule simplici.

ERYSIMUM RUPESTRE DC. Syst. 2. 494. — *Cheiranthus olympicus* SIBTH. ex DC.

Hab. In Olympi bith. pratis alpinis editioribus N. E. prospicientibus mense Augusto legi.

Obs. Planta mea eadem ac homonyma in herbariis celeberr. WEBBII asservata; sed foliis saepius runcinato-dentatis, potius quam denticulatis, petalorum lamina ungue multo breviore, a descriptionibus CANDOLLEI et GRISEBACHII (Fl. rum. 1. p. 261.) nonnihil recedit.

ERYSIMUM CUSPIDATUM DC.

Hab. Specimina bipedalia et ultra inter saepes prope Brussam fructificantia legi Augusto mense.

AURINIA ORIENTALIS GRISEB.

Hab. In monte Cabeto ath.

Alyssum tortuosum W. *K. pumilum* Clem.

Hab. In saxosis editioribus Olympi bith. legi Augusto mense.

Obs. Differt a specie caulibus a basi ramosis, tortuosis, pollicem longitudine vix excedentibus, racemis simplicibus, filamenta omnia appendiculata!

Species forte distincta, sed deficientibus siliculis maturis plura addere nequeo.

Alyssum erosulum Genn. et Pestal. ined.

A. pube stellata incanum; caulibus adscendentibus lignoso-suffruticosis; ramis simplicibus erectis; sterilium abbreviatorum foliis densis spathulatis vel obverse lanceolato-ellipticis basi angustatis, fertilium angustioribus; racemis floriferis brevibus, fructiferis demum elongatis; petalis sepalis varie ovatis deciduisque sesquilongioribus, dorso pube stellata serius subevanescenti incanis, margine crenulato-dentatis; filamentis irregulariter alato-unidentatis vel subbidentatis; siliculis junioribus rotundatis pedicellis stylisque superne glabrescentibus brevioribus, maturis rotundato-oblongis emarginatis convexo-planis illos subaequantibus; seminibus minutis, exalatis, nigris.

Hab. Ipse legi in Olympi bithynici regione alpina humiliori. Pestalozza in Asiae Minoris *Adalia* prope *Berebet-Day*.

Obs. A. Wulfenianum Bernh. differt ab *erosulo*, cui valde affine, praesertim siliculis glabratis stylo duplo brevioribus, filamentis ala bidentata appendiculatis, seminibus magnis subexalatis (Griseb. Fl. rum. 1. 276.). *A. Wulfenianum* β. *suffruticosum* Boiss. l. c. differt caulibus repentibus, filamentis majoribus edentatis, aliisque speciei notis supra comparatis. Tomentum stellatum in *A. erosulo* omnes partes, staminibus stylorumque superiori parte exceptis, obtegit. Semina in unoquoque loculo duo; e latere valvae convexae maturescentia, e latere opposito sterilia. Specimina Pestalotiana magis quam Olympica adnotantur lignosa, contracta, et incana.

Neeslia paniculata Desv.

Hab. Atticae.

Clypeola Jonthlaspi L.

Hab. In agro atheniensi legi aestate.

Clypeola glabra Boiss. *Ann. Scient. naturell. XVII. p.* 173. — Walpers *Repertor.* I. *p.* 146.

Hab. In iisdem locis ac praecedens nec rara.

Obs. Siliculae emarginatae, in centro elevatae, perfectae glabrae, duo millimetra cum dimidio diametro vix excedentia. Herbula pusilla, a basi ramosa, vix bipollicaris, ramis filiformibus varie flexuoso-ascendentibus; tota in caulibus, foliis, calycibusque pilis stellatis adpressis confertis vestita.

Bunias Erucago L.

Hab. Atticae.

Draba muralis W.

Hab. Ad aggeres prope Bosphorum vulgatissima primo vere.

Obs. Tota planta pilis subtrifido-stellatis scabra; siliculis lineari-ellipticis pedunculisque iis longioribus glabris; foliis sessilibus cordatis, nec amplexicaulibus ut in Pers. Synops.

Draba verna L.

Hab. In Attica et ad Bosphorum vulgatissima.

Draba olympica Sibth.

Hab. Legi in saxosis calcareis regionis alpinae Olympi bith. ubi copiose crescit et floret. Julio, Augusto.

Obs. Planta nostra cum speciminibus herbar. Webbii, a Boissiero in Olympo bith. lectis, ad unguem convenit; sed a diagnosi Flor. rumel. divergit partibus omnibus piloso-scabris, nec *scapis pube molle velutinis, siliculis pubescentibus.*

Teesdalia Lepidium R. Br.

Hab. Reperi in collibus constantinopolitanis ubi et Aucher legit secundum Boissier. Floret primissimo vere.

Thlaspi campestre L.

Hab. Ad aggeres circa Byzantium.

Thlaspi perfoliatum L.

Thlaspi Bursa L.

Hab. Atticae et Byzantii.

Iberis nana All. !

Hab. Ad nives deliquescentes in declivitatibus Olympi bith., substrato calcareo; floret Augusto mense.

Obs. Folia in nostra, quae cum speciminibus jampridem a Boissierio in Olympo ipso lectis, aliisque in herbariis cl. Webbii extantibus omnino convenit, integerrima, inferiora earundem spathulata, superiora obverse oblonga ciliolata observantur.

Lepidium spinosum L.

Hab. Legi Julio mense in pascuis collinis constantinopolitanis.

Obs. Planta antheseos tempore gracillima, fructifera autem robusta, alienae prorsus faciei. Siliculae perfectae oblongae ad basim callosobigibbae, apice ex alis oblongis obtusiusculis, sinu divergenti distinctis, emarginatae.

Huic affine *Lep. cornutum* a Buxbaumi prope S. Stephanum ad Byzantium lectum, ex Fl. rumel. 1. p. 284., mihi haud visum.

Seneriera Coronopus Pers.

Hab. In collibus byzantinis.

Eunomia chlorifolia DC. !

Hab. In Olympi bith. calcareis alpinis, ubi et Sibthorpius, florentem et fructificantem reperi Augusto mense.

Obs. Cum speciminibus autenticis herb. Webbiani mea comparata exacte quadrant.

Sepala oblonga, obtusa, atropurpurescentia; petala obovata, breviter unguiculata calyce plus quam duplo longiora, albo-carnea, venis plus minusve sature purpureis exarata.

Hubrietia deltoidea DC.

Obs. Diagnosis hujusce speciei, ex speciminibus in Olympi bithynici valle Gögderè provenientibus a cl. Grisebachio (Fl. rum. 2. p. 208.) conscripta, in plantam nostram in regione ejusdem montis sublimiore

collectam exacte non quadrat; idcirco ad pleniorem speciei quammaxime versatilis historiam pauca quae ipsemet observavi silentio praeterire nequeo.

Folia sunt spathulata vel obovato-elliptica, obtusiuscula, in petiolum brevem attenuata, denticulo uno vel paucis obsolete notata, saepius integra, nec *spathulata acuta* 3-5-*dentata* (Fl. rumel.). Pedioli longitudine varia, nec *calyces subaequantes*. Staminum longiorum ala uno latere infra apicem filamenti abrupte truncata altero sensim desinens, breviorum dens lineari-lanceolatus obtusiusculus erectus, nec *staminum longiorum ala* (totaliter?) *abrupte truncata*, *breviorum dens acuminatus*. Siliculae juniores stylo breviores, maturae illo longiores, nec *semper parum breviores*. Semina oblique ovata, nec tantum *ovalia*, cui striato-rugulosa secundum nostra specimina addendum.

Tota planta scabriuscula, pilis plus minus stellato-ramosis, in siliculis densis, reliquis partibus rarioribus.

Hutchinsia procumbens DC.

Hab. Abunde provenit in arvis humentibus prope Phalereum atheniense, vere.

In iisdem locis occurrit subsimplex, erecta, pusilla, vel palmaris et ultra, ramosissima, ramis implexis.

Carrichtera Vellae DC.

Hab. Hanc pulcherrimam speciem prope Piraeum atheniense in ruderatis hortorum uno loco legi. Floret Martio mense.

CISTINEAE.

Cistus laurifolius L.

Hab. In Olympi bith. regione fagi haud frequens reperitur.

Cistus villosus L.

Hab. In declivitatibus apricis ejusdem montis crescit. Legi quoque in insula Corcyra ubi folia magis rotundata, spissiora, magisque reticulato-nervosa observantur.

Cistus salvifolius microphyllus Clem.

Hab. Legi in atheniensi Monte-Pentilico. Ramosissimus, foliis minutissimis subglabratis.

Helianthemum pilosum Benth.

Hab. In Olympo.

FRANKENIACEAE.

Frankenia hirsuta W.

Hab. Ad litora maris prope Kalamaki ultra isthmum Corinthi copiose crescit. Rami numerosissimi, radiciformes, sub solo intricati. Legi aestate.

VIOLARIEAE.

Viola gracilis Sibth. et Sm.

Hab. Legi in Olympo bith. Augusto mense infra saxa nives perpetuas ambientia.

Obs. Planta pusilla, floribus maximis luteis ornata.

Viola tricolor olympica Griseb. Fl. rum. 1. p. 237.

Hab. In sylvulis abietinis inferioribus Olympi bith. Floret Augusto mense.

Viola sylvestris Lamck.

Hab. Legi vere in agro byzantino.

RESEDACEAE.

Reseda lutea L.

Hab. Prope Phanaraki ultra Scutarim.

DROSERACEAE.

Parnassia palustris L. var. *nudicaulis* Clem.

Hab. Crescit rara in pratis alpinis humidioribus Olympi bith. Legi Augusto.

Obs. Caules aphyllos et staturam minorem quam species praebet.

SILENEAE.

GYPSOPHILA OLYMPICA Boiss. ! Diagn. 8. 55.

Hab. Legi Augusto in cacuminibus alpinis inferioribus Olympi bith.

Obs. Calycis 5-angularis squamuloso-furfuracei dentes rubentes, subacuminati, margine scariosi, tubo membranaceo duplo breviores. Petala purpureo-coerulea, obverse lineari-lanceolata, antice rotundata, lamina in unguem gradatim attenuata. Styli duo. Stamina decem, una cum petalis carpophori apice inserta. Ovarium oblongum obtusum. Reliqua ut in BOISSIERI Diagn. l. c.

TUNICA OLYMPICA Boiss. !

Hab. Legi una vice in declivitatibus argilloso-calcareis ab aquis exaratis regionis subalpinae Olympi bith. Floret Augusto.

Obs. Planta gracilis uni raro bispithamea, floribus paniculatis solitariis, calycibus exacte obconicis, nervaturis quinque validis praeditis. Gipsophilarum faciem omnino ostendit.

TUNICA ORFANIDESIANA mihi.

T. caulibus basi lignescentibus, ramisque primariis irregularibus, nodosis, tortuosis, implexis; ramis annotinis simplicibus alterneve superne ramosis, rigidiusculis, obtuse quadrangulis, glabris; foliis inferioribus approximatis, subfasciculatis, carnosulis, margine serrulato aculeolatis, obtusiusculis, ramorum annotinorum connatis abbreviatis fere squamaeformibus, in sicco, nervo excepto, omnino scariosis, plus minusve acuminato-mucronatis; florum fasciculis terminalibus solitariis vel subracemoso-paniculatis; bracteis ovatis, interioribus magis magisque latis, omnibus nervo valido carinato-mucronatis, reliqua parte scariosis; pediolis obconico-incrassatis, sesquimillimetrum longis; calycibus 5-fidis scariosis, laciniis obtusiusculis dorso 3-nerviis; petalis obverse lineari-lanceolatis stamina aequantibus subexsertis, lamina in unguem sensim attenuata; capsulis oblongis inclusis, valvis maturitate superne truncatis; seminibus orbiculato-membranaceis.

Hab. Ad rupium calcarium fissuras in summo cacumine Montis Parnis atheniensis, comite cl. Profess. ORPHANIDES, novembr. 1849, cum fructibus perfecte maturis legi.

Folia sesquimillim. lata, 12-16. millim. longitudine metientia. Fasciculi florum capituliformes obconici, bracteis fructu maturescente straminco-pallescentibus. Tota planta spithamam vix altitudine superat. Folia semper carnosula et mollia more salsolarum servantur. Caules autem arefactione fragilissimi fiunt. Petala persistentia ex sicco purpurascentia et concolora judicanda.

Obs. Tunicae dianthoidi F. et M. affinis. Ab ea differt praecipue capitulis majoribus; floribus numerosioribus compositis, bracteis latioribus, minus tenuiter scariosis; caulibus robustioribus; foliis carnosulis latioribus, margine serrulato-aculeolatis.

Dianthus hungaricus Pers. *ex Fl. rumel.*

Hab. Crescit haud frequens in pascuis alpinis Olympi bith. et floret Augusto.

Obs. Planta gracilis; petalorum lamina maxima, magis quam in D. plumario profundissime crispato-lacera, arefactione contracta.

Dianthus pallens Sibth.

D. perennis, glaucescens; caulibus caespitosis, adscendentibus erectisve, glabris, simplicibus subindeve alterne dichotomis, ramisque unifloris; foliis nervosis, margine cartilagineo denticulato-scabriusculis, lincaribus, acutis, flaccidis, internodio brevioribus, vaginis latitudinem folii aequantibus, radicalibus latiusculis; bracteis 4-8., interioribus obovatis ex apice obtusissimo breviter acuminatis, margine scariosis, exterioribus angustioribus, calyce profunde 5-dentato, tenuiter striato, elongato, a basi in anthesi sensim angustato, quadruplo bervioribus; petalorum lamina cuneata! profunde obtuseque dentata excisave, glabra, intus alba, extus sordide purpureo-virente; seminibus badiis depressis, subdiscoideo-peltatis, vertice umbilicatis, undulatis.

Dianthus leptophyllus Willd. Enum. 1. p. 468? — Griseb. Fl. rumel. 1. p. 191.

Dianthus pallens Urville. Enum. 302.

Dianthus pomeridianus Friv. ex Griseb.

Hab. Species passim obvia in insula Corcyra, in Graecia, agro constantinopolitano atque in Asiae minoris regionibus occidentali-borealibus, ad vias collinas, in aggeribus apricis etc. Floret aestate.

Flores aperiuntur vespere, clauduntur mane hora perquam mutabili.

Petala in alternatione somni et vigiliae plus minusve convoluta observantur.

Obs. Cl. Grisebach (l. c.) *Dianthum pallentem* Sm. *et* Urvillei, *D. pomeridianum* Frivaldski uno nomine *D. leptopetali* Willd complectitur. De identitate *D. leptopetali*, qui a *pomeridiano* bracteis ovatis acutis brevissimis, petalis lanceolatis, foliis subulatis prae aliis distingueretur, deficientibus mihi speciminibus speciei Willdenowianae cum cl. Florae rumelicae Auctore haud certabo; sed cum eo *D. pallentem* et *pomeridianum* unam eandemque constituere speciem minus dubito, ejusdemque sententiam, observationibus a memetipso in itinere meo ab insula Corcyra per agrum hellenicum et rumelicum et in Asiam minorem circa hanc plantam peractis confirmare gaudeo.

Dianthus pallens late per orientem patens, sistit speciem quammaxime mutabilem, tum hora qua flores vigilant, a vespere nempe ad diluculum varia, cum statura a spithama ad pedem et ultra, vel caulibus simplicibus ramosisve, vel forma et numero bractearum in iisdem caespitibus varia, vel petalis plus minusve dentatis, vel demum foliorum latitudine.

Ipse immo, lusibus hujusce speciei perspectis, quae tamen moribus et incrore, ut ita dicam, facici facile a congeneribus dignoscitur, nonnullas alias Dianthorum orientalium species a nuperioribus descriptas huic subscribendas esse autumno.

Dianthus pubescens Sm.

Hab. Legi vere decedente in cultis collinis prope Bosphorum.

Obs. Dianthus pubescens fasciculatus Griseb. Fl. rumel. 1. p. 190, in Macedonia australi provenions, differt a specie, a Boissierio etiam prope Byzantium observata: foliis constanter 3-nerviis *nec* 3-5-*nerviis*, vaginis folii latitudinem 2-3-plove superantibus, calyce glabro et superne scabriusculo, bracteis calycem dimidium aequantibus.

Dianthus deltoides Macedoniae incola differt a nostro foliis obtusiusculis nec acutis, bracteis breviter nec longe aristatis tubo duplo nec quadruplo brevioribus, lamina ovato-oblonga nec cuneato-rombea.

Dianthus leucophaeus, macropetalon Clem. Pl. olymp. exs.

D. caulibus caespitosis repentibus; ramis unifloris adscendentibus: foliis 3 multinerviis abbreviatis, rigidis subpungentibus, inferioribus subim-

bricatis, margine scabrinsculis, caulinis glabris, vagina brevi; bracteis quatuor, interioribus ovatis, exterioribus angustioribus, calycis striati apice constricti tertiam partem aequantibus; petalorum lamina irregulariter dentata, extus viridi-purpurascenti.

Hab. In Olympi bith. declivitatibus alpinis legi Augusto mense.

Obs. Dianthus leucophaeus Sm. (Griseb. Fl. rumel. 1. p. 193.) ex speciminibus olympicis, in ditissimo herbario celeb. Webbii observatis, recedit a varietate nostra bracteis omnibus late ovatis, calycem dimidium aequantibus, petalis minoribus eorundemque lamina 3-crenata.

Dianthus velutinus Guss.

β. *contractus* Clem.: compacte caespitosus, caulibus dimorphis, abbreviatis, brevissimisque monocephalis, vel elongatis polycephalis.

Hab. Utraque varietas α. β. primo vere et aestate in cultis collinis prope Byzantium crescit.

Varietas α. pro aetate se praebet caulibus indivisis monocephalis, vel ramosis polycephalis.

Dianthus Cibrarius mihi.

D. caulibus basi ramoso-caespitosis, adscendentibus, quadrangulis, plerumque laevibus; foliis inferioribus congestis, linearibus, rigidis, pungentibus, multinerviis; caulinis late linearibus, internodiis multo brevioribus; vaginis dimidiam longitudinem foliorum subaequantibus; cyma fasciculata 4-10-flora, bracteis obovatis ex apice rotundato mucronato-setaceis, scariosis, nervosis, superne validioribus, plus minusve sanguineo-purpurascentibus exaratis, dimidium calycem tegentibus, mucrone auctis illum subaequantibus; calycibus glabris, profunde 5-dentatis, dentibus lanceolato-linearibus, acutis, conspicue nervosis, ciliato-puberulis tuboque superne atro-sanguineis; petalorum lamina cuneata, antice dentata, purpurea, basi pallidiori, intus pilosiuscula unguibus triplo breviore.

Hab. Copiose occurrit in convalle quadam alpina Olympi bith. latere S. E. Floret Augusto mense.

Obs. Fasciculatorum sectionis plurimis speciebus in herb. cl. Webbii et Mus. Paris. a nobis perpensis Dianth. noster affinis; sed nulli exacte convenit.

Foliis abbreviatis, rigidis, pungentibus, stolonum approximatis fortiterque nervosis praecipue distinguendum est. Pulcherrima stirps!

Silene olympica Boiss.! Diagn. 1. p. 24. Griseb. Fl. rumel. 2. p. 502.

Hab. Copiose provenit in declivitatibus lapidosis alpinis Olympi bith. a nivibus perpetuis non longe in latere N. O.

Rhizoma ligneum, tortuosum, multiceps; ramis contractis, elongatisve stoloniformibus gemmas eodem tempore floriferas homotinasque edentibus. Folia subcarnosula, in petiolum margine membranaceum attenuata, eximie connata, toto margine denticulis ciliiformibus, inferne recurvis instructa, caeterum glabra, inferiora conferta linearia, vel anguste oblanceolato-linearia, subinde subfalcato-secunda, ramorum floriferorum per paria remota, angustiora, lineari-subulata. Rami floriferi plerumque indivisi, stricti vix spithamei, thyrso paucifloro conferto racemiformi terminati. Bracteae ut folia connata e basi dilatata attenuatae, ovato lanceolatove subulatae, margine membranaceae, ciliatae, disco nervis rubescentibus exaratae. Pedunculi 2-3-flori, bracteas aequantes, pedicellorum intermedio nudo, lateralibus 2-bracteatis. Calyx obconicus, lucido-rubescens, membranaceus, 10-nervius, nervis 5 alternis tenuioribus, limb. 5-dentatus, dentibus triangulari-ovatis, obtusis, margine membranaceis, ciliolatis. Petalorum unguis 3-nervius, ciliatus, calycem subaequans, lamina 2-fida, luteola, viscida. Stamina exserta, filamenta stylique inferne villosa. Capsula maturitate breviter exserta, ovata, nigro-punctata (?). Semina ambitu fere toto canaliculata, subundulata, rugosaque, fusco-cinnamomea. Species eximia!

Planta viridis supra medium viscosissima.

Silene falcata Sm.

Hab. Copiosissime provenit in declivitatibus calcareis meridionalibus regionis alpinae Olympi bith. et floret Augusto.

Obs. In nostris speciminibus omnes plantae partes piloso-glandulosae sunt. Dentes calycini potius lanceolati et margine scarioso ovato-obtusati, quam *triangulares* denominandi. Petala facie albescentia extus livida, nec *concolora ochroleuca*. Tandem stamina omnia, nec *quinque* tantum exserta.

Silene inflata Sm.

Hab. In Olympi bith. reg. alpina. Tota planta laevis plus minusve glaucescens.

Silene pendelica Boiss. !

Hab. Una vice mihi occurrit in monte Pentilico atheniensi, primo vere.

Stirps parvula et elegans.

Silene sericea All.

Hab. Cum praecedente.

Silene spinescens Sm.

Hab. Legi in monte Hymetto atheniensi.

Silene dichotoma Ehrh.

Silene quinquevulnera L.

Hab. In collinis agri constantinopolitani.

Velezia rigida L.

Hab. In declivitatibus collinis sterilioribus prope Byzantium haud rara occurrit aestate.

ALSINEAE.

Spergula pentandra L.

Hab. Abunde crescit in collibus prope Byzantium vere et aestate.

Spergularia pentagonia DC.

Hab. In cultis et in sterilibus byzantinis frequenter crescit magnitudine admodum varia. Floret tota aestate.

Alsine juniperina Fenzl. ex Ledeb. Fl. ross. 1. 346. — *Arenaria juniperina* L. — *Alsine nodosa* Vis. Ill. pl. Graec. et As. min. Atti del Congresso di Torino p. 180. — *Arenaria nodosa* Bory et Chaub. Exped. Mor. Botan. p. 125.

Hab. In declivitatibus orientalibus regionis alpinae Olympi bith. legi Augusto mense.

Obs. Ab *Aren. verna* Bartl. differt nervis sepalorum adproximatis, nec duo laterales a medio remotis; petalis ovatis nec lanceolatis; capsulis

calyce sesqui vel duplo longioribus, nec breviter exsertis; seminibus vix rugulosis, nec muricatis vel rugosis.

Alsinis juniperinae specimina in Olympo bith. a me lecta characteres sequentes ostendunt, quos hic praebere lubet ut a speciebus superius memoratis plantae nostrae diversitas clarius innotescat.

A. caule sulfrutescente, abbreviato, ramoso, caespitoso, ramis numerosissimis adscendentibus; floriferis elongatis, sterilibus internodiis abbreviatis robustioribus, foliis pedunculisque plus minusve glanduloso-pilosis; foliis rigidis acuminatis, subulatis, falcatis, supra canaliculatis, subtus trinerviis (licet bisulcatis), ad genicula nodosa laxe connatis; cymis plerisque bis trifidis fastigiato-corymbosis; pedunculis lateralibus trifloris, pediolis piloso-glandulosis calyce longioribus, intermedio terminali unifloro; calycibus ovatis; sepalis conniventibus ovato-lanceolatis, acuminato-cuspidatis, trinerviis, margine cartilagineis; petalis albis calyce tertia parte duplove longioribus, ovatis, obtusis, ungue brevi; capsulis 3-valvibus calycem sesqui vel duplo superantibus, valvulis demum apice liberis obtusis; seminibus (more selenidum) foveolato-papillosis vel rugosis, margine dorsali dilatato subbialato.

Alsine erythrocephala Boiss.! Diagn. 8. p. 98.

Hab. Cum sequenti specie in Olympi bith. regione alpina promiscue crescit et floret.

Obs. Ludit statura interdum pygmaea interdum elatiuscula. Quae ipse legi specimina a Boisseriana quidquam divergunt: sepalis 3-nervato-carinatis reapse bisulcatis, sulcisque intense viridibus, reliqua parte ex albo purpurascentibus; foliis brevibus, robuste ciliatis; caulibus pilis brevissimis glanduloso-viscidulis plus minusve adspersis.

Alsine hirsuta Fenzl ex Ledeb. Fl. ross. 1. 346.

Hab. Augusto mense cum praecedente floret loco citato.

Obs. Gracillima elongata; sepalis magis quam in praecedenti lanceolatis, regulariter multinerviis, concoloribus, caulibusque superne hirsutis; hirsutie minuta vix glandulifera; ciliis foliorum rarissimis vel nullis.

Alsine tenuifolia β. viscosa Koch Syn. p. 125.

γ. *byzantina Clementi:* pusilla; valde caespitosa, contracta et parce ramosa; foliis basi membranaceo-dilatatis, connatis; cymis contractis,

congesto-corymbosis, pediolis vix calycem aequantibus; sepalis distincte trinerviis, piloso-glandulosis; capsulis exsertis.

Hab. In proximitatibus Byzantii ultra *il Gran Campo* legi; quo loco crescit etiam var. β. statura multo proceriore, caulibus gracilibus et magis ramosis; pedunculis divaricatis solitariis, aut tantum in dichotomiae axilla duobus vel tribus. Insignis!

Arenaria rotundifolia M. B. Ledeb. Fl. ross. 1. 369. — Fl. rumel. 1. p. 203.

Hab. In regione abietis Olympi bithynici ad rivulos. Augusto.

Obs. Bracteae oblongae vel ellipticae parvae, bracteolae lineares, subulatae, canaliculatae, basi ut petioli ciliolatae. Sepala ovata in apicem obtusiusculum, mucronulatumve sensim angustata, nervis, lateralibus praesertim, tenuissimis sub 1-nervia, margine albo-membranacea. Petala alba, oblonga, obtusa, in anthesi sepala aequantia. Antherae sub apice filamenti insertae, loculis discretis. Styli 2-5, ut plurimum 3. Capsula matura calycem aequans, late ovata, obtusa, glabra, inferiori parte submembranacea, semi 4-valvis, valvulis chartaceis, integris, bifidisque dehiscens. Semina plurima compressiuscula, subrotundo-reniformia, badia, sub vitro eximie rugulosa, funiculis centralibus, longiusculis, filiformibus fasciculatis adfixa.

De reliquo conf. Fl. rossicam et Fl. rumelicam.

Arenaria serpyllifolia glandulosa Koch.

Obs. In speciminibus nostris byzantinis pili totius plantae et praecipue sepalorum minutissime glanduliferi et quasi muniliformes adnotantur. Legi in sterilibus aestate.

Lepigonum medium Wahlenb. Koch Syn. 1. 121. — *Arenaria marina* Roth.

Lepigonum rubrum Wahlenb. Koch l. c. — *Arenaria rubra* α. L.

Hab. Abunde crescunt in collibus siccis prope Byzantium. Florent tota aestate.

Obs. Folia in *Lepigono rubro* linearia vix carnosula submucronulata, cylindraceo-compressa, arcuata. Stipulae scariosae amplexicaules, connatae. Capsulae calycem subaequantes. Petala dilute purpurascentia. Semina omnia aptera, margine tumido cincta, sub vitro obsolete muriculata.

Variat glabra, totaque piloso-glandulosa, ramis prostratis adscendentibusve. Formae majores, glanduloso-hirtae, habitu ad arenariam macroryzam accedunt, sed semina in nostra quantum videre licet omnia aptera.

MOENCHIA MANTICA BARTL.

Hab. In collibus apricis ultra *il Gran Campo di Costantinopoli* abunde provenit; nec ulla nota differt a planta in sylva Mantica veronensi primitus lecta. Floret primo vere.

CERASTIUM GRANDIFLORUM W. K. var. *glabratum* Boiss. in litt.

Hab. Legi in declivitatibus subalpinis Olympi bith. Aug. mense.

Obs. Tota planta pilis reflexis, basi submembranacco-furfuraceis scabriuscula.

CERASTIUM VISCOSUM L.

Hab. Legi in collibus byzantinis, ubi formam perhumilem praebet.

CERASTIUM PILOSUM Fl. graec.

Hab. In pascuis sterilibus athenicnsibus tota aestate undique provenit.

Obs. Variat statura pygmaea et subspithamea. In planta elatiori pili minus densi sed constanter patentes, candidi, longissimi extant.

CERASTIUM LANATUM LAMCK.

Hab. In monte Parnis ditionis praccedentis autumno incipiente legi.

CERASTIUM TRIGYNUM VILL. — *Stellaria cerastoides* L.

Hab. Legi uno loco humenti in regione alpina Olympi bith. Floret Aug. mense.

Obs. Caules uno latere obiter pubescentes, superne undique piloso-subglandulosi. Folia falcata, angustata, potius linearia quam oblongo-lanceolata. Sepala obtusa ovato-oblonga, inferne trinervia, vix carinata.

HOLOSTEUM UMBELLATUM L.

Hab. In Attica.

LINEAE.

Linum olympicum Boiss.

Hab. In regione alpina Olympi bith. huc et illuc in herbidis florente occurrit Augusto mense.

Obs. A *Lino decolorato* (Ic. L. hirsutum Fl. graec. t. 302.) quod in Olympo bith. Sibthorpius decerpsit, differt: radice perenni nec annua; foliis dorso praecipue regulariter et valde pilosis, nec sparse villosis; cymis interdum 3-floris, nec dichotomis ramis laxe spiciformibus; sepalis ovato-lanceolatis, nec oblongo-lanceolatis; petalis violacco-azzurreis sepalis 4-plo superantibus, nec roseis duplo superantibus.

Linum gallicum L.

Hab. Circa Byzantium.

MALVACEAE.

Althaea rosea Cav.

Hab. In aggeribus circa Scutarim asiaticum.

Malva sylvestris L.

Hab. In agro byzantino, scutariano et atheniensi formae quamplurimae hujusce speciei obviae sunt.

Gossypium herbaceum L.

Hab. In cultis prope Kiephyssum atheniensem sponte.

HYPERICINEAE.

Hypericum repens L. et Spach! non aliorum.

Hab. Legi mense Augusti in pascuis dumetosis Olympi bith.

Specimina H. repentis Herb. Webbiani et Musaei Parisiensis cum nostris exacte quadrant.

Hypericum olympicum L.

Hab. Occurrit rarius in solo argilloso-calcareo ab aquis diruto regionis subalpinae Olympi bith. Legi florente Augusto mense.

Obs. Corolla calyce triplo longior, pro plantae statura amplissima!

Hypericum saturegifolium Jaub. et Spach. — Griseb. Fl. rumel. 1. p. 223.

Hab. In Olympi bith. regione alpina haud frequens. Floret Augusto.

Hypericum calycinum L.

Hab. In castanetis umbrosis ad radices Olympi bith. prope Brussam vulgatissimum. Floret Julio.

Hypericum perforatum L.

Hab. In collibus circa Byzantium.

Obs. A forma in Europa centrali nec non in Italia ubique obvia, foliis linearibus angustissimisve deflectens.

Hypericum empetrifolium W.

Hab. In planitie circa Athenas.

Hypericum crispum L.

Hab. Cum praecedente, nec non in arvis prope Phanaraki ultra Katikioi passim.

GERANIEAE.

Geranium molle L.

Geranium pusillum L.

Hab. Ad vias urbanas et suburbanas Byzantii hae duo species promiscue crescunt, et ab italicis nec characteribus nec facie recedunt. Tota aestate florent.

Erodium cicutarium L.

Hab. In agro byzantino, valde mutabile.

Erodium olympicum Boiss.! Diagn.

E. caulibus basi dense caespitosis, floriferis elongatis, sulcato striatis,

subflexuosis pilosis: foliis radicalibus congestis, caulinis plerumque quatuor oppositis, omnibus undique piloso-subincanis, pinnatisectis segmentis pinnatifidis, laciniis oblongo-linearibus, obtusiusculis; rachi subdentifera; pedunculis multifloris pedicellisque calyces superantibus glanduloso-pilosis; floribus polygamis; sepalis inaequalibus oblongo-obtusis breviter mucronatis, pelucido-scariosis, piloso-glandulosis, ciliatis, 3-7-nerviis, nervis sordide purpureis; petalis obovatis, subemarginatis calycem duplo superantibus, pallide roseis incarnatisve; fructu patenter hirsuto, cauda inferiori parte, intus longe barbata, extus tota pilis brevissimis patulis hirta.

Hab. In cacumine Olympi bith. ex quo ad inferiora alpina etiam descendit. Floret Augusto.

Obs. Affine *Erodium Sibthorpianum* ab hac specie lucnlenter differt foliis simpliciter pinnatis, pinnis ovatis, acutis; ovario pilis albis adpressis villosissimo, caudaque adpresse hirsuta, reliquis omissis.

ZYGOPHYLLEAE.

Tribulus lanuginosus L. sp. 553?

Hab. Circa Athenas. Tota planta villoso-hispidula.

RUTACEAE.

Ruta montana Clus.

Hab. Abunde provenit aestate in declivitatibus glareosis prope Constantinopolim, ubi jam a Sibthorpio collecta.

Obs. Folia radicalia supradecomposita, cetera sensim sensimque simpliciora et pinnata. Petala potius cymbiformia et conformia quam ungne attenuata denominanda.

Ruta divaricata Ten.

Hab. In monte Hymetto atheniensi legi aestate.

Peganum Harmala L.

Hab. Copiose crescit et floret aestate prope Acropolim atheniensem, ubi saepius ramosissimum et lignosum evolvitur.

RHAMNEAE.

Rhamnus oleoides L.

Hab. In monte Parnis athen.

TEREBINTHACEAE.

Pistacia Terebinthus L.

Pistacia Lentiscus L.

Hab. In Corcyra insula.

Rus Cotinus L.

Hab. In monte Pentilico.

PAPILIONACEAE.

Genista Lydia Boiss. ! Diagn. — *G. leptophylla* Spach var. *virescens*.

Hab. In regione Fagi Olympi bith. aestate.

Obs. Quae ipse observavi hujusce speciei individua legumina imperfecta, seminaque fere omnia abortientia mihi obtulerunt.

Genista tinctoria L.

Hab. Circa Scutarim asiaticum.

Genista acanthoclada DC.

Hab. In litore prope Kalamaki ultra Isthmum Corinthi legi aestate.

Calycotome villosa Lk.

Hab. Corcyrae et Hymetti atheniensis.

Spartium junceum L.

Hab. Ad Bosphorum.

Gonocytisus angulatus Spach! — *Genista parviflora* DC. — *Spartium angulatum* L. — *Retama angulata* Griseb. Fl. rum. 1. p. 5.

Hab. Legi Augusto decedente in collibus *Demerdesch* in ditione Brussensi.

Arbuscula alterne ramosa, ramis vimineis striatis, ramulis sulcato-angulatis, pedicellis calycibusque pilis minutis adpressis, subsericeis. Folia ternata, foliolis oblongo-ellipticis, acutiusculis, floralia simplicia. Bracteae bracteolaeque parvae, lineares, deciduae. Flores in ramulorum extremitate racemosi; pedicelli longitudine calycis, superne incrassati. Calyx cyathiformis subbilabiatus, labio superiore bidentato, dentibus triangulo acutis, sinu lato distinctis, inferiore superiore quidquam longiore sed angustiore, minute tridentato. Vexillum cordato-ovatum carinam retusam subaequans, alas inferne foveolatas excedens. Stamina monadelpha. Antherarum lobuli, sub vitro, pilis minutis penicillati. Stigma exiguum subdiscoideum, e sicco, vix a stylo filiformi distinctum. Legumen immaturum, calycis longitudinem duplo excedens, elliptico-urceolatum, pilis minutis appressis, confertis canescens. Corolla laete flava.

Obs. Ex praemissis, speciatim de partibus floris, satis clare elucet, ni nimium fallor, hanc plantam gradum praebere fere intermedium Genistas inter et Retamas celeb. Boissieri; ideirco genus Gonocytisus, quod characteribus fructificationis et vegetationis innixum, stirpem nostram aliasque affines colligit, praeferendum esse censeo.

Prostat in ditissimo cl. Webbii herbario sub nomine Genistae parviflorae? Planta canariensis, quae a nostra valde differt ramis omnibus profunde, exquisiteve sulcato alatis.

Cytisus chrysothricus Boiss.! — *Cytisus supinus* L. Fl. rumel.

Hab. In dumetis lapidosis ultra *Ciamlicia* a Scutari asiatico non longe legi aestate decedente.

Obs. Staturam semper humilem praebet quamvis radix lignosa et robusta sit. Ramuli sesquipalmares, vel palmares, ex radice repente erecti. Calyces villoso-sericei corollis luteis quasi concolores.

Cytisi chrysothrichi var. *gracilem* Boiss.! in Olympo bith. legi regione subalpina. Planta magis elongata, ex aggeribus pendens vel prostrata. Floret Julio et Augusto.

Ononis antiquorum L.

Hab. In planitie atheniensi.

Ononis Columnae All.

Hab. In monte Parnis ath.

Anthyllis Hermanniae L.

Hab. Crescit in ericetis prope Byzantium ad ripam Bosphori *Bujuk-Derem* versus. Folia sunt potius lineari-elliptica quam lineari-cuneata, ut in diagnose Linn. Calyces campanulato-cylindrici cum tota planta argenteo-sericei. Floret Junio, Julio.

Medicago marina L.

Medicago circinnata L.

Medicago orbicularis All.

Medicago lupulina L.

Medicago Gerardi W.

Hab. Omnes plus minusve frequentes reperiuntur in collibus aliisque locis Byzantinae ditionis.

Trigonella azurea C. A. Mey.

Hab. Planta venusta quam legi florentem primo vere ad litora maris prope Piraeum athenienseu.

Trifolium Meneghinianum mihi.

T. caule fistuloso; foliolis ovatis vel obovatis; stipulis vagina lata membranaceo-scariosa externe connexis; capitulis minute bracteolatis, post anthesim umbellatim reflexis; laciniis calycinis lanceolato-triangularibus, cuspidatis tubum subaequantibus; leguminibus dispermis.

Hab. In collibus constantinopolitanis ultra *il Gran Campo* una vice legi aestate 1850.

Radix .....? caulis erecto-adscendens ramique numerosi fistulosi, longitudinaliter striati. Foliola basi cuneata, minute serrata, serraturis a venulis productis cuspidato-subaristatis. Stipulae basi petioli interne adnatae, membrana ampla continua scariosa m. 0,002–3 longa caulem pedunculumque vaginante praeditae; candiculae dimidiam longitudinem petioli superantes, triangulares, oblongae, acutae, reticulato-nervosae. Pedunculi axillares erecto-patentes, striati, petiolo bracteante triplo quadruplo longiores. Capitula 30–40-flora bracteolata, floribus pedicellatis, primum erectis deinde reflexis, centralibus abortientibus, in penicillum rectum conniventibus immutatis. Florum fertilium pedicelli teretes, glabri, longitudine varia, externi brevissimi, interiores pedetentim longiores.

tandem tubum calycinum aequantes vel superantes. Bracteolae minutae, lanceolato-acuminatae, scariosae. Calycis tubus membranaceo-scariosus, longitudinaliter 10-nervius. Nervi primarii usque ad apicem dentium decurrunt; minores cum iis alternantes fauce consistunt et in duabus venulis divisi marginem dentium percurrunt et tandem nervo mediano conjunguntur. Dentes calycini lanceolato-subulati, viriduli; superior tubum aequans vexillo plus quam dimidio brevior; intermedii tubo breviores; infimi intermediis minores. Vexillum ovato-obtusum, in anthesi albo-luteolum, tandem avellanaceum, nervoso-striatum. Alae vexillo quarta parte breviores carinam superantes. Legumen glabrum, dorso infra duo semina, quae matura non vidi, emarginatum.

Tota planta glabra, caules et rami primarii m. 0,25 circiter longi.

Obs. T. Micheliano Savi et *T. nigrescenti* Viv. affinis. Differt a primo stipulis margine externo connexis, licet continuis caulemque vaginantibus; dentibus calycinis lanceolato-triangularibus tubum subaequantibus, nec *lineari-setaceis tubo longioribus*. A *T. nigrescenti* differt caulibus ramisque fistulosis, leguminibus dispermis.

Trifolium Petrisavii mihi.

T. caulibus solidis medullosis; foliolis cuneato-triangularibus, obtusis; stipulis vagina scarioso-membranacea caulem amplectente externe connexis; capitulis densis; floribus bracteolatis, post anthesim omnibus umbellatim reflexis; dentibus calycinis lanceolatis tubum aequantibus, leguminibus dispermis.

Hab. Copiose provenit in collibus constantinopolitanis ultra *il Gran Campo* et tota aestate floret.

Planta perennis, caespitosa; ramis primariis sparsis, prostratis, arrhizis, medulla farctis, m. 0,08 a m. 0,18 circiter longis, longitudinaliter striatis. Folia longe petiolata; foliolis cuneato obtusis, nervosis, superiori margine ex nervaturis excurrentibus serrato-cuspidatis. Stipulae exteriori latere inter se, interiori cum petioli basi connexae, caulem pedunculumque late vaginantes; caudiculae triangulares, lineari-acuminatae, nervosae vaginae longitudine. Pedunculi axillares folio 2-4-longiores, striati, erecto-divergentes, capitulis densis 25-30-floris terminati. Flores minute bracteolati, pedicellati. Pedioli teretes, praesertim externi abbreviati, post anthesim omnes recurvati. Bracteolae scariosae, ovato-acuminatae, nervo mediano usque ad apicem producto carinatae. Calycis tubus

campanulato-cylindricus, membranaceo-scariosus pediolo longior, longitudinaliter 10-nervius; limbus 5-dentatus, dentibus lanceolato-acuminatis, margine scarioso-membranaceis; duobus superioribus majoribus, tubum aequantibus, dimidiumque vexillum paullulum superantibus; inferiore minori dimidiam carinam aequante. Nervi calycis quinque majores usque ad apicem dentium decurrunt; quinque minores, ad faucem bifidi dentium reapse trinervium margines percurrunt. Vexillum sordide albidum, ovato-acuminatum, longitudinaliter plicato-striatum, apice minute denticulatum. Alae vexillo quarta parte breviores, carinam vix superantes. Legumen sessile, dispermum, dorso, infra semina, emarginatum.

Obs. A praecedente specie differt: caulibus medullosis nec *fistulosis*, capitulis densifloris, forma foliorum et omnino habitu.

A *T. nigrescente* Viv. diff. leguminibus dispermis nec 4-spermis, dentibus calycinis tubo et dimidio vexillo brevioribus, capitulis magis densis, et tandem omnibus partibus rigidioribus magisque compactis.

TRIFOLIUM ARMENIUM W. var. *pumilum* CLEM.

Hab. Legi in declivitatibus alpinis Olympi bith. latere orientali. Floret Augusto, Septembre.

Caulis humilis semipalmaris adscendens; capituli abbreviati; stipulae saepe aphyllae.

TRIFOLIUM STRIATUM L. var. *constantinopolitanum* CLEM.

Hab. In collibus circa Constantinopolim aestate.

Tota planta villoso-albescens, caulibus abbreviatis, compactis, robustis.

TRIFOLIUM SUBTERRANEUM L.

Hab. In agro constantinopolitano tres formae insignes hujus speciei distinguuntur:

α.: Pedunculis folio longioribus, seminibus atro-purpureis nec nigris.

Tota planta gracilis et longissime repens, parce pilosa; flores steriles numerosi tenues; dentes calycini valde elongati, pilosissimi.

Crescit in locis humentibus prope aquaeductum ultra *il Gran Campo di Pera*.

β.: Pedunculis folio longioribus, seminibus atro-purpureis sicut

in antecedenti; sed tota planta valde contracta, robusta, villosa. Flores steriles minus graciles quam in α.

Crescit in eadem localitate, sed in solo sicciori et calidiori.

γ. : Calycibus atro-purpureis.

Planta saepissime pusilla, ramulis prostrato-divaricatis, fere truncatis.

A praecedente non longe floret vere.

TRIFOLIUM UNIFLORUM L.

Hab. Laetissime floret primo vere in pascuis collinis prope *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum.

Obs. Species pulcra, ab aliis congeneribus habitu omnino diversa. Ex radice longissima perpendiculari caules numerosi in caespitibus parvulis densis contracti. Ager byzantinus, trifoliis uberrimus, etiam sequentia, quae legi, hospitatur:

T. constantinopolitanum SERING, quod *T. supino* simile, forma calycis ab illo distinguitur. Rarissime mihi occurrit circa *il Gran Campo di Pera.*

T. elegans SAVI. In collibus locisque magis insolatis haud rarum.

T. filiforme L. In cultis locisque glareosis rarissimum adnotavi.

T. globosum L. et *T. resupinatum* L. Ubique vulgatissima.

T. stellatum L. et *T. Cherleri* L. In herbidis promiscue crescunt, praecedentibus rariora.

T. scabrum L. et *T. glomeratum* L. Etiam consociata saepissime observavi. Solo steriliori et duro delectantur.

T. fragiferum L. Vulgatissimum in areis, ad vias, locisque argilloso-calcareis.

T. procumbens et *T. arvense* L. Locis apricis hac illacque observavi.

CORONILLA EMERUS L.

Hab. In monte Hymetto.

DORYCNIUM RECTUM SERING.

Hab. Crescit in planitie atheniensi humidiori. Legi fructificantem prope flumen Kiephyssum, autumno.

Obs. Species a congeneribus habitu valde recedens, lignosa, elata; legumini bus numerosis, capitato-fasciculatis instructa.

Lotus angustissimus L.

Hab. Legi in collibus siccioribus prope Byzantium. Floret Julio.

Obs. Caules procumbentes; pedunculi breves; dentes calycini linearisubulati, tubum aequantes. Tota planta, praesertim superne, pilis setiformibus argenteis adspersa.

Lotus corniculatus L.

Hab. Ad Kiephyssum flum. Attica.

Psoralea bituminosa L.

β. pustulata Clem.

Hab. *α.* In insula Corcyra.

β. Ad litora maris prope *Phanaraki*, ultra *Katikioim* (Calcedoniam) aestate. Tota planta multo magis quam species ramosa, magisque piloso-argentea, pilis erecto-patulis; foliolis superioribus ovato-lanceolatis, nunquam angustato-linearibus. Legumen calycem conspicue excedens, ad pilorum ortum nigro-pustulatum.

Astragalus Prussianus Boiss.! n. 9. p. 88.

A. caespitosus, ramosissimus; ramis adscendentibus erectisve, niveolanatis; foliis patentibus 6-8-jugis in spinam validam abeuntibus; foliolis ellipticis vel obverse lanceolatis, obovatisve, mucronato-spinulosis; pilis canescentibus subadpressis hirtis; stipulis acuminato-triangularibus, dorso connexis, coriaceis, avellanaceis, internodium dimidium aequantibus superantibusve, inferioribus nudis lucidis, superioribus floralibusque sensim albo-lanatis; floribus sessilibus dense capitatis; capitulis terminalibus, compactis, bombycinis, plerumque cylindricis bipollicaribus; bracteis membranaceis, obverse lineari-lanceolatis, superne barbatis, calyces aequantibus; calycis bombycini dentibus linearibus, apice subincurvis, praeter mucronem villo occultatis, tubum, demum fissilem, aequantibus; corolla pallide ochroleuca, calyce tertio longiore; vexilli lamina basi obsolete auriculata, in unguem subaequalem attenuata; legumine minimo monospermo.

Hab. Legi in collibus *di Demerdesch* Brussianae ditionis. Floret Augusto mense.

Obs. Auctoritate cl. Boissieri ad *A. Prussianum* plantam meam refero At in Diagnosibus orient. l. c. folia adnotantur adpressissime hirta,

stipulae (omnes) albo-tomentosae brevissimae, capitula rotunda magnitudine nucis, bracteae lineari-setaceae, plumosissimae; quibus characteribus *A. Prussianus* a planta nostra nonnihil recedere videtur.

An *A. Brussianus* loco *Prussiani* e patria denominandus?

Astragalus angustifolius Lam.

Hab. Legi in regione alpina Olympi bith. ubi floret Julio decedente et Augusto.

Obs. Diagnosim hujusce speciei a cl. Grisebachio in Flora rumelica 1. 57. exhibitam, ex speciminibus ex Olympo illatis hisce absolvendam censeo: « Leguminibus ovalibus utrinque acutiusculis, villis adpressis albo-nigricantibus, bilocularibus, loculis 2-4-spermis, seminibus avellanaceis laeviter rugosis. »

Planta admodum caespitosa; racemi 4-8-flori potius quam 10-flori; dentes calycini lineares subulati, nec lanceolati acuminati.

Astragalus hirsutus Vahl.! DC. Prodrom. 2. p. 306 teste Boissier!

A. caulescens, diffusus, procumbens; foliis sub 5-jugis, varie ellipticis, villoso-argenteis; capitulis subglobosis pedunculatis, pedunculis circiter longitudine foliorum, sordide rubentibus, pilosis; floribus luteo-ochroleucis, calyce duplo longioribus; calycibus pilis discoloribus, albo-nigricantibus; dentibus tubum, demum fissum, subaequantibus, lanceolato-subulatis; leguminibus ovatis, rostratis, calyce duplo longioribus, villis longis candidissimis tectis; loculis sub 3-spermis; seminibus compresso-ovoideo-truncatis, olivaceis, nigro-punctatis.

Hab. Crescit in cacuminibus alpinis aridis Olympi bith. et floret Julio decedente.

Obs. Characteres praepositi ex speciminibus l. c. lectis excerpti, ad pleniorem speciei diagnosim hic exhibentur, vel eo magis quod descriptio Candolleana nimis contracta et incompleta mihi videtur.

Affinis A. vesicario DC. et A. Pastelliano Pollin. Caulis ramique abbreviati apice reliquiis foliorum annorum praegressorum emarcidis vestiti, fructiferi pollicem vix longitudine excedentes. Stipulae papiraceae, ciliatae, caeterum glabrae, pro foliorum amplitudine grandes, cum petioli basi inferne connatae.

Astragalus Sibthorpianus Boiss. !

Hab. Crescit in pascuis saxosis imbre dirutis regionis alpinae superioris Olympi bith. e latere N. O. Legi Augusto mense florentem et fructificantem.

Obs. Species distinctissima ad sectionem *Caprinorum* Ledeb. pertinens: caule multiplici sub solo repente, nigricante, squamoso; foliis circiter 10-jugis, minutis, piloso-argenteis; floribus subsessilibus, in capitulum ovato-rotundatum aggregatis; bracteis lanceolato-linearibus, calycem subaequantibus; calycinis dentibus lineari-subulatis tubum subaequantibus; corollis atropurpureo-viridulis; vexilli lamina ovato-oblonga, alis angustato-oblongis carinam superantibus tertio longiore; leguminibus compressis, semiovatis, mucronatis; seminibus compressis avellanaceis.

Astragalus Spruneri Boiss.

Hab. Legi in viciniis Athenarum circa *Stadium*. Flores parum numerosi, elongati; calyces nigricantes; corolla magna, sordide luteo-purpurascens. Floret vere.

Biserrula Pelecinus L.

Hab. Floret primo vere in sylvulis apricis prope Bosphorum.
Herba debilis, forma leguminum perelegans.

Ornithopus compressus L.

Hab. Crescit pusillus et rarus in sylvulis byzantinis Bosphorum secundantibus. Legi aestate incipiente.

Onobrychis Cadmea Boiss. ! Diagn.

Hab. In praeruptis alpinis Olympi bith., mense Augusti.

Obs. Duplici sub forma l. c. mihi se obtulit; caulibus nempe simplicibus, elatis, foliis elongatis, foliolis rarioribus oblongo-lanceolatis, vel caulibus decurtatis a basi ramosis, foliis contractis, foliolis abbreviatis. Flores in utraque varietate semper magni, speciosi, ex quo faciem propriam non dimittit.

Onobrychis Caput Galli Lam.

Hab. In agro constantinopolitano haud frequens, aestate.

Vicia hirta Balb.

Hab. Pusilla et rara occurrit in sylvulis prope Bosphorum, et floret aestate.

Vicia varia Host. — *Vicia villosa* β. *glabrescens* Koch? Syn. 1. p. 214.

Hab. In cultis collinis aridioribus prope Byzantium a pecoribus depasta e radice perenni? Din repullulat. Legi aestate.

Obs. Folia potius lanceolato-linearia vel linearia quam lanceolata, pilis praesertim marginalibus subpatulis, nec magis quam in specie *adpressis* ut in Koch l. c.

Vicia lathyroides L.

Hab. Sylvulis prope Bosphorum raro incolit. Floret vere et aestate incipiente.

Vicia pseudo cracca Bertol.

Hab. In ejusdem ditionis locis siccioribus passim.

Vicia cassubica L.

Hab. Legi una vice in regione abietis Olympi bith. Statura elatiori insignis! Color foliorum obscure viridis. Floret a Julio ad Augustum.

Lupinus angustifolius L.

Hab. In agro byzantino.

ROSACEAE.

Rubus amoenus Portschl.

Hab. Legi aestate in saxosis collinis prope *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum, nec a stirpe dalmatica videtur diversus.

Rubus tomentosus W.

Hab. Crescit in regione subalpina Olympi bith. Folia dorso molliter incano-tomentosa, facie omnino glabra et intense viridia. Legi fructificantem Augusto mense.

Rubus fruticosus L.

Hab. In Attica prope Kiessariany.

Potentilla Buccoana mihi.

P. radice lignosa, valida; caulibus adscendentibus robustis; foliis ternatis, foliolis ovatis vel obovato-cuneatis, grosse et obtuse dentatis; corymbo multifloro; petalis obcordatis vel obovatis, calyce tertia parte longioribus; calycinis laciniis inaequalibus; receptaculo conoideo-columnari, villoso.

Hab. Legi in Olympi bith. pratis alpinis lapidosis latere N. E. Floret Augusto decedente et Septembre.

Radix descendens lignosa, prae planta maxima, nigricans, ad collum reliquiis foliorum persistentibus squamata; squamis rufo-nigricantibus. Caules bi-sesquipedales, plurimi, adscendentes, fistulosi et robustissimi, obsolete rotundato-angulati, superne striati et dichotomi, pilis tenuibus villoso-pubescentibus. Folia omnia ternata, inferiora longe petiolata. Foliola inferiorum ovata, basi cuneata, vel obovato-cuneata, rariusve tantum ovata; superiorum magis cuneata; omnia, parte cuneata excepta, grosse et plus minus profunde serrato-dentata, dentibus omnibus obtusissimis rotundatis conformibus; utrinque viridia, demum frequenter lutescentia; dorso nervaturis et margine subaequaliter villosa, facie glabrata. Petioli pubescentes supra canaliculati. Stipulae grandiusculae, basi petioli adnatae, oblongae vel lanceolatae, oblique acuminatae. Cyma subcorymbosa dichotoma, ramis plus minusve elongatis, floribus in ramis approximatis. Pedioli firmi semper axillares, magis quam caules pilosi. Calyces magni etiam pilosi, laciniis ovato-lanceolatis inaequalibus, exterioribus multo minoribus, nervosis vel reticulato-nervosis, in anthesi subacutis dein obtusiusculis. Petala obcordata vel obovata, calyce tertia parte longiora, supra luteo-aurea, subtus ochracea. Filamenta glabra. Receptaculum conoideo-columnare villosum. Nuculae arcuatim striato-costatae.

Obs. Differt a *P. grandiflora:* dentibus foliorum oblongatorum obtusis; calycinis laciniis inaequalibus obtusiusculis, petalis minoribus, receptaculo conoideo-columnare, omnibus partibus robustioribus et facie propria. Forma receptaculi et habitu etiam ad *Geum* vergit.

Potentilla reptans L.

Potentilla canescens Bess.

Hab. In agro byzantino prout in superiori Italia vulgatissimae crescunt.

Sibbaldia procumbens L.

Hab. Aegre crescit in Olympi bith. regione alpina.

Rosa rubiginosa L.

Hab. In collibus byzantinis.

Rosa pigmaea Bieb. var. *olympica* Clem.

Hab. Legi ad rupes calcareas alpinas Olympi bith. in versante N. E.
Obs. A specie recedit: foliis tomentoso-sericeis, subtus albicantibus.

Poterium spinosum L.

Hab. Byzantii, Scutaris et Atticae.

POMACEAE.

Pyrus salicifolia L.

Hab. Ad radices mont. Parnis atheniensis, ubi foliis oblongo-ellipticis vestitur, quam quae stirpis dalmaticae multo brevioribus magisque glabratis.

Cotoneaster vulgaris Lindl.

Hab. Corcyrae.

ONAGRARIAE.

Epilobium palustre L. et Fl. bith.

Hab. In regione alpina media Olympi bith. ad rivulos crescit Augusto.
Obs. Subpalmaris, gracilis; petalis violaceis sepalis lanceolatis duplo longioribus; fructibus pollicaribus incanis.

Epilobium roseum Smith. varietas.

Hab. Legi aestate prope Byzantium.
Obs. Statura minori foliisque haud crebre dentatis a specie distinguitur.

CALLITRICHINEAE.

Callitriche platycarpa var. *marginata* Clem.

C. foliis omnibus e basi plus minusve attenuata spathulatis, retusis, triplinerviis; fructum superiorum pedunculis brevibus, inferiorum elongatis; carpidiis per paria *parallelis, angulis marginatis.*

Obs. Ab omnibus mihi cognitis varietatibus Callitriches platycarpae stagnatilis celeberrimi Kuntzingii, characteribus exhibitis satis superque differt.

LYTHRARIAE.

Lythrum Graefferi Ten.

Hab. In planitie atheniensi ad ripas Kiephyssi, et in suburbiis byzantinis reperi aestate.

Obs. In utroque loco *L. Graefferi* floribus multo minoribus quam in planta ligustica ornatur.

Lythrum salicaria L.

Hab. Byzantii cum praecedente.

Lythrum nummularifolium Lois.! — *Middendorfia hamulosa* Trautw.? *Peplis Borysthenica* Bbrst.?

Hab. Loco humenti ultra *il Gran Campo di Costantinopoli* legi una vice Junio mense.

Obs. Folia subsessilia; caules fistulosi flaccidi; tota planta crispula.

PORTULACEAE.

Montia Fontana var. *minor* Koch.

Hab. In dumetosis collium humillima et recondita crescit a Byzantio non longe. Floret primissimo vere.

PARONYCHIEAE.

Paronychia argentea Lam.

Hab. In mont. Parnis et Olympo.

Herniaria incana Lam.

Hab. Ad pedes Pentilici.

Herniaria hirsuta L.

Hab. Ad Byzantium et in Olympo.

SCLERANTHEAE.

Scleranthus marginatus Guss.

Hab. In collibus siccioribus prope Byzantium copiosissime crescit et floret aestate.

Scleranthus annuus L.

Hab. In Attica et Byzantii.

Minuartia fasciculata Rchmb.

Hab. In herbidis sterilibus Atticae vulgatissima reperitur tota aestate.

CRASSULACEAE.

Crassula Magnolii Ten. — *Sedum caespitosum* DC.

Hab. Locis rimosis calcareis circa Byzantium reperitur. Floret a vere in aestate.

Obs. Statura variat a centimetro ad sex. Petala sunt lineari-lanceolata, acuta, albo-scariosa, ad costam rubentia. Follicula rigida patentia in stylum brevem persistentem desinentia, costato-striata, costis rubentibus.

Sedum galioides Pourr.

Hab. In Olympo bith.

Cotyledon umbilicus L.

Cotyledon horizontalis Guss. Fl. sic. Syn. 1. p. 513.

Hab. In declivitatibus glareosis prope Byzantium.

Obs. Cotyledon horizontalis, in Fl. rumelica omissus, a *C. umbilico* probe distinguitur racemo densifloro, floribus horizontalibus, corollae profundius quinquefidae segmentis lanceolatis acutissimis. Vidi in hac specie folia cordato-reniformia haud peltata.

SAXIFRAGAE.

Saxifraga mixta Lapeyr. var. *olympica* Boiss.! herb.

Hab. In Olympi bith. regione alpina, sed raro, mihi occurrit mense Augusti.

Saxifraga Friderici-Augusti Biasol.

Hab. In calcareis alpinis Olympi bith. vulgatissima; Julio, Augusto.

Obs. Ei absolute identica, cujus olim perpauca legi specimina in regione Montenegro nuncupata, per Dalmatiae provincias iter faciens.

Saxifraga rotundifolia α et δ *geodes* Fl. rum. 1. p. 336.

Hab. Cum nonnullis aliis formis intermediis in Olympi bith. regione alpina legi Augusto.

UMBELLIFERAE.

Eryngium viride Lk.

Hab. Circa Athenas.

Ptychotis ammoides Koch!

Hab. Copiose provenit in insula Corcyra, et praesertim ad radices mont. *Pandokratora*. Tota aestate floret.

Bupleurum olympicum Boiss.! Diagn. - *B. ranunculoides* Sm.? ex Fl. rum. add. 508. – non Linnei.

B. caule a basi ramoso; ramis rigidis, divaricatis prostratisve, primario subinde nullo, teretibus, striatis, glabris; foliis radicalibus subcongestis, rigidis 5–7-nerviis; inferioribus spathulatis vel oblanceolato-ovatis in petiolum attenuatis; superioribus obverse lineari-lanceolatis plus minusve angustatis, falcatis; caulinis paucis, sessilibus, lineari-lanceolatis, acutis; umbellarum radiis 5-8 inaequalibus; involucri foliolis inaequalibus, uno duobus majoribus, lanceolatis, acutis, subquinquenerviis; involucelli foliolis quinque conformibus ovato-lanceolatis, acuminato-cuspidatis, margine leviter cartilagineis, subtrinerviis, nervaturis lutescentibus,

pediolis fructum aequantibus paullo superantibus; diacheniis ovoideo-oblongis, subulato-costatis.

Caules et totius plantae partes magnitudine ludunt.

Hab. In cacumine Olympi bith. legi Augusto.

Bupleurum glumaceum Sm.

Hab. In insula Corcyra legi aestate.

Obs. In collinis proveniens gracillimum, defoliatum; in litoreis crassius et luxurians; in utroque vero characteres florum et fructus omnino iidem.

Bupleurum glaucum Roxb.

Hab. In litore prope *Katamaki* ultra isthmum Corinthi copiose reperi mense Augusti.

Obs. Nisi statura minore et umbellis contractis ab italico recedit.

Crithmum maritimum L.

Hab. Ad litora Corcyrae.

Oenanthe peucedanifolia L.

Oenanthe pimpinellifolia L.

Hab. Utraque proveniunt in collibus Byzantinis aestate.

Obs. Harum posterior, foliis magis dissectis, partitionibus tenuioribus, a planta in Italia vulgatiore paulisper divergit.

Scandix Pecten L.

Hab. In Attica.

Seseli caespitosum Sm.

Hab. In Olympi bith. herbidis apricis et lapidosis S. E. prospicientibus una vice reperi Augusto mense.

Anethum Foeniculum L.

Hab. Atticae; ad Kiephyssum.

Heracleum humile S. et Sm.!

Hab. Species in Olympi bith. regione alpina perrara et a congeneribus etiam facie prima fronte distincta Legi Augusto incipiente.

Tordylium apulum L.

Hab. In collibus byzantinis ultra *il Gran Campo* mihi occurrit haud frequens aestate et autumno.

Torilis nodosa DC.

Hab. Iisdem in locis cum Tordylio frequentius occurrit.

Torilis infesta Bertol.

Hab. Byzantii.

ARALIACEAE.

Hedera poetarum Bert.

Hab. Uno loco mihi occurrit ab Athenis non longe *Kiessariany* nuncupato. Floret aestate decedente et autumno fructificat.

CORNEAE.

Cornus mascula L.

Hab. In sepibus byzantinis.

LORANTHACEAE.

Viscum album L.

Hab. Ad abietem Apollinis in mont. Parnis ath.

CAPRIFOLIACEAE.

Lonicera caprifolium L. *arborea* Clem.

Hab. Crescit ad margines agrorum prope Brussam asiaticam. Floret mense Augusti.

Obs. Capituli omnes ternato-terminales. Truncus arboreus. Rami et dorsum foliorum omnium connatorum pruinosa. Minus quam specie odore grato scatet. An *L. etrusca* ?

STELLATAE.

Asperula involucrata Wahlb. ex Fl. rumel. 2. p. 167.

Hab. Habui a Domina Josephina Fossati, quae ad radices Olympi bith. in valle *del Paradiso* nuncupata legit vere decedente.

Obs. Folia caulina ramcaque inferiora non raro ad basim videntur 3-nervia! caeterum cum planta Fl. rumelicae omnibus partibus congruit. Pulcherrima species!

Asperula nitida Sm. ex Fl. rumel.

Hab. Frequens in regione alpina et subalpina Olympi bith.

Obs. Valde ludit statura; saepissime nana et fere acaulis, quandoque longe caulescens. Tamen characteres specifici immutabiles nisi excipias folia et corollam, quae in procerioribus simul cum caulibus elongantur.

Asperula Cynanchica *homophylla* Clem.

« Foliis supremis oppositis, ceterisque quaternis lineari-subulatis: » caule ramisque infernc valde scabris. »

Hab. In collibus byzantinis aestate.

Sherardia arvensis L.

Hab. Circa Byzantium.

Valantia muralis L.

Hab. Byzantii, et in Attica.

Crucianella graeca Boiss.

Hab. In Hymetto meridionali.

Galium longifolium Griseb. — *G. effusum* Boiss. et Griseb. — *Asperula longifolia* Sibth. et Sm.

Hab. In regione Fagi Olympi bith. haud frequens occurrit. Legi Augusto.

Galium orientale Boiss.! — *Galium incanum* Sm.! ex Griseb. Fl. rumel. 2. p. 159.

Hab. In Olympi bith. regione alpina latere S. E. crescit rarum, et rupium calcarium fissuris delectatur.

Obs. *G. sylvestri* affine; distinguitur caulibus dense implexo-caespitosis, foliis sex linearibus, angustis, mucronatis, rigidiusculis, nitidis, in sicco dorso, ob nervum robustum prominentem, 2-sulcatis, livido-fuscis; cymis

plerumque 2–3-floris, strictis. — Caules ramique perennantes, juniores pilosiusculo-scabridi, demum glabrati; rami juniores et folia livido-fuscescentia.

Galium setaceum Lam.

Hab. Legi in monte Hymetto atheniense, aestate.

Galium divaricatum Lamck. — Guss. Fl. sic. Syn. 1. p. 186. — DC. Ic. pl. gall. rar. tab. 24.

Hab. In apricis prope Byzantium.

Obs. Omni numero convenire mihi visum est cum *G. divaricati* Icone addncta, nec non cum descriptione cl. Gussoni, nisi quod fructus in Icone Candolleana laeves glabrique dipicti sunt, qui in nostro eximie sub lente granulati: pedioli porro non omnes fructus longitudine aequant ut in planta sicula. Ceterum a *G. setaceo* Lamck., a *floribundo et tenuissimo* Fl. rumelicae, vel fructu granulato vel corollae segmentis muticis differt.

Galium olympicum Boiss.!

Hab. In Olympi bith. regionis alpinae declivitatibus calcareis cum *Draba olympica*, aliisque rarissimis stirpibus abunde crescit et floret Augusto.

Obs. Specimina nostra a descriptione cl. Boissieri, ex Fl. rumel. characteribus sequentibus quidquam divergunt: folia margine admodum revoluta omnino glabra, nec *margine scabriuscula;* flores axillares terminalesque, nec tantum *axillares;* laciniae corollinae lanceolato-lineares, obtusiusculae, nec *lanceolato-acutae.*

Galium coronatum Sibth.

Hab. Huc et illuc in herbidis et inter saxa Olympi bith. regione alpina media reperitur Augusto.

Obs. Folia 3-nervia, nec *enervia* ut R. et S. 2. p. 219, nec 1-nervia ut in Fl. rumel. traditum est; caules glabri, basi lignescentes ut in R. et S., elongati, prostrato-repentes licet *laxi* ut in Fl. rumel. 2. p. 163, sed nunquam pilosi.

Galium Mollugo var. — *G. Tyrolense* W.

Hab. Legi Augusto in regione Fagi Olympi bith.

Obs. Planta Olympica quae cum speciminibus *G. Tyrolensis*, in Veronensi provincia lectis, convenit, a *G. Mollugine* statura minori caulequc recto praecunte cl. Koch, tantum differre evidenter patet. Cf Koch Syn. ed. 2. p. 366.

Galium verum L.

Hab. Ad Byzantium et in Attica.

Ruria peregrina L.

Hab. In Attica ad Kiephyssum.

VALERIANEAE.

Valeriana Alliarifolia Vahl. Fl. rumel. 2. p. 172.

Hab. Species in Olympo bith. perrara. Legi una vice in declivitatibus alpinis orientalibus. Floret Augusto decedente et Septembre.

Fedia echinata Vahl.

Hab. In Attica.

Valerianella puberula DC. — *V. microcarpa* Betck ex Fl. rumel.

Hab. In cultis collinis prope Byzantium crescit admodum mutabilis. Floret vere.

Obs. Dantur specimina semipalmaria gracilia et etiam pollicaria contracta.

DIPSACEAE.

Dipsacus laciniatus L.

Hab. In collibus calidissimis *ad Demerdesch* prope Brussam asiaticam. Floret Julio, Augusto.

Obs. Folia superiora profunde laciniata, quasi pinnatifida, laciniis serrato-dentatis.

Knautia orientalis L.

Hab. Legi in collibus *Demerdesch* a Brussa non longe; aestate. Elata, ramosissima, pene luxurians!!

Scabiosa urranica L.

Hab. Legi in glareosis collinis prope *Demerdesch* ditionis Brussianae. Floret Julio, Augusto.

Obs. Optime ad specimina herbarii Webbii. Caulis basi pilis longis admodum sparsis praeditus, superne glaber. Acheniorum corona pappo triplo brevior.

Scabiosa tenuis Sprun. in Boiss. Diagn.

Hab. Legi in insulae Corcyrae declivitatibus collinis haud frequens. Floret Julio.

Scabiosa maritima L.

Hab. In agro constantinopolitano valde mutabilis crescit.

Scabiosa Columbaria L.

Hab. Cum praecedente. Aestate.

Obs. A typo speciei plerumque recedens caule simplici, spithameo, monocephalo; foliis inferioribus petiolatis, ovatis, serratis. Tota planta villoso-subsericea. Floret aestate.

COMPOSITAE.

CICHORACEAE.

Lapsana grandiflora MB.

Hab. Raro occurrit in regione subalpina Olympi bith. locis umbrosioribus. Legi Augusto.

Obs. Species plus quam orgyalis et a *communi* vere distincta.

Sonchus tenerrimus *muriculatus* Clem. *anthodiis, praesertim inferne, muriculatis.*

Hab. Prope Piraeum athen. crescit et floret vere.

Cichorium byzantinum mihi.

C. perenne? radice caespitosa vel unicauli, caulibus inferne hirtis, sursum scabris, glabrisve, alterne ramosis, ramis patenti-refractis a basi ad apicem incrassatis, fistulosis, plerumque indivisis, apice floriferis; foliis radicalibus rosulatis, plerisque runcinatis, hirtis, floralibus e basi

ovata acuminatis, vix semi-amplexicaulibus, ab infimis sensim decrescentibus; capitulis in ramorum apice plerumque solitariis, axillaribus 2-3-fasciculatis, subsessilibus, subindeque ramulo plus minusve elongato unicapitulifero stipatis; capitulis 3-12-floris; involucri squamis exterioribus adpressis, ovatis, obtusiusculis, margine denticulatis, scabris, glabrisve, interioribus duplo brevioribus; acheniis obconoideis costatis; pappo squamellis membranaceis composito coroniformi, acheniis ipsis quadruplo breviore.

Hab. In agro constantinopolitano, substrato conditionibusque pervariis abunde crescit. Floret a vere in autumnum.

Obs. Planta polymorpha, facie nec non characteribus inter *C. Endiviam* et *C. divaricatum* fere ambigens. Rami, vel si mavis pedunculi axillares quandoque gemini, altero elongato capitulo unico terminato, altero brevissimo capitula 3-4 gerente; folia oblonga, denticulata; rami flexuosi. In nonnullis speciminibus e contra, caulis dichotome ramosus, folia radicalia runcinata, caulina oblonga, dentata, pedunculi capitulique ut in priore. In plerisque tandem capituli in pedunculo abbreviato unicus vel plures, pedunculi elongati constanter unicapituliferi, sed longitudine quammaxime varii, una cum caule incurvato-retorti; folia plerumque runcinata, laciniis numerosis, angustis, dissectis, vel oblongis obverse lanceolatis plus minusve irregulariter dentatis. Statura etiam variat a spithama ad orgyam dimidiam usque.

A *C. Intybo* distinguitur foliolis involucri exterioribus ovatis, adpressis, minute denticulatis interioribus dimidio brevioribus, pappo coroniformi achenio quadruplo tantum breviore.

A *C. divaricato* foliolis involucri exterioribus interiora non aequantibus nec longe ciliatis.

A *C. Endivia* demum, radice, ut videtur, perenni, foliis floralibus e basi vix semiamplectente attenuatis, nequaquam auriculatis.

HELMINTHIA ECHIOIDES W.

Hab. In Attica.

TOLPIS UMBELLATA BERTOL.

TOLPIS ALTISSIMA BERTOL.

Hab. Utramque legi in agro byzantino. Florent tota aestate.

Hyoseris microcephala Cass.

Hab. In praeruptis prope Piraeum atheniense legi vere.

Obs. Statura, scapis brevissimis, capitulis longioribus, vel folia aequantibus, superantibusve, admodum varia.

Hedypnois polymorpha DC. — *H. rhagadioloides* Moris Fl. sard. 2. p. 509.

Hab. Crescit ad vias prope Bosphorum et in suburbiis byzantinis. Floret tota aestate.

In saxosis maritimis prope Piraeum atheniense vere ineunte varietatem *H. tubaeformi* Tenorei respondentem legi.

Picris olympica Boiss. Diagn. 4. p. 26.

Hab. In Olympi bith. pascuis editioribus. Augusto mense, florentem legi.

Picridium vulgare Desf.

Hab. In Corcyra et in Attica.

Urospermum picroides Desf.

Hab. In declivitatibus minoribus montis Pentilici atheniensis haud frequens occurrit ab aestate in autumnum.

Scorzonera pygmaea Sibth. — Griseb. Fl. rumel. 2. p. 264.

S. perennis; radice incrassata ad collum squamata, compacte caespitosa, ramis abbreviatis, crassis, squamatis, dense foliosis; foliis supra caespitem recurvatis, adpressis linearibus callo subindistincto obtusatis, basim versus sparse niveo-lanatis; ramis floriferis monocephalis, scapiformibus, basi foliatis, superiora versus folio uno alterove rudimentario squamatis, ceterum glabris, striatis; involucri, ligulis flavis dimidio brevioris, sparse albo-sublanati, squamis subbiseriatis, exterioribus ovato-lanceolatis acuminulatis, interioribus oblongis obtusiusculis, margine subcartilagineo plerumque rubescentibus; achenio lineari, valde striato, pappo pluriseriali superne scabro rubescente.

Hab. Crescit in Olympi bith. regione alpina et floret Augusto mense.

Obs. Variat in iisdem locis foliis elongatis, erectis, acutiusculis, subglabratis; caespitibus minus densis.

Speciei diagnosim ex exemplaribus collectionis meae concinnavi, eo

praesertim consilio, ut plantae pulcherrimae, non adhuc bene cognitae, characteres melius innotescant.

Podospermum laciniatum DC.

Hab. In ditione byzantina mire varians.

Podospermum canum Mey.

Var. *Olympicum* Clem. foliis abbreviatis, regulariter profundiusque pinnatifidis; radice valde incrassata.

Hab. In Olympi bith. reg. alpin.

Tota planta plus minusve canescens, laciniis anthodialibus basi et marginibus constanter albo-lanatis.

Hypochaeris glabra α. Fl. sard. — *H. minima* Cyrill. non Fl. graec.

Hab. Crescit haud frequens in pratis collinis siccioribus prope Byzantium. Legi vere decedente.

Obs. Folia lanceolato-oblonga, vel etiam ex petiolo angustissime spathulata, minute vel grosse denticulata. Scapus solitarius monocephalus, vel duo tribusve accessoriis serioribus gracilioribusque interdum auctus. Ceterum ab *H. glabra* non differt.

Hypochaeris radicata L.

Hab. Iisdem locis ac praecedens sed magis frequens.

Taraxacum officinale δ. *Taraxacoides* Koch.

Hab. Numerosa specimina legi primo vere in collibus *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum.

Obs. Involucri foliola exteriora erecta, cordato-ovato-acuminata. Achenia sulcata, rostro subsesquibreviora, supra medium tuberculis in dentes sensim transeuntibus muricata.

An *Taraxacum laevigatum* DC.?

Taraxacum officinale γ. *alpinum* Koch.

Hab. In Olympo bith.

Taraxacum officinale ε. *lividum* Koch.

Hab. Circa Byzantium.

Taraxacum gymnanthum Lk.

Hab. Legi prope *Kiessariany* in ditione atheniensi. Floret vere.

Obs. Foliis hysteranthiis vel synanthiis occurrit.

Barkausia setosa DC. Fl. franc. var. *insignis*.

Hab. Crescit in collibus byzantinis et floret vere.

Obs. Capitulorum structura omnino ad *B. setosam* accedit, sed facie et statura multo minore distinguitur.

Crepis polymorpha humilis DC. Prodr.

Hab. Ad pedes *Pentilici* ath.

Chondrilla ramosissima Sibth.

Hab. Crescit in planitie prope Athenas et floret tota aestate.

Obs. Chondrillarum species sane singularis ob foliorum evolutionem imperfectam, ramorum autem maximam.

Lactuca Scariola L.

Hab. In ruderatis *Parthenonis*.

Zacyntha verrucosa Gaertn.

Hab. In dumetis et pascuis sterilibus prope Bosphorum haud frequens reperitur aestate.

Pterotheca nemausensis Cass. — *Trichocrepis bifida* Vis.

Hab. In byzantinis collibus floret aestate.

Obs. Collata cum speciminibus italicis, dalmaticisque a memetipso lectis, differt tantum statura minore, foliis pedunculisque pubescentilanatis. In reliquis ad unguem convenit.

Hieracium lanatum Vill. ex Griseb. Fl. rum. 2. p. 271.

Hab. Rarissimum ad summitatem rupium calcarium regionis alpinae Olympi bith. latere S. E. invenitur. Floret Augusto decedente vel Septembre.

Obs. *Hieracium pannosum* Boiss. Diagn. 4. p. 32 adnotante cl. Fl. rumel. Auctore, a nostro nisi varietatis lege distinguendum.

Hieracium Pilosella L.

Hab. In Olympi bith. reg. alpin. inferiori.

CARDUACEAE.

Calendula arvensis *pygmaea* Clem.

Hab. In arvis atheniensibus prope Piraeum haec *C. arvensis* forma singularis crescit monocaulis, monocephala, uncialis vel semiuncialis, foliis lanceolato-linearibus, integerrimis, anthodiis minimis pulchellis. Floret vere.

Echinops microcephalus Sm. Fl. rum. p. 229.

Hab. Legi Septembre in collinis locis sterilioribus prope Byzantium.

Obs. Stirps tomento et colore foliorum variabilis, ut ex observationibus D'Urvillei et Grisebachii l. c. nec non ex diagnosi DC. Prodr. VI. 523 manifestum est. Folia in speciminibus nostris supra obscure viridia subglabrescentia, subtus arachnoideo-tomentosa, albescentia observantur. Involucri squamae interiores pilis sex octoties longiores sunt, dorsoque glabrae, lucido-cyanescentes, nec villosae, ut ab Auctoribus supracitatis notatur.

Echinops bithynicus Boiss.

Hab. In ditionis brussianae collibus *Demerdesch*, Augusto vertente, unicum tantum specimen reperi.

Obs. Stirps admodum singularis, quam primo obtutu, ob pilos papillaeformes rubescentes, rigidissimos, quibus caules foliaque niveo-canescentia vestiuntur, vel coniomycete quodam parasitico prorsus omnem obrutam, vel morbo quodam laborantem diceres!

Echinops albidus Boiss.

Hab. Mense Septembri legi in monte Hymetto ath.

Capituli cito decidui, in anthesi folia summa tantum viridia, cetera arefacta. Radix lignosa et robusta.

Echinops graecus Mill.

Hab. In Athenarum planitie crescit pulcherrimus et a congeneribus omnibus insigniter diversus!

Ritro tenuifolius DC.

Hab. Legi specimina prope *Phanaraki* ultra Scutarim asiaticum,

quae foliis potius pinnatis quam pinnatifidis, laciniis margine valde revolutis praedita sunt. Floret Julio mense.

CIRSIUM LEUCOPSIS DC.

Hab. Crescit laeteque viget in glareosis circa aquas fluentes in Olympi bith. regione alpina media. Floret Augusto.

Obs. In speciminibus a me collectis squamae involucrorum spinula simplici, nec mucrone spinuloso instructae sunt; in reliquis ad unguem congruunt cum diagnosi a Fl. runelica (2. 252.) hujusce speciei allata.

CIRSIUM LANCEOLATUM SCOP.

Hab. Legi ad pedem Hymetti prope Kiessariany.

Obs. A stirpe italica foliis brevioribus, laciniis multo minus biseriato-divaricatis, anthodiis majoribus, squamis in anthesi parum patentibus quidquam diversum.

CARDUUS TENUIFLORUS CURT.

Hab. In agro byzantino.

CHAMAEPEUCE STELLATA DC.

Hab. Legi specimina in insula Corcyra. Floret aestate incipiente.

Obs. Anthodii squamae praelongae, lineari-subulatae, pungentes. Folia linearia, falcata, subtus nivea, spinis stipulaeformibus acicularibus basi spinula minima praeditis.

CHAMAEPEUCE MUTICA DC.

Hab. In montis *Hymetti* convalle, *Fauce* dicta, legi aestate.

Folia linearia rigiditatem, colorem et faciem foliorum coniferarum aemulantur.

SILYBUM MARIANUM GAERTN.

Hab. In collibus constantinopolitanis interdum occurrit. Floret aestate decedente.

ONOPORDON VIRENS DC. Fl. fr. et Prodr. VI. p. 48. — *O. viscosum* HORN.!

Hab. Crescit ad vias locisque sterilibus suburbanis circa Byzantium. Floret aestate.

Optime a Candolleo *O. viscosum* Hornemanni ut synonymon hujusce speciei habetur.

Onopordon illiricum L.

Hab. Legi Augusto in insulae Coreyrae monte *Pandokratora*.

A stirpe dalmatica non differt nisi statura majori et lana magis densa et candidiore.

Carlina lanata W.

Hab. Crescit in collibus ad *Demerdesch* nec non ad vias in planitie circa Brussam. Tota aestate floret.

Obs. A *C. lanata* auctorum differt: squamis involucri medii linearilanceolatis, subulatis, viridescentibus, margine tantum scariosis et dorso lanatis, nec *muticis! scariosis* ut in Fl. rumel. perhibitur.

Plantae statura summe varia, 1–2 spithamea, subinde vix sesquipollicaris et tunc anthodia minima. Folia omnia, in planta florente, semper exsiccatione detrita.

Carlina corymbosa L.

Hab. In planitie atheniensi prope Acropolim vulgatissima reperitur aestate.

Atractylis gummifera W.

Hab. Legi aestate in planitie atheniensi superiori.

Cynarocephalarum stirps mirabilis, anthodio giganteo acauli.

Atractylis cancellata L.

Hab. Frequenter reperi in monte Hymetto.

Jurinea consanguinea DC.

Hab. Species formosa, Julio florens, in convalle quadam alpina Olympi bith. Eurum versus, mihi tantum occurrit.

Obs. Cum autenticis speciminibus herbarii Webbiani nostra omnino similis. Involucri foliola potius lineari-lanceolata, subulata, quam lanceolato-acuminata dicenda. Achenia squamulosa subpilosa pappo coroniformi exiguo lobulato-dentato instructa. Folia inferiora plerumque pinnatopartita, sed huc et illuc etiam integra et oblverse lanceolata; superiora interdum squamiformia, saepius linearia.

KENTROPHYLLUM DENTATUM DC. fide specimin. in herb. Webb.

Hab. Legi in collibus ad *Demerdesch* ditione brussianae ubi vulgatissimum. — Floret Augusto.

Obs. Capitula in unoquoque ramo solitaria. Involucri foliola exteriora bracteaeformia e basi ovata, coriacea, concava sensim angustata, basi 5-nervia, reliqua parte 3-nervia, ceterum foliis proprie dictis similia: intermedia coriaceo-scariosa, tenuissime nervosa, oblonga, ad apicem appendice ovato-acuminata ciliato-serrata instructa; quae sequuntur sensim angustata, intima lineari-lanceolata subulato-spinescentia, integra. Tota planta sub lente puberula et insuper lana arachnoidea sparsa, plus minusve copiose vestita.

Foliola involucri interiora vere a nonnullis auctoribus praetervisae sunt. Ceterum specimina mea iis quae in herb. Webbiano nomine praemisso asservantur exacte respondent.

PICNOMON ACARNA CASS.

Hab. Circa Athenas.

SCOLYMUS HISPANICUS L.

Hab. In Attica

CENTAUREA DRABAEFOLIA SM.

Hab. Legi in regionis alpinae Olympi bith. declivitatibus calcareis. Floret Augusto.

Obs. Species ex el. DC. jampridem a SIBTHORPIO et AUCHERO in Olympo bithyn. lecta, et a GRISEBACHIO in Flora rumel. horum auctorum fide recepta. Quae ipse legi specimina, descriptioni Florae rumel. non ex integro respondentia, hisce notis se praebent

Radix monocaulis vel ramos binos, terve edens, quorum unicus tantum florigerus. Folia lanceolata irregulariter dentata, integerrimave, mucronulato-acuta, inferiora in petiolum attenuata. Involucri squamae ad spinarum ortum lanigerae. Anthodii magni conici cum corollis aurei. Spinae involucri basi utrinque 2-4-spinulosae. Pappus superne avellaneus achenio glabro triplo longior. Planta elegans, caule pollicari spithameo foliisque niveo-tomentosis.

CENTAUREA CRUPINA PERS.

Hab. Legi autumno incipiente prope pagum *Spartilla* in Corcyra.

Obs. Planta corcyrensis faciem gracillimam praebet; caulibus ramisque fere filiformibus rigidis; foliis radicalibus spathulato-obovatis, integerrimis, ceteris pinnatis, laciniis minutissimis, remote serratis, pilis glanduliferis ciliatis; squamis calycinis praelongis, post fructificationem margine admodum scariosis.

CENTAUREA DIFFUSA LAMCK.

Hab. Abunde crescit prope Byzantium locis sterilibus collinis et aestate decedente floret.

Obs. Specimina quae ipse legi ob ramos creberrimos patulos invicem implexos fere inextricatilia. Tota piloso-scabra, glandulisque sessilibus adspersa. Foliorum laciniae omnes lineares, lanceolatove-lineares, subfalcatae, mucronulatae. Capitula minuta, solitaria, ovata, lutescentia. Involucrorum minute furfuraceo-glandulosorum squamae superne palmato-pectinatoque spinosae, spinulis arcuato-patentibus; achenio subsericeo, pappo nullo.

CENTAUREA CANA SIBTH.

Hab. Crescit haud frequens in saxosis prope nives perpetuas Olympi bith. Floret Augusto.

Obs. Species pulcherrima accedens ad *C. montanam pygmaeam*, sed magis tomentosa et nivea. Folia ei sunt brevia et lata, polymorpha. Anthodii, prae planta magni, squamae palmatifido-dentatae, dorso virides margine nigricantes, dentibus elongato-subulatis cartilagineo-albis, ciliatae.

CENTAUREA PANICULATA L.?

Hab. Ad radices Olympi bith.

Obs. Characteribus fere omnibus cum *C. paniculata* Europae mediae congruit; differt vero floseulis lutescentibus, anthodii squamis ad apicem subulato-ciliatis, subcinnamomeis. An species distinguenda?

CENTAUREA ALBA L.

Hab. In Corcyrae insula aestate decedente.

Obs. Folia caulina basi edentata, laciniis earundem lineari-falcatis, mucronatis.

CENTAUREA PINARDI Boiss.

CENTAUREA HELLENICA Boiss.

Hab. Circa Athenas; posterior speciatim in fissuris rupium *Areopagi* non frequens, et ab omnibus facile distinctissima caule subnullo, capitulis magnis.

RADIATAE.

BELLIS ANNUA β. *dentata* DC.

Hab. Abunde creseit in pratis humentibus prope Piraeum athen. aliisque locis uliginosis Phalereum versus, ubi locum speciei tenet. Floret vere.

EUPATORIUM CANNABINUM L.

Hab. In Attica; ad Kiephyssum.

ERIGERON ALPINUS L.

β. *uniflorus* Fl. rumel. et bith.

Hab. Plurimis locis alpinis Olympi bith. huc et illuc haud frequens occurrit. Floret Augusto.

SOLIDAGO VIRGAUREA L

Hab. In Olympi bith. reg. Fagi.

CONIZA CANDIDA L.

β. *verbascifolia* W.

Hab. α. in Corcyra insula, β. in *Hymetto* athen.

ASTERISCUS AQUATICUS Less. Syn.

Hab. Circa Athenas.

PHAGNALUM RUPESTRE DC.

Hab. Legi in ruderatis *Parthenonis* ramosissimum, candidissimum, ramis elongatissimis et quamvis attenuatis tamen vigore et tenacitate insigni donatis. Floret aestate.

EVAX PYGMAEA Pers.

Hab. Exemplaria constantinopolitana staturam perpusillam, formam acaulem simplicissimam saepissime induunt. Floret locis collinis.

Inula viscosa L.

Inula ensifolia L.

Hab. Utramque legi in insula Corcyra; prior etiam communis in planitiebus Atticae. Aestate.

Inula graveolens Desf.

Hab. Ad vias *Megaridis*.

Pulicaria odora Reichb.

Hab. Crescit in sylvulis saxosis circa *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum. Legi autumno.

Obs. A specie in Liguria obvia vix differt. Folia caulina, etiam in planta juniori, obsoleta. Squamae anthodiales angustissimae, lineari-subulatae, nec lanceolato-linearcs longe acuminatae.

Circa Byzantium legi specimina omnibus partibus magis evoluta.

Pulicaria vulgaris Gaertn.

Hab. In collibus byzantinis crescit pusilla, plerumque statura unciali vel sesquipollicari.

Pulicaria dysenterica Gaertn.

Hab. In agro atheniensi ad Kiephyssum flumen plurimisque aliis locis, autumno.

Obs. A planta in Italiae superioris planitiebus vulgatissima, nostra recedit: caulibus dense striatis, ramisque virgatis strictis, foliis lanceolato-angustatis.

Omalotheca supina Cass.

Hab. In fossis humentibus alpinis Olympi bith. Augusto decedente et ineunte Septembri legi.

Obs. A *Gnaphalio supino* alpium italicarum olympica planta deflectit: caulibus basi ramosis, radicantibus, nec simplicibus, anthodii foliolis evidenter inaequalibus, nec subaequalibus.

Filago Jussiei Cosson et Germ. in Ann. Scienc. naturell. Sér. II. XX. p. 284. tab. 13.

Hab. In monte *Pentilico* atheniensi legi Octobre.

Filago gallica L.

Hab. In collibus byzantinis.

Helichrysum anatolicum Boiss.! Diagn. 4. p. 11. — *H. arenarium anatolicum* Fl. rumel. et bith. 2. p. 197.

Hab. In herbidis petrosis regionis alpinae Olympi bith. legi Augusto.

Obs. Ab *H. arenario* praecunte cl. Grisebachio, nisi capitulis paullo majoribus, foliis spathulato-lanceolatis, corymbis contractis subrotundis differre videtur.

Anthemis montana L. ex Fl. rum. 2. p. 208.

* *glabrescens:* caule foliisque glabrescentibus.

Hab. Promiscue crescunt et florent Augusti mense in Olympi bith. regione alpina.

Obs. Varietas insuper recedit a specie, praeter glabritiem, caulium foliorumque tenuitate. Caulis in utraque basi sublignosus, radicans.

Anthemis chrysocephala Boiss.! et Gris.

Hab. In collibus byzantinis apricis legi Julio mense.

Obs. Planta constantinopolitana ad *A. ponticam* W. nonnullis characteribus accedit.

Radix est lignosa, robusta. Caules a basi ramosi; ramis aliis floriferis, simplicibus, divisisve, superne aphyllis, nervoso-sulcatis, piloso-canescentibus, monocephalis; aliis stoloniformibus, brevibus, foliis numerosioribus incano-argenteis praeditis. Folia bipinnatisecta, segmentis linearibus acutiusculis. Anthodii discoidei rotundato-conoidei squamae dorso pilosae, margine scariosae, longe sparseque ciliatae; exteriores acuminato-acutae, interiores obtusae. Receptaculum conicum, paleis oblanceolatis mucronatis. Achenia subtetragono-obconoidea.

Anthemis arvensis L.

Hab. In aggeribus prope Byzantium.

Anthemis Sismondaeana mihi.

A. annua? villoso subcanescens; caulibus ramosis adscendentibus; foliis bipinnatisectis, segmentis lineari-lanceolatis, hinc dentiferis acutis mucronatis; pedunculis laeviter incrassatis, striatis; involucri squamis carina angusta viridibus, piloso-villosis, margine scarioso, lato, obtuso,

subciliato-lacero; receptaculo conico, paleis obverse lanceolatis, acuminato-mucronatis, superne sublaceris; ligulis albis magnitudine variis, fertilibus sterilibusque ovato-oblongis; acheniis disci centralibus obconoideo-incurvis, nervoso-sulcatis, margine irregulari subnullo; excentricis subprismatico-quadrangulis, faciebus profunde sulcatis, margine lobulato (auriculato) inflexo; radii compresso-subtrigonis, nervoso-sulcatis, omnibus sub lente rugulosis.

Corollae disci basi admodum ventricosae persistentes; capituli magnitudine varii, in anthesi minimi, odore intenso *M. Chamomillae* praediti.

Hab. Floret Junio, Julio in collibus sterilibus byzantinis a loco *le acque dolci* nuncupato non longe.

Obs. A celeberrimo Grisebachio (Fl. rum. 2. p. 206. 208.) *Anthemidem Chamomillam* Brunneri ad *A. montanam*, speciatim ad varietatem ejus *thracicam* ducitur. Verum tum nomen cum patria speciei Brunnerianae suspicionem inferunt hanc potius cum nostra quam cum var. *thracica Ant. montanae* comparandam esse.

Planta nostra autem differt ab *A. arvensi*, quae etiam in solo byzantino reperitur, praecipue receptaculo exacte conico, nec *conico-cylindrico;* paleis obverse lanceolatis, nec *lanceolatis;* et tandem acheniis, quae formas supracitatas praebent.

Ludit statura et rigiditate caulium, sed parvitate anthodiorum ligularumque in anthesi, et odore *M. Chamomillae* facile distinguitur.

Anth. litorali W. in Liguria crescenti etiam affinis.

Anthemis Chia W.

Hab. Locis compluribus circa Athenas et Byzantium.

Anthemis tinctoria L.

Hab. In Coreyra.

Cota Triumfetti Gay!

α. radiata.

β. discoidea.

Hab. Utraque varietas abunde et promiscue crescit in collibus prope Byzantium ultra *il Gran Campo di Pera* et aestate floret.

Obs. In forma radiata folia ampliora adnotantur, eorundem rachides laciniaeque latiores, ligulae albae, ovato-oblongae, involucri foliola plus

duplo superantes. Tota planta prae discoidea, magis evoluta et perfecta, reapse ut typus speciei habenda est. Discoidea omnibus partibus gracilior, capitulis omnibus ligulis destitutis, flosculis luteis, promiscue cum var. α. crescit, nec ab ea nullimode, nisi varietatis lege separari potest.

Matricaria trichophylla Boiss.! Diagn. 6. p. 89.

Hab. Mihi occurrit Augusto in regione Fagi Olympi bith. circa aquas stagnantes.

Obs. Specimina nostra receptaculum plane hemisphericum, achenia compresso-oblonga, incurva, ad basim angustata tricarinata, apice calloso-marginata umbilicataque exhibet.

Planta etiam orgyalis, caulibus ramosissimis interdum simplicissimis praedita.

Matricaria Chamomilla L.

Hab. In Attica.

Pyrethrum Parthenium Sm.

Hab. In Olympi bith. reg. Fagi.

Chrysanthemum segetum L.

Hab. In satis circa Byzantium, vere.

Obs. Quae ipse l. c. observavi a descriptione Fl. rum. abludunt: foliis tum mediis cum inferioribus oblongo-cuneatis, vel e basi cuneata oblongo-angustatis, apicem versus inaequaliter serrato-incisis, non vero lanceolatis, nec inaequaliter serratis; acheniis disci perfectis obtusissime nec argute 10-costatis, radialium costis marginalibus argutis, reliquis obtusis sed eximie prominentibus, neutiquam filiformibus obsoletisque.

Senecio vernalis W. K. *nigro-punctatus* Clem. *S. pendelicus* Boiss.

Hab. Legi in monte Pentilico atheniensi, primo vere.

Differt a specie anthodii squamis exterioribus constanter nigro-punctatis.

Senecio olympicus Boiss. Diagn. 4. p. 13.

Hab. In regione alpina inferiori Olympi bith. haud frequens et sparse occurrit Aug. mense.

Senecio castaneanus DC.

Hab. Crescit rarus in castanetis prope *Ciamlicia* ultra Scutarium asiaticum. Legi aestate.

Folia nonnulla longissime petiolata. Totius plantae facies gracilis.

CAMPANULACEAE.

Jasone supina Sibth.

Hab. Floret Aug. in pinetis umbrosis inferiorib. Olympi bith.

Obs. Species ludibunda ad *J. montanam* transitum faciens. Folia inferiora spathulata, media oblanceolata, superiora plus minusve linearia, omnia mutabilia, haud raro crispula. Cilia irregularia, plerumque a petiolo usque ad basim laminae tantum reperiuntur. Bracteae supra medium acutissime dentiferae. Caules nunc glabri, nunc piliferi, plus minusve prostrato-adscendentes, abbreviati, nani, vel etiam elati ad *J. montanae* staturam accedentes et forte ut in ea annui.

Phyteuma Sibthorpianum R. et S.

Hab. Legi ineunte Augusto in herbidis alpinis Olympi bith. orientem versus.

Obs. Cl. Boissiero duce hanc plantam ad *Ph. Sibthorpianum* refero. Phyteumatis vero haec species a *Ph. elliptico* Smithii, quo cum a Grisebachio in Fl. rumelica (2. p. 291) conjungitur et forte non immerito, caule teretiusculo non angulato, foliis oblongo ellipticis crenatis, minime vero crenato-serratis, tantum differre videtur. *Phyteuma campanuloides* Biebersteinii huic quoque valde affine, secundum specimina in herb. Webbiano extantia. Vereor characteribus laevioris momenti hasce species superstructas esse.

Phyteuma limoniifolium Sm.

Hab. In Corcyra, ad litora.

Phyteuma repandum Sibth. et Sm. ad specimina herb. Webbiani.

Hab. In declivitatibus herbosis alpinis Olympi bith. Augusto mense floret.

Obs. Planta statura, foliorum forma, florumque dispositione admodum mutabilis; si quae varietatis lege distingui meretur, est forma quaedam, floribus spicato-capitatis a reliquis recedens.

Specularia pentagonia α. DC.

Hab. Circa Byzantium.

Campanula spathulata Sibth. et Sm. α. DC. Prodr. VII. 2. p. 481.

Hab. In Olympo bith. solitaria.

Obs. Specimina a me collecta variant caulibus unifloris vel bi-trifloris, floribus secundis, vel in caulis apice congestis.

Campanula Billardieri α. DC. Prodr. VII. 2. p. 474.

Hab. In Olympo bithynico haud frequens.

Obs. Species caulibus caespitosis, foliis cordatis, 3-5-lobis vel acute dentatis, radicalibus petiolo longo insidentibus, ramis floriferis superne subpaniculatis, floribus parvis. Insignis!

VACCINIEAE.

Vaccinium Myrtillus L.

Hab. In Olympo bith. sicuti et aliae stirpes alpinae nostrales aegre creseit. Forte limes australis areae hujus quoque speciei.

ERICINEAE.

Erica verticillata Forsk.

Hab. In lapidosis collium et planitiei superioris Athenarum vulgatissima. Floret aestate decedente et autumno.

Obs. Variat insigniter statura, nec non florum magnitudine. Caules vel erecti semiorgyales, vel adscendentes palmares caespitosi.

Bruckenthalia spiculifolia Reichb. Fl. excurs. p. 414.

Hab. Crescit in regione media Olympi bith. ubi legi Augusto. Ericinea foliis floribusque coccineis gracillimis.

Arbutus Andrachne Lam.

Hab. In monte *Pentilico* haud longe ab Athenis. Arbuscula elegans, cortice lucido in squamas papyraceas tenues secedente, more *Platani*.

Arbutus Unedo L.

Hab. Eodem in loco ac praecedens.

PYROLACEAE.

Pyrola secunda L.

Hab. Aegre crescit in Olympi bith. regione alp. Floret Julio.

JASMINEAE.

Jasminum fruticans L.

Hab. Ipse legi ad sepes circa Brussam asiaticam. Ad radices Olympi bith. in convalle *del Paradiso* nuncupata ab ornatissima Domina Josephina Fossati una cum *J. officinali* inventum est, speciminaque utriusque speciei ab Ea comiter accepi.

ASCLEPIADEAE.

Cynanchum erectum L.

Cynanchum acutum L.

Hab. Circa Brussam utrasque species legi, Jul. Aug. Prior etiam in Graecia mihi se obtulit.

Obs. In speciminibus brussianis *C. erecti* folia forma varia, subinde oblonga; insuper statura elatiori caulibusque debilioribus ab hellenicis differunt.

In *C. acuto* folia interdum cordato-truncata observantur.

GENTIANEAE.

Chlora perfoliata L.

Hab. In Corcyra.

Erythraea ramosissima Pers.

Hab. In Attica, ad *Kiephyssum*.

Gentiana lutea L.

Hab. Mihi occurrit perrara in regione alpina Olympi bith. qui limina forte australiorae arcae hujusce speciei sistit.

Gentiana verna L.

Hab. Eodem loco ac praecedens.

Gentiana aestiva R. et S. — *G. verna angulosa* Fl. rum. 2. p. 63.

Hab. In collibus byzantinis, aestate.

SESAMEAE.

Sesamum orientale L.

Hab. In Attica, ad *Kiephyssum* flumen.

CONVOLVULACEAE.

Convolvulus tenuissimus Sm.

Hab. In Attica, ad *Kiephyssum*.

Convolvulus Dorycnium L.

Hab. Legi aestate circa *Pnix* atheniens. Frutex ramis numerosis intricatis nec non facie singulari praeditus, et a congeneribus admodum distinctus.

BORAGINEAE.

Heliotiiropium villosum Desf.

Hab. Copiose provenit circa *Acropolim* atheniensem.

Heliotiiropium europaeum L.

Hab. Promiscue crescit cum praecedenti specie, ab ea vere distinctum. Tota aestate et autumno florent.

Cynoglossum pictum Ait.

Hab. Circa Byzantium.

Onosma pallidum Boiss.! Diagn. — Ipso teste!

Hab. Legi in sylvulis petrosis prope *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum.

Obs. Pili stellati! sed antherae toto apice evidenter exsertae! quo charactere a sectione Prodr. Candolleani *Onosmata* pilis basi stellulatis distincta complectente, species haec exulatur.

Accedit nonnullis characteribus ad *O. montanum* ab Aucherio ex Asia occidentali advectum, secundum specimina herb. Mus. Parisiens. quibuscum meum comparavi.

Onosma erectum Sibth.

Hab. Legi aestate in monte *Hymetto* athen.

Cerinthe purpurea Fl. dalmat.

Hab. In insulae Corcyrae monte *Pandokratora*, et in Olympo bith. legi specimina quae a stirpe dalmatica differunt bracteis minus obtusis, sepalis parce inaequalibus, corolla .....?

Num ad *C. minorem* referenda?

Echium arenarium Guss. Fl. sic. Syn. 1. p. 232.

Hab. Legi in sabuletis *Phalerei* atheniensis, ubi floret primo vere.

Obs. Celeberr. Gay auctoritate ductus hanc plantam ad *Echium arenarium* refero, etiamsi notis nonnullis, per quam videre est in speciminibus fructu maturo adhuc carentibus, ad *E. calycinum* accedat. Quomodocumque sit eu quae in millenis a me rimatis speciminibus adnotanda veniunt:

Radix tenuis, longa, fibrosa, multicaulis. Caules erecto-adscendentes, pilis longis erecto-patulis hispidi vel tuberculato-hispidi, pollicares vel semipollicares. Folia inferiora obverse lanceolata, in petiolum attenuata, obtusa, vel rarius brevissime subacuminato-apiculata; superiora angustiora vel lanceolato-linearia, semper obtusiuscula. Foliorum inferiorum verrucae magnae pilique adpressi, discreti; superiorum conferti, e verrucis inconspicuis. Racemi terminales densi, contracti. Calycis segmenta constanter lineari-angustata obtusiuscula. Corolla extus pilosa calyce tertia parte vel duplo longior, limbo semper coeruleo, stamina inclusa.

Echium plantagineum L.

Hab. Vere et aestate haud frequens occurrit in collibus argillosis prope Byzantium ultra *il Gran Campo di Pera*.

Obs. Corolla magna, colore violaceo-azureo amoena. Stamina vix exserta vel corollam aequantia. Folia radicalia petiolata, ovata, lata, nervis in pagina prona valde extantibus.

Alkanna tinctoria Tausch.

Hab. Ad radices Pentilici ath.

Lithospermum Sibthorpianum Griseb.

Hab. Crescit et floret primo vere in sabuletis prope *Phalerum* atheniensem.

Obs. Planta nunc simplicissima seminuncialis in arena subsepulta, nunc ramis pluribus pollicaribus vel sesquipollicaribus e basi suffulta. Flores azurei, arefactione pallescenti-luteoli, semper minimi.

LITHOSPERMUM TENUIFLORUM L.

Hab. A vere ad aestatem in arvis athen. haud rara, sed difficile visu.

Obs. Planta polymorpha; simplex 1–2-pollicaris, vel inferne ramosa subspithamea. Forma nucularum et facie *L. arvensi* proxima.

Ad radices montis *Pentilici*, locis sterilioribus, legi specimina seminuncialia, strigoso-sericea, foliis radicalibus petiolatis, obverse ellipticis vel spathulatis; dum in speciminibus planitiei, etiam spithameis, folia radicalia semper angustato-oblonga observavi.

MYOSOTIS OLYMPICA Boiss.! Diagn. 4. p. 90.

Hab. Legi in summi cacuminis Olympi bith. declivitate septentrionali.

Obs. Myosotidi alpestri affinis, a qua magnitudine florum dense confertorum, prae plantae pumilae statura insigni, nuculis oblongo-ovoideis, foliis imis spathulatis, radice, ut videtur, perenni, facieque propria differt.

MYOSOTIS PUSILLA Lois. *albiflora* CLEM.

Hab. In sabuletis prope Phalereum Atheniensium, primo vere.

Obs. Differt a specie caulibus magis abbreviatis, caespitulis densioribus, floribus albis nec coeruleis.

MYOSOTIS LITORALIS Stev. — Griseb. Fl. rumel. 2. p. 100?

Hab. Circa *Stadium* prope Athenas, vere.

Obs. Facies praecedentis, sed statim ab ea distinguitur racemis haud bracteatis. Nuculae ovatae laeves, nitidae, saltem ex speciminibus fructu perfecto carentibus. Caeterum mihi adhuc dubia ob specimina nondum satis evoluta.

ASPERUGO PROCUMBENS L.

Hab. In Attica.

MUMBIA CEPHALOTES Boiss.! var. *breviflora* mihi. — *Arnebia cephalotes* Alph. DC. var.

Hab. Legi una vice in convalle lata quidem, sed fere inaccessa regionis alpinae Olympi bith. latere N. E. Floret Julio decedente.

Obs. Stirps singularis et eximia, onosmadis habitu valde affinis. Specimina a me lecta characteres sequentes genericos exhibent:

Calyx 5-partitus. Corolla hypocrateriformis, fauce nuda, limbo 5-lobo. Stamina 5 inclusa, filamentis brevissimis, antheris liberis, loculis basi breviter solutis. Ovarium 4-lobum, stigma incrassatum, emarginatum. Nuculae 4 vel abortu 1 exannulatae, toro insertae.

Differt a specie: calyce longiore, tubum corollinum aequante vel subaequante, nec *quarta vel tertia parte breviore;* antheris brevibus, oblongo-ellipticis, nec *oblongo-linearibus*, verticillatim, nec *biseriatim insertis.*

An *Munbya* loco *Mumbiae* ex cl. Munby genus scribendum?

SOLANACEAE.

Datura Stramonium L.

Hab. In Attica, ad *Kiephyssum.*

Lycium europaeum L.

Hab. In Corcyra.

Solanum humile Bernh.

Hab. In planitie atheniensi, autumno.
Statura 2–3-pedali et ultra occurrit!

Solanum nigrum L.

Hab. In Attica, cum praecedente.

PERSONATAE.

Verbascum sinuatum L.?

Hab. In agro byzantino et circa Scutarim.

Obs. Verbasco sinuato Europae australioris omnino simile et pariter ac illud summopere ludibundum forma, magnitudine, sinubus, incisuris foliorum, quae subinde integra. In speciminibus, quae hic memorantur, folia omnia semidecurrentia vidi. Corollae segmenta elongata, linguaeformia.

V. sinuatum Macedoniam, Thraciam, Calcidem, Pontum Euxinum et Bosphorum prope Scutarim quoque incolit, teste cl. Grisebachio.

Verbascum undulatum Lam.

Hab. Legi aestate in planitie atheniensi prope Acropolim, quo loco folia insigniter lanuginosa, caulesque, etsi tantum bispithamei, lignosi et robusti evadunt.

Scrophularia Scopolii Hoppe! Bertol. Fl. ital. VI. 386 — non Persoon Synops. 2. p. 160 — ad specimina autentica herb. Webbiani!

Hab. Legi in Olympi bith. regione alpina, socia *Potentilla Buccoana* mihi. Floret Augusto.

Linaria triphylla Desf.

Linaria michantha Steud.

Hab. In arvis atheniensibus promiscue reperiuntur vere.

Obs. Ambae statura et ramificatione summopere variant; characteribus uniuscujusque tamen immutatis.

Linaria spuria Mill.

Hab. In insula Corcyra, et in arvis prope *Katikioi* ultra Scutarim asiaticum.

Linaria genistifolia Mill.

Hab. In sylvulis collinis viisque reconditis prope Bosphorum.

Linaria Pelisseriana Mill.?

Hab. Cum praecedente eodemque tempore florens, licet vere et aestate.

Obs. Foliis stolonum plerumque oppositis rarissime quaternis, segmentis calycis capsulam immaturam aequantibus, eademque matura superantibus, nec segmentis *duplo longioribus*.

Veronica caespitosa Boiss.! Diagn. 4. p. 79. — Griseb. Flor. rumel. 2. p. 512.

β. *caulescens* Clem.: caespitulis laxiusculis, ramulis elongatis 2-pollicaribus, foliis remotiusculis tenuioribus linearibus.

Hab. Legi speciem et varietatem in calcareis regionis alpinae Olympi bith. ubi frequens Junio, Julio.

Obs. Specimina ferme innumera varietatis α., sive speciei a me in loco adducto collecta, caules undique exhibent foliosos. Folia ei insuper

sunt linearia, margine admodum revoluta, apice conoideo-falcata nec lineari-spathulata; pedunculi bractea obverse lanceolata quadruplo breviores nequaquam vere bracteas aequantes.

Veronica gentianoides Sm.

Hab. Stirps in Olympi bith. pascuis alpinis frigidioribus minus frequens. Floret Junio, Julio.

Veronica glauca Sibth. et Sm.

Veronica Beccabunga L.

Hab. In arvis atheniensibus abunde crescunt. Legi etiam ambas ad radices montis *Pentilici* ubi prior crescit simplicissima, filiformis, pollicaris; secunda foliis admodum tenuibus crebrisque vestitur.

Veronica acinifolia L.

Veronica agrestis L.

Veronica campestris L.

Veronica arvensis L.

Veronica cymbalaria Bertol.

Hab. Omnes, ab italicis non dissimiles, in agro byzantino abunde proveniunt et florent vere et aestate.

Pedicularis Sibthorpii Boiss. ! Diagn.

Hab. Haud frequens in summi cacuminis Olympi bith. declivitatibus calcareis. Floret Augusto. *Pediculari comosae* proxima.

Pedicularis olympica Boiss. ! Diagn.

Hab. Praecedente magis rara et praecocior; crescit iisdem locis. Foliis angustissimis et facie a congeneribus abunde diversa.

Euphrasia latifolia L.

Hab. In cultis collinis prope Byzantium haud frequens occurrit primo vere, interdum perpusilla, caule filiformi.

Odontites ixodes Boiss. ! Diagn.

Hab. Crescit solitaria in regione abietis Olympi bith. et floret Augusto mense.

Obs. Stirps ab *Euphrasia Odontide* optime distincta.

Omnes plantulae partes et praesertim prima arefactione viscosissimae.

LABIATAE.

Lavandula cariensis Boiss.! Diagn. 5. p. 3.

Hab. In collibus apricis prope Bosphorum. Floret Junio, Julio.

Obs. Lavandulae pedunculatae habitu non absimilis; differt vero, adnotante cl. Boissiero, indumento in ramis floriferis tenuiore, bracteis exquisite nervosis, denticulatis, calycis valde nervosi appendiculo sessili, spicis densioribus, crassioribusque, caeterisque.

Mentha tomentosa D'Urvill.

Hab. In planitie locisque collinis atheniensibus copiose crescit et floret tota aestate.

Obs. Foliorum cauliumque magnitudine, florum numero in unoquoque verticillo nec non tomento facieque admodum varia.

Mentha aquatica L.

Mentha Pulegium L.

Hab. Cum praecedente vulgatissimae.

Salvia Forskalii L.

α. Byzantina: foliis oblongatis, basi plus minusve hastato-lyratis, corollae tubo calyce sesquilongiore.

β. Brussiana: foliis exacte cordato-ovatis, petiolis nudis, corollae tubo calyce duplo longiore.

Hab. *α.* crescit in sylvulis byzantinis prope *Mastak*. — *β.* in brussianis prope *Demerdesch*, aestate.

Obs. Varietates hujusce speciei a cl. Grisebachio, Fl. rumel. 2. p. 100, adhibitae, *bifida* nempe et *bithynica*, formae foliorum rotundatorum aut elongatorum, figurae tubi corollae rectiusculi aut recurvato-adscendentis, staminumque proportione superstructi, admitti nequeunt. Hi enim characteres in permultis saltem speciminibus a me observatis, inferioris notae, nec constantes, me judice, ullo pacto hanc speciem in duas inter se distinctas, ut vellet cl. Grisebach, separari sinunt. In tanta speciei versatilitate, characteribus a foliorum figura et corollarum longitudine desumptis unice attendendum est.

Pili in utraque varietatum memoratarum inaequaliter sparsi, nitiduli, in facie foliorum copiosiores. Stamina in utraque exserta.

Salvia verbenaca L.

Hab. In pascuis collinis prope Byzantium ubi *S. pratensis* locum tenere videtur. Floret tota aestate.

In herbidis suburbanis etiam varietatem *clandestinam* Benth. reperi, nec non in aggeribus prope Athenas.

Salvia verticillata L.

Hab. In agro scutariano ultra *Katikioi* (*Chalcedoniam*). Aestate.

Origanum hirtum Benth.

Hab. Abunde provenit in collibus insul. Corcyrae, ubi *O.* nostri *vulgaris* locum tenet. Floret tota aestate.

Origanum virens Lk. — Griseb. Fl. rum. 2. p. 115.

Hab. In Olympi bith. regione subalpina, haud frequens.

Obs. Ab auctoribus nonnullis et ab ipso celeb. C. Savio (Osserv. Origan. 1840) ut varietas *O. vulgaris* habetur; ipse vero propriis innixus observationibus, cum cll. Link, Gussone, Grisebach, aliisque a *vulgari* sedulo distinguendum esse censeo. Ab illo revera, facie propria, caule brachiato-ramoso, foliis bracteisque pallide virentibus, bracteis eglandulosis calyce glandulifero conspicue longioribus, spicis abbreviatis facile distinguitur.

Folia caulina in nostro ovato-subacuta, integra vel plerumque remote, obsolete serrata, ciliataque, ramea minora.

Micromeria graeca Auct.

Hab. Legi in insula Corcyra.

Obs. In eadem insula cum *M. graeca*, *M. Julianam* Benth. legi. Praeterea substrati conditionibus paulisper mutatis in iisdem locis alia innumera specimina *Micromeriae* huc et illuc observavi, quae characteres *M. Julianae* et *graecae* vicissim et promiscue exhibent. Folia vel figura vel situ ex internodiorum longitudine varia, indumentum plus vel minus densum, statura, caulium divisio, facies denique, omnia uno verbo summopere mutabilia, sed omnes hujusmodi variationes singillatim enumerare supervacaneum puto. Animadvertendum autem existimo nonnulla specimina bracteolas calyces subaequantes et fauces nudas ut in *M. Juliana* praebere, corymbis autem paucifloris, irregulariter et parce fastigiatis

ut in *M. graeca* vestiri. E contra in nonnullis aliis bracteolas abbreviatas, fauces barbatas ut in *M. graeca* et corymbos densiflores exacte fastigiatos ut in *M. Juliana* observavi. Et sic aliorum characterum differentialium *M. Julianae* et *M. graecae* lusum frequentissimum illis in locis adnotavi. Quid plura? In ipso eodemque specimine, ramulus alter characteres et faciem *M. Julianae*, alter *M. graecae*, ni fallor, praebet!

Hisce perpensis, nec non iis quae de *Micromeriae graecae* lusibus fere innumeris celeberr. Bertoloni, Gussone, Bentham aliique protulerunt, *M. Julianam* et *M. graecam* varietates tantum insignes ejusdem typi sistere contendo.

Thymbra capitata Griseb. Fl. rumel. 2. p. 127.

Hab. Legi in insula Corcyra, ubi capituli minores quam in stirpe dalmatica observantur.

Thymbra spicata L.

Hab. Admodum prosperat in collibus ad *Demerdesch* ditione brussiana, ubi caespites 1-2-pedales, densissimos efformat. Floret autumno incipiente vel antea.

Satureja Thymbra L.

Hab. Vulgatissima in planitie superiori atheniensi. Floret vere et aestate.

Calamintha incana Boiss. et Heldr.

Hab. In planitie atheniensi.

Obs. In Corcyra insula legi specimina minus incana, foliis amplioribus facieque a stirpe graeca divergentia.

Thymus Zygis L.

Hab. In monte Hymetto atheniense.

Thymus serpyllum L.

Hab. Cum praecedente, nec non in collibus byzantinis.

Lamium Manganottianum mihi. — *L. veronicaefolium*, *reniforme*, *bithynicum* Benth. — *L. striatum* Sibth. — *Dracocephalum lamiifolium* Desf.

L. perenne; caulibus erecto-adscendentibus, fistulosis, crassis, interdum filiformibus subfarctis; foliis cordato-ovatis plus minusve abbreviatis

reniformibusve, crenatis vel crenato-incisis lobatisve, inferioribus longissime petiolatis, omnibus glabris; verticillastris 2-8-floris; calycinis dentibus lanceolato-acuminatis plus minusve divaricato-patentibus; corollae calyce 3-4-plo longioris tubo subrecto in faucem abrupte dilatato; galea bifida utrinque bidentata.

Hab. In Olympo bith. locis compluribus. Floret Augusto mense.

Obs. In lapidosis alpinis reconditis montis citati *L. veronicaefolium* Benth. crescit et floret mense citato. Iisdem localitatibus eodemque tempore *L. bithynicum* Benth. et *L. striatum* Sibth. promiscue crescunt evidentissimeque ab uno in alterum transitum faciunt. Nunc planta ex saxis gracillima extrahitur et foliis parvis, rotundato-reniformibus, floribusque maximis vestitur (*L. veronicaefolium*, vel *L. reniforme* Benth.). Nunc e contra magis evolvitur, caules grandiores et crassiores mittit, foliisque minus rotundatis et magis cordatis vestitur (*L. bithynicum* Benth.). Tandem omnibus vegetationis partibus, solo aliisque conditionibus faventibus maximam perfectamque evolutionem attigit (*L. striatum* Sibth. — *Dracocephalum lamifolium* Desf.); et hac ultima forma ad *L. garganicum* vergit.

Formas superius memoratas cum speciminibus autenticis Mus. Paris. comparavi, nec ullum de earum identitate mihi dubium superest. Alias formas porro innumeras locis citatis observavi, quae satis superque ostendunt species omnes et synonima huc comparata unicam mutabilissimamque constituere stirpem.

Lamium amplexicaule L.

Hab. In Attica.

Stachys italica Jan.

Hab. In collibus constantinopolitanis raro occurrit aestate, a nostra nullimode diversa.

Sideritis taurica W.

Hab. In regione alpina Olympi bith. in latere austro-orientali, decedente Augusto et Septembre.

Obs. Folia oblanceolata vel obovata, nec *lanceolata;* bracteae rombeo-cordatae acuminatae, nec tantum *cordato-acuminatae.*

Ballota acetabulosa Benth.

Ballota nigra L.

Hab. In Attica; prior in planitie, altera ad radices Pentilici.

Marrubium vulgare var. *apulum* Ten.

Hab. In planitiei atheniensis locis siccioribus aestate legi.

Lana densissima candidissima; verticilli 40-60-flori, fructiferi valde compacti.

Philomis ferruginea Ten.

Hab. Legi in collibus prope *Demerdesch* ditione brussiana. Augusto.

Obs. Pili omnes stipitato-stellati, stipitulo tuberculo insidente, in caule laxiores, in facie foliorum robustiores rariores, in dorso minutissimi et crebri. Folia inferiora profunde cordata ovato-abbreviata, summa lanceolato-subcordata. Subulae calycinae longitudine variae.

Philomis fruticosa L.

Hab. In sterilibus Atticae tantum observavi, nec ullam reperi in agro constantinopolitano.

Scutellaria orientalis β. *pinnatifida* Benth. in DC. Prod. 12. p. 413. — *S. orientalis* L. Auct. in herb. Mus. Paris.

S. caule fruticuloso, ramoso, prostrato; ramulis adscendentibus foliisque pilosulis, parvis, cordato-oblongis, petiolatis, oppositis, pectinato-pinnatifidis; laciniis lineari-obtusiusculis, subtus nervosis, facie ad nervos sulcis profundis impressis; superioribus bracteiformibus, pilosioribus, ovato-oblongis ellipticisve, obtusis acuminatisve, inferioribus dentatis superioribus integerrimis; floribus axillaribus, breviter pedunculatis, adproximatis, spicam terminalem capituliformem mentientibus; calycibus minimis obsolete bilabiatis corollisque flavis pilosis.

Hab. Abunde provenit in saxosis alpinis Olympi bith. caurum spectantibus. Floret Augusto mense.

Corollae labium superius rotundato-obtusum; inferioris trilobi lobi laterales parvi, medius elongatus, carinato-rostratus, truncatus. Folia etiam glandulis raris notata.

S. orientalis vulgaris differt a nostra praesertim foliis ovato-oblongis, pinnatifido-dentatis, subtus incano-tomentosis, bracteis subintegerrimis.

Praeterea planta nostra magis contracta, ob ramos primarios lignescentes iterum divisos tortuoso-repentes.

SCUTELLARIA PEREGRINA L.

Hab. In insula Corcyra.

AJUGA LAXMANNI BENTH.

Calyx 5-fidus, nec 5-dentatus vel 5-lobus ut in *Ajuga*; nec 5-dentatus aut bilobus ut in *Teucrio*. Corolla cum stylo marcescens, nec cum illo decidua ut in *Teucrio*. Labii superioris loco fissura utroque latere dentata, nec labium superius brevissimum bifidum ut in *Ajuga*. Labium inferius 3-lobum, labello bifido (licet labium inferius 4-fidum), nec 5-lobum ut in *Teucrio*. An genus distinguendum?

Ut melius stirpis nostrae morphosis botanicis pateat, descriptionem sequentem addendam puto.

Perennis; pilis longis articulatis villoso-scabra. Caules basi ramosi, rotundato-angulati. Folia venoso-subtrinervia, elliptica vel oblongo-elliptica, obtusa; inferiora minora, basi angustata caulinaque media antice remote et obtuse dentata, interdum emarginata; superiora integerrima bracteantia floribusque spicato-axillaribus longiora. Calycis 5-fidis dentes oblongi, obtusiusculi, subaequales. Corollae luteolae labii superioris loco fissura utroque latere dente lineari barbato praedita. Labium inferius trilobum, lobo medio elongato-bilobo, lobulis crenulatis. Tubum supra basim villis densis annulatum. Nuculae dorso convexae, punctato-foveolatae.

Hab. Crescit in dumetis alpinis inferioribus Olympi bith., ubi specimina herb. exsiccati legi Augusto mense. Floret Julio.

AJUGA ORIENTALIS L.

Hab. In sylvulis abietinis Olympi bith. solitaria crescit, et floret Junio, Julio.

Folia valde elongata, obverse lanceolata, nec tantum *ovata*, ut in phrasi Linneana stirps olympica exhibet.

AJUGA CHAMAEPITYS SCHREB.

Hab. Ad radices *Pentilici* atheniensis.

TEUCRIUM FLAVUM L.

TEUCRIUM POLIUM L.

Hab. In insula Corcyra frequenter occurrunt ad radices montis *Pandokratora*.

TEUCRIUM SCORDIOIDES SCHREB.

Hab. In monte *Pentilico* atheniensi.

VITEX AGNUS L.

Hab. In Corcyra et in Attica.

LENTIBULARIEAE.

PINGUICULA ALPINA L.

Hab. Mihi occurrit rarissima ad rivulos alpinos Olympi bith. Floret Junio, Julio.

Cum speciminibus in alpibus italicis lectis exacte congruit.

PRIMULACEAE.

ANAGALLIS PHOENICEA LAM.

ANAGALLIS COERULEA SCHREB.

Hab. In Attica, ad *Kiephyssum*.

LYSIMACHIA ATROPURPUREA L.

Hab. Uno loco in declivitatibus glareosis ad Bosphorum, *Mastak* pagum versus, sponte crescentem reperi aestate.

Stirps pro inflorescentia speciosa.

ANDROSACE OLYMPICA BOISS.! Diagn. 4. p. 37. — *A. villosa* SIBTH. — GRISEB. Fl. rum. p. 512.

Hab. In cacuminibus alpinis minoribus Olympi bith. reperi Augusto; eodem loco ubi cl. SIBTH. suam *Androsacem villosam* collegit.

Obs. Plantae statura, indumento, facieque summopere versatilis characteres potiores ex speciminibus innumeris a me collectis depromptos exhibeo.

A. perennis, caespitosa: in anthesi nana, pilis simplicibus articulatis, in scapo longioribus, laxiusculis, canescens; fructifera elongata, glabriuscula

vel minus pilosa; foliis congestis imbricatis lincaribus obtusis, marginibus nerviformibus subincrassatis; scapis plerumque bifloris; involucri foliolis lincaribus pedicellos brevissimos multum superantibus; calycinis dentibus lineari-lanceolatis vel ovato-lanceolatis obtusis, tubum longitudine superantibus; corolla alba vel pallide carnea, circa faucem laete purpurascente, laciniis oblongis rotundatis, tubo calycem aequante; capsula subrotunda glabra.

Primula longifolia Curt.

Hab. Raro occurrit in Olympi bith. regione alpina inferiori, locisque humentibus frigidioribusque delectatur. Floret Julio.

Cyclamen persicum Mill.

Cyclamen hederifolium Sm.

Hab. Ambae species in ditione atheniensi huc et illuc occurrunt. *C. Hederifolium* in monte *Parnis* praecipue observavi, et *C. persicum* abundat prope *Kiessariany*. Florent autumno.

Samolus Valerandi L.

Hab. Ad radices Pentilici.

STYRACINEAE.

Styrax officinalis L.

Hab. In Attica ad *Kiephyssum* et Byzantii.

GLOBULARIEAE.

Globularia Alypum L.

Hab. Declivitates minores infra Athenas et *Pentilicum* montem una cum aliis multis amoenissimis stirpibus exornat. Floret primo vere.

PLUMBAGINEAE.

Acantholimon androsaceum Boiss. β. *olympicum* Ejusd.!

Hab. Floret in regione alpina Olympi bith. Augusto mense.

Frutex ramosissimus, ramis in caespitibus emisphericis, densis congestis, floribusque roseo-purpureo-albidis ornatis. Pulcherrimus.

STATICE GRAECA β. *microphylla* Boiss. in DC. Prodr.

Hab. Abunde provenit in litore prope *Kalamaki* ultra isthmum Corinthi.

Statura perquam variabilis.

PLUMBAGO EUROPAEA L.

Hab. Ad vias in proximitatibus atheniensibus aestate.

PLANTAGINEAE.

PLANTAGO GENTIANOIDES Sm. — *P. gentianoides* α. GRISEB. Fl. rumel. 2. p. 363.

Hab. Crescit in aquis lente fluentibus frigidisque Olympi bith. regionis alpinae inferioris. Legi Augusto.

Obs. Tota glabra; radice incrassata; scapis adscendentibus substriatis; foliis ellipticis vel elliptico-lanceolatis, 3-nerviis, in petiolum attenuato-decurrentibus, sparse et irregulariter dentatis, lucidis; spica linearicylindrica, fructifera subinterrupta; bracteis ovatis, obtusiusculis, atropurpureis, involucello brevioribus; involucelli segmentis obovatis, dorso atropurpureis, margine cartilagineo-rubescenti; calycis campanulati purpurascentis lobis oblongis apice rotundatis; antheris luteo-albis, ellipticis, basi solutis, apice mucronatis; capsulis oblongis superne attenuatis styli basi persistente mucronatis, atropurpureis, calycem duplo superantibus, dispermis; seminibus oblongo-ellipticis, complanatis, rugulosis, atropurpureis.

Species a congeneribus omnibus scapigeris distinctissima.

PLANTAGO LANCEOLATA *gossypina* CLEM.

P. scapis gracillimis, 1-3 pollicaribus, foliis angustatis, linearibusve, tomento candidissimo vestitis, spicis rotundato-ovatis, bracteis ovato-acuminato-subulatis.

Hab. Crescit in collibus sterilibus circa Byzantium et Scutarim. Floret aestate.

Obs. Forma, foliorum tomento plus minusve denso, bracteisque ovato-acuminatis, subulatis, spectabilis.

Prostat in herbario Webbiano ex Asia minore sub nomine *P. lanceolatae.*

Plantago maritima *alpina* Clem.

Hab. In alpinis Olympi bith. vulgatissima. Species polymorpha.

Plantago Bellardi All.

Hab. In agri byzantini locis collinis. Plerumque pusilla hirsutissima.

Plantago Psyllium L.

Hab. In planitie circa Athenas.

Statura varia, subinde seminuncialis, caule simplicissimo, capitulis paucifloris.

CHENOPODIEAE.

Polycnemum arvense L.

Hab. In collibus byzantinis haec etiam stirps summopere ludit statura, quae saepissime vix unciam adaequat. Floret aestate.

Salicornia fruticosa L.
Schoberia fruticosa C. A. M.

Hab. In litore prope *Kalamaki* ad Corinthum.

Atriplex roseum L.
Atriplex portulacoides L.

Hab. Ad litora prope *Kalamaki*.

Atriplex litorale L.

Hab. In Corcyra insula.

Atriplex hortensis L.

Hab. In palustribus locis prope *Phalereum* athen. sponte crescit. sed olim forte culta.

Atriplex Halymus L.

Hab. In Attica.

Chenopodium album L.

Hab. Ad litora prope *Kalamaki* corinthiacum.

Chenopodium Vulvaria L.

Hab. Ad pedes montis *Pentilici* et *Hymetti*.

Obs. Hoc ultimo loco planta foliis omnibus minutissimis vestitur.

Salsola Kali L.

Hab. In Corcyra.

Salsola Tragus L.

Hab. Circa Athenas.

POLYGONEAE.

Rumex alpinus L.

Rumex digynus L.

Hab. In sylvaticis alpinis Olympi bith.

Rumex Acetosella L.

Hab. In proximitatibus byzantinis haud frequens.

Rumex bucephalophorus L.

Hab. In collibus byzantinis nec non in tota Graecia vulgatissimum et admodum mutabilem observavi.

Polygonum maritimum L.

Hab. In litore prope *Kalamaki* vulgatissimum.

Polygonum alpinum var. *olympicum* Clem.

P. radice oblonga, incrassata, fere tuberiforme; caulibus ad ochreas parce pilosis; foliis lanceolatis acutis, facie dorsoque glabratis, minutissime ciliolatis; perigonii laciniis oblongis obtusis; stylis tribus statim deciduis; nuculis nitidis acutissimis trigonis, faciebus canaliculatis perigonio sesquilongioribus.

Hab. Legi in dirutis calcareis regionis alpinae Olympi bith. Augusto mense.

Polygonum Venantianum mihi.

P. glabrum, ramosum, subglaucescens; caule, vel ramo centrali erecto, ceteris prostratis vel prostrato-adscendentibus; foliis lineari-lanceolatis,

utrinque angustatis; vaginis setaceo-laceris; floribus 5-andris axillaribus, fasciculatis, pediolatis; pediolis perigonium subaequantibus; fasciculis 2-multifloris, distantibus, racemum gracilem elongatum interruptum mentientibus; perigonii laciniis obovatis, antice rotundatis, patentibus, lactissime roseis, imo dorso virentibus; stylis tribus abbreviatis; nucula faciebus concavis, superne attenuata, a basi styli persistente rostrata, rugulosa, sparse furfuracea.

Hab. Abunde provenit in arvis argillosis *Maslak* pagum versus, in ditione byzantina.

Obs. P. arenario W. K. affinis; sed stipulis setaceo-laceris scariosis, nec *membranaceis acutiusculis*, racemis gracillimis admodum elongatis interruptisque nec *terminalibus*, floribus pentandris nec *octandris*, et tandem habitu peculiari diversus.

Polygonum aviculare L.

Hab. In Attica et Byzantii.

Polygonum convolvulus L.

Hab. Byzantii.

THYMELEAE.

Passerina hirsuta L.

Hab. In planitie atheniensi superiori vulgatissima. Flores etiam monoici et dioici observantur. Fere toto anno floret.

Clamidanthus Tartonreira C. A. M.

Hab. Copiose reperitur ad radices montis *Pentilici* atheniensis, ubi floret primo vere.

Obs. Frutex argenteo colore splendens, ramosissimus, superne dense foliosus. In speciminibus nostris ramuli potius villoso-sericei quam pubescentes et flores luteoli nec albidi adnotantur.

Daphne jasminifolia Sm. ex Griseb. Fl. rum. 2. 320. — *D. glandulosa* Bertol. — *D. oleoides* Boiss. Voyag. espagn. ex Griseb.

D. ramosissima, semiorgyalis, dense caespitosa; ramulis, in sicco, profunde sulcato-angulatis rubentibus, plerumque parce pilosis; foliis carnoso-coriaceis obovatis spathulatisve obtusis, rarius elliptico-oblanceolatis

obtusiusculis, glabris rariusve sparsim pilosulis, supra laete virentibus, subtus pallidioribus; floribus fasciculatis terminalibus, subquaternis, brevissime pediolatis; perigonio albido inodoro, extus adpresse piloso-sericeo, lobis lineari-lanceolatis, obtusiusculis, tubi longitudinem aequantibus; drupa juniori oblonga, perigonio inclusa, exsucca; matura libera, rotundata, succosa, rubra.

Hab. Copiose provenit in pratis alpinis inferioribus Olympi bith. et floret Augusto mense.

Obs. Cortex caulis fuscescens, rimulosus. Folia, in sicco, laeviter margine incrassata, facie sub lente acriori levissime impresso-punctata, dorso vero plus vel minus conspicue punctis creberrimis expallentibus notata.

Nomen a celeberrimo Bertoloni (Amoenit. ital. p. 356) huic speciei inditum, ni fallimur, ineptum est: revera glandulae, sic dictae, in pagina foliorum inferiorum obviae, in speciminibus saltem quae ad manus habemus nil aliud, microscopii ope, esse videntur, *nisi stomata, quorum margo supra epidermidem plus minusve prominet!!*

Caeterum species nonnihil varia videtur, foliis oblongo-obovatis, obovatis, spathulatisve, apice acutiusculis vel brevissime mucronulatis, statura a spithama ad orgyam dimidiam et ultra.

LAURINEAE.

Laurus nobilis L.

Hab. In monte *Parnis* atheniens.

SANTALACEAE.

Osyris alba L.

Hab. In Corcyra et *Hymetto* atheniens.

EUPHORBIACEAE.

Euphorbia chamaesyce L. var. *canescens*.

Hab. In locis incultis et in areis pagorum atheniens. aestate.

Obs. Ad aggeres prope *Phanaraki* ultra Scutarim specimina magis evoluta, caulibus adscendentibus, foliis 4–6-plo longioribus et latioribus minusque pilosis legi.

Euphorbia exigua L.

Hab. In herbidis collinis circa Byzantium rara. Statura pusilla, omnibus partibus vere exiguis, sed semper multicaulis.

Euphorbia Peplis L.

Hab. Legi in insula Corcyra; nec non in litore prope *Kalamaki* ultra isthmum Corinthi, ubi foliis admodum pruinoso-canescentibus vestitur. Floret Julio et Augusto.

Euphorbia Peploides Gouan! — *E. rotundifolia* Loisl. Not. tab. VI. fig. 1. rudis.

Hab. Crescit et floret vere in dumetis ad ripam Bosphori europaeam.

Obs. In innumeris a me collectis speciminibus, caulis e basi simplici, erecta vel prostrata, fere corymbose ramosus, ramis adsurgentibus. Folia tenuiter membranacea, tenuiterque venosa, obovato-cuneata, subrombea, non semper orbiculata, plerumque obsolete emarginata, inferiora dorso rubentia. Folia, umbellam parvam, vulgo 3-radiatam, involucrantia, elliptico-subrotunda, involucellorum vero cordato-ovata, tenuiter apiculata. Semina subhexagona, faciebus binis contiguis foveola longitudinali exaratis, caeteris 3-4-5-foveolatis variis, foveolis fundo obscure rubentibus. Radix fibrosa, fibris tenuissimis comantibus. In reliquis convenit cum descriptione Fl. rumel. (1. p. 138), clarissimoque Grisebachio qui ab *E. Peplo* distinctam esse declarat libentissime assentior.

Euphorbia helioscopia L.

Hab. Ad vias circa Byzantium.

Euphorbia pumila Sibth. Fl. graec. tab. 460.

Hab. Crescit in Olympi bith. regione alpina cum *Astrag. Sibthorpiano* promiscue. Legi Augusto.

Obs. Collata cum descriptione Fl. rumelic. 1. 141 nostra recedere videtur caulibus ramosis, spithameis longioribusque, omnino glabris, nec *simplicibus digitalibus puberulis;* seminibus juxta raphem linea purpurea (canaliculo) notatis, nec *bisulcatis.*

In Fl. rumelica planta Sibthorpiana ejusdem montis incola asseritur.

Euphorbia Apios L.

Hab. Species in insula Creta primum reperta, ad radices montis

Pentilici atheniensis in solo calcareo et aprico nec alibi adnotavi. Floret primo vere.

Obs. Folia omnia lanceolata vel anguste obovato-elliptica obtusa, nec in ramis floriferis *subrotundo-ovata* (Pers. Synops.) observavi.

Euphorbia pilosa L.

Euphorbia falcata L.

Euphorbia Characias L.

Hab. In arvis et pascuis circa Athenas abundé crescunt.

Euphorbia Myrsinites L.

Hab. In monte *Parnis* atheniense.

Crozophora verbascifolia Juss. *Croton villosum* Sibth.

Hab. Prope *Acropolim* atheniensem frequenter occurrit.

Obs. Quamplurimum variat statura, sed semper tomento denso candidissimoque obvolvitur.

Crozophora tinctoria Adr. Juss.

Hab. Ad *Kiephyssum* flumen in planitie atheniensi.

URTICEAE.

Urtica pilulifera Pers.

Hab. In umbrosis Atticae locis haud frequens. Floret a vere ad aestatem.

Parietaria diffusa Koch.

Hab. Legi in ruderatis *Parthenonis*, ubi ramosissima et sublignosa crescit. Floret aestate.

Parietaria officinalis *elatior* Clem.: Bi-tripedalis, a solo adscendens vel erecta; foliis ellipticis grandibus nervosis, longe petiolatis, acuminatis; glomerulis axillaribus cum ramulo intermedio, nunc abortiente et glomerulis duobus lateralibus 4-6-floris centrali faemineo, nunc elongato florifero glomeribus omnibus pancifloris.

Hab. Legi ad litora maris intra sepes prope *Phanaraki*, ditione scutariana.

CONIFERAE.

Ephedra fragilis Desf.

Hab. In montis *Hymetti* convalle, *fauce* dicta, valde prosperat, et floret aestate decedente.

Obs. Statura etiam biorgyalis et ultra; ramis longissimis ex arboribus, supra quas planta scandit, dependentibus; baccis subcaesio-rubris.

Juniperus nana W.

Hab. In summitatibus Olympi bith. aegre crescit.

Juniperus oxycedrus L.

Hab. In monte *Parnis* atheniens. legi. Baccae rubrae.

Juniperus phoenicea L.

Hab. In monte *Hymetto* et ad litora prope isthmum Corinthi abunde crescit.

Abies Apollinis Lk.

Hab. In monte *Parnis* atheniens.

Pinus halepensis Ait.

Hab. In *Hymetto* meridionali.

AMENTACEAE.

Quercus Aegylops L.

Hab. Ad pedes *Pentilici* atheniens.

Quercus coccifera L.

Hab. In Corcyra vulgatissimum.

Platanus orientalis L.

Hab. Sponte in Attica prope *Kiephyssum* flum.

AROIDEAE.

Arum tenuifolium L.

Hab. In monte *Parnis* atheniens.

IRIDEAE.

Iris pumila L.

Hab. Ad radices montis *Pentilici* una vice legi. Flores pallide lutescentes primo vere aperiuntur.

Crocus Sprunneri Boiss. et Heldr. !

Obs. Species pulcherrima, quae montem *Parnis* aliaque loca complura collium atheniensium incolit. Perigonii variant colore albo-azureo-purpurascente. Bulborum tunicae, in anthesi, fenestrato-reticulatae, fructu maturescente minus reticulatae, demum in fibris tenuioribus quasi parallelis solutae. Scapi processu fructificationis magis magisque abbreviati. Legi autumno.

Romulea Columnae Seb. et Main.

Hab. In solo duriori atheniensis planitiei frequenter occurrit humillima et pulchella. Floret a vere ad aestatem.

Romulea Linarezii Parlat.

Hab. Praecedentis minus frequens, ad pedes *Pentilici* locis umbrosis primo vere reperitur.

ASPARAGEAE.

Asparagus aphyllus L.

Hab. Legi prope Athenas ad *Kiephyssum* flumen.

Obs. A. aphyllus in Sicilia proveniens a cl. Bertolonio (Oss. it. 4. p. 153) in caulis parte superiore ramisque hirtus declaratur; specimina vero omnia quae ipse l. c. legi omnino glabra observantur.

Smilax aspera L.

Smilax mauritanica Guss.

Hab. Promiscue crescunt et valde mutabiles in planitie collibusque atheniensibus. Tota aestate florent.

AMARYLLIDEAE.

Sternbergia lutea Ker.

Hab. In *Hymetto* meridionali.

LILIACEAE.

Asphodeline Morisiana mihi.

A. caule densissime folioso; foliis lanceolato-subulato-triquetris, erectis; racemo spicaeformi, cylindrico, densifloro, subsimplici, bracteis oblongis vel ovato-acutis obtusisque scarioso-argenteo.

Hab. Reperi infra saxa mobilia una localitate sed abunde prope nives perpetuas Olympi bith. latere N. O. Floret Augusto mense.

Radix .....? Caulis cylindricus, farctus, durus, cum spica circiter bispithamens. Folia crebra, rigida, abbreviata licet m. o, o4 ad o, o8 longa, basi latiuscula, sensim angustata, lanceolato-subulato-triquetra, striata, supra canaliculata, pallide viridia, margine tenuissime cartilagineo-serrulata, intus subfarcta. Vaginae arctae amplexicaules in folium ovatae, pellucido-membranaceae, demum scariosae. Racemus subspithameus simplex, spicaeformis, cylindricus, densissimus, bracteis magnis, scariosis, ovato-acutis vel ovato-oblongis, vel obtusis argenteo-fulgens. Racemuli subsessiles biflori, flosculo altero longius pedicellato abortienti. Perigonium prae racemo parvum, inferum, corollinum, sexpartitum! patens; phyllis subaequalibus lineari-spathulatis, nervo fusco diremtis. Stamina sex basi perigonio inserta: 3 perfecta in anthesi perigonium aequantia: 3 sterilescentia prioribus multo minora. Staminum fertilium filamenta e basi plana, filiformia, glabra, antheris duplo longiora. Antherae oblongo-lineares dorso adsiscae, loculis basi discretis. Staminum sterilium filamenta apicem versus (in sicco) subclavulata fuscescentia. Antherae minutae, cordato-ovatae antheris perfectis quadruplo saltem minores, subinde una alterave deficiens. Stylus filiformis perigonium fere aequans, in anthesi declinatus (?) Stigma distincte trilobum!! Capsula ovalis utrinque obtusa, coriacea, basi ad suturas parietales calloso-cartilaginea, loculicido-trivalvis, loculis dispermis. Semina acute triquetra, faciebus elliptico-lanceolatis, canaliculatis, testa fusco nigroque variegata, sub lente minutissime muriculata; hilo lineari angustissimo.

Obs. Ab *Asphodelo luteo* differt foliis inferne latioribus, brevioribus, erectis; racemo exacte cylindrico, densissimo; bracteis conspicue scariosis maximis, plerumque non acuminatis; perigoniis minoribus, nec non forma antherarum et stigmatis; tandem facie propria ab illo omnino diversa.

Asphodelus fistulosus L.

Hab. Circa Athenas.

Ornithogalum exscapum Ten.

Hab. Legi ad aggeres prope Bosphorum vere et aestate.

Obs. Scapi non desunt, sed semper brevissimi, circiter semipollicares adnotantur.

Gagea spathacea Schult. Syst. VII. p. 541? Griseb. Fl. rumel. 2. p. 383!

Hab. Legi mense Aprilis in herbidis collinis summitatis *Ciamliciae* ultra Scutarim asiaticum.

Obs. Specimina omnia a me collecta glabra, uniflora, caule foliis 2, 3, alternis bracteaeformibus instructo, omnino ut in diagnosi Fl. rumelicae. Aliter vero haec species se prodit, in Europa centrali, ex auctorum germanicorum descriptionibus, folio florali nempe spathaceo ab umbella longe pedunculata 2-5-flora remoto. Planta nostra statura vix 7 centim. excedit, perigonii foliola glabra, oblonga, obtusa 7 millim. longitudinis.

Gagea arvensis Schult. Syst. 7. p. 547.

Hab. In umbrosis humentibus Atticae.

Obs. Folia radicalia 2-3 glabra vel puberula e basi attenuata, in sicco filiformia, florem excedentia, arcuata: caulis glaber, in nostro uniflorus, pedunculo villoso: folia floralia 2 opposita, e basi dilatata, lanceolato-subulata, longitudine inaequalia. Perigonii foliola 3 acuta, 3 obtusiuscula.

Scilla autumnalis L.

Hab. Legi specimina in Attica prope *Kiessariany*, nec non in insulae Coreyrae locis apricis.

Scilla maritima L.

Hab. In Corcyra insula vulgatissima, a maris litoribus ad montes etiam altiores adscendit.

Allium Webbii mihi.

A. bulbo rotundato-ovato, vaginis superne laceris albis demum nigrescentibus vestito; scapo tereti striato plerumque spithameo, ad medium usque vaginato-foliato, vaginis striatis, inferioribus scabris; foliis duobus tribus lincaribus, canaliculatis, laevibus, scapum subaequantibus; spathae

bivalvis persistentis phyllis lanceolato-subulatis, inferiore umbella breviore, superiore longiore; umbella multiflora; pediolis longitudine variis divaricato-patulis; perigonii suburceolati lutei phyllis oblongis obtusiusculis; filamentis imo perigonio insertis, compresso-linearibus, cuspidatis phyllorum longitudinem dimidio superantibus, parte exserta purpureo-violaceis; antheris peltatis; stylo stamina superante; capsulis obcordato-triquetris, exsiccatione reticulatis, perigonium vix superantibus; seminibus membranaceis semiovatis nigris.

Species perigonii et filamentorum colore pulcherrima.

Hab. Crescit in lapidosis alpinis Olympi bith. latere N. E. ubi legi die 14 Aug. 1850.

Allium olympicum Boiss.! Diagn. Pl. Orient. V. p. 58.

Hab. In Olympi bith. regione abietis crescit et floret Augusto.

Obs. Species *A. montano* Sibth. affinis. Tota planta gracillima. Bulbi parvi. Folia et spatha bivalvis longissima linearia. Pedioli longitudine varii. Perigonii foliola exteriora laete purpurascentia, interiora albido-scariosa.

Allium margaritaceum Sibth.

Hab. Floret Augusto mense in collibus brussianis ad *Demerdesch*, nec non in regione subalpina Olympi bith.

Obs. Planta quam colligimus bulbos parvos tunicis argenteo-scariosis vestitos praebet. Folia extant duo vel tria linearia culmo elato breviora. Umbella ovoideo-globosa; pedunculi subaequales, centrales sursum elati densi, exteriores laxiusculi. Flores parvi, phyllis lineari-oblongis, obtusiusculis, scarioso-argenteis, carina vix viridescenti. Filamenta profunde bifida, laciniis lateralibus capillaceis, crispulis, intermedia breviori plus minusve latiori, decidue antherifera. Stylus linearis capsula oblongata acute-triquetra perigonium aequante triplo brevior.

Planta solitaria, splendore argenteo fulgens quasi luxurians.

COLCHICACEAE.

Colchicum variegatum L.

Hab. Legi speciem performosam in summa regione montis *Parnis*. Floret aestate decedente et autumno.

Perigonium maximum campanulatum, variegato-reticulatum, colore purpureo-roseo lacto praeditum.

COLCHICUM MONTANUM L.

Hab. Cum praecedente.

MERENDERA ATTICA Boiss. !

Hab. Ad radices montis *Cabeti* prope Athenas, ipso in loco in quo a cl. BOISSIERIO primum detecta, hanc pulcherrimam plantam legi vere.

JUNCEAE.

JUNCUS CAPITATUS Weigl. — Koch. Syn. ed. 2. p. 841.

Hab. Speciem perpusillam locis humentibus collinis prope Byzantium una vice legi aestate.

JUNCUS STRIATUS Griseb. Fl. rum. 2. p. 407 an Schousb. ?

Hab. In Olympo bith.

Obs. Synonimon Flor. rumelicae mihi vix dubium, sed planta Olympi collata cum descriptione *J. striati* in SCHULTESII Systemate 7. p. 205 notis nonnullis discrepat; nempe foliis non adproximatis, vaginis culmum ex integro non vestientibus, involucro capitulo saepius longiore.

JUNCUS GLAUCUS Ehrh.

Hab. In Attica ad *Kiephyssum* flumen.

LUZULA CAMPESTRIS Desv.

Hab. Circa Byzantium.

CYPERACEAE.

CAREX GLAUCA Scop.

Hab. In Olympo bith.

CYPERUS BADIUS Desf.
CYPERUS FLAVESCENS L.
CYPERUS FUSCUS L.

Hab. Promiscue crescunt in udis planitiei superior. atheniens.

Scirpus setaceus L.

Hab. In Olympo bith. ad rivulos subalpinos lente fluentes.

Scirpus palustris L.

Scirpus holoschoenus L.

Hab. In agro byzantino.

Schoenus nigricans L.

Hab. In Attica.

GRAMINACEAE.

Saccharum Ravennae L.

Hab. In planitie humidiori atheniense, aestate.

Obs. Insigniter glaucum; caeterum a specie nulla nota diversum.

Andropogon pubescens Vis. Pl. rar. dalm. p. 3.

Hab. Augusti mense specimina corcyrensia, vere atheniensia legi.

Obs. Specimina in saxosis agri atheniensis lecta cum stirpe dalmatica apprime quadrant; caespites tamen majores et magis contractos pruinososque sistunt. E contra specimina quae in Corcyra legi, sunt minus caespitosa minusque pruinosa; spicae magis pubescentes cum tota planta grandiores.

Andropogon Grillus L.

Hab. Circa Byzantium.

Phalaris canariensis L.

Hab. Legi aestate ad vias circa Scutarim asiaticum ubi sponte crescere videtur.

Polypogon Monspeliensis Desf.

Hab. Circa Byzantium.

Lagurus ovatus L.

Hab. In *Hymetto* merid.

Alopecurus vaginatus Pall. ex Kunth Agrostogr. 1. p. 25. — *A. angustifolius* Sm.

Hab. Crescit in regione alpina Olympi bith., ibique limites vegetationis *A. lanati* exacte signat. Legi Aug. mense.

Obs. Folia caulina abbreviato-linguiformia convoluto-subulata, potius quam linearia (Fl. rumel.) in nostris speciminibus adnotantur. Vaginae admodum inflatae et elongatae sunt. Mucrones glumarum haud breves et paleae inclusae ut in *A. lanato*. Spica villosissima sed minus canescens quam in illo.

Alopecurus lanatus Sm. Kunth. Agrost. 1. p. 25.

Hab. Crescit in declivitatibus calcareis cacuminis Olympi bith. ad stationem usque praecedentis speciei descendens, sed non infra. Floret Augusto.

Obs. Graminacearum stirps insignis; foliis more compositarum nonnullarum constanterque niveo-lanatis!

Alopecurus agrestis L.

Hab. Circa Scutarim asiaticum.

Phleum arenarium L.

Hab. In monte *Hymetto* atheniense crescit, statura minima, foliisque tenuibus. Legi aestate.

Phleum tenue Schreb.

Hab. In agro byzantino observavi.

Calamagrostis olympica Boiss. Diagn. 5. p. 70. — Griseb. Fl. rumel. 2. p. 459.

Hab. In pascuis editioribus Olympi bithynici.

Valvulae subaequales, uninerves, lacte purpurascentes, punctato-pellucidae. Palea inferior tenuiter membranacea, superiore vix longior, apice 4-dentata, 5-nervis!; nervo medio supra basim in aristam flosculo longiorem exeunte; caeteris, quorum exteriores validiores! ultra dentes apicis paleae ipsius productis, et inde palea subsimplici lente 2-aristulata.

Caetera ut in diagnosi clarissimi Boissieri. Species insignis!

Agrostis vulgaris Wither.

Hab. Circa Byzantium.

Agrostis verticillata Vill.

Hab. Ad pedes *Pentilici* atheniens.

Aelocarpus litoralis Parlat.

Hab. Circa *Kalamaki* ad isthmum Corinthi.

Digitaria sanguinalis Pers.

Hab. In Attica ad *Kiephyssum*.

Cynodon Dactylon Rich.

Hab. In Attica et circa Scutarim.

Panicum Crus Galli L.

Hab. In Attica ad *Kiephyssum*.

Milium lendigerum L.

Hab. In collibus byzantinis crescit aestate, et tantum caulibus paniculisque brevioribus a planta italica divergit.

Milium coerulescens Desf.
Milium multiflorum Cav.

Hab. Reperi primum haud frequens in monte *Hymetto;* alterum abunde crescit prope *Kiessariany* aliisque locis atheniensis planitiei. Florent aestate.

Holcus lanatus L.

Hab. In agro byzantino floret vere et aestate.

Holcus halepensis L.

Hab. In Attica ad *Kiephyssum*.

Briza maxima L.
Briza media L.

Hab. In Olympo bithynico ambae reperiuntur europeaeis omnino similes, sed statura paullo minores.

Catabrosa variegata Boiss.

Hab. Legi in pascuis sterilibus alpinis Olympi bith. Augusto.

Obs. Gramen humile, panicula pauciflora, pedunculis patentibus vel reflexis, glumis purpureo-sanguineis.

Catabrosa minuta Trin.

Hab. In editioribus Olympi bithynici! Augusto.

Obs. Collata cum speciminibus *Catabrosae minutae* ex Europa australiori et Africa boreali, nulla nota differre videtur. Species a Smithio circa Byzantium, a Buxbaumio in Thracia ex Fl. rumelica jam nunc observata, sed a recentioribus ut videtur praetervisa.

Poa alpina L.

Hab. In Olympi bith. pratis editioribus.

Obs. Variat floseulis basi undique piloso-sericeis, paniculae ramis non semper geminatis; stipulis omnibus longiusculis; foliis latis abbreviatis.

Poa nemoralis L.

Hab. In eodem monte, sed locis humilioribus.

Poa rigida L.

Poa bulbosa L.

Poa annua *pumila*.

Hab. Omnes reperiuntur in agro Byzantino.

Glyceria maritima Mert. et Koch.

Hab. Legi aestate vertente in collibus constantinopolitanis.

Obs. Suberecta, vix glaucescens, paniculae rami erectiusculi haud patuli; palea inferiori tenuiter 5-nervia.

Dactylis hispanica Roth.

Hab. In collibus sterilibus circa Byzantium crescit, ubi nonnullae aliae hispanicae stirpes, forma quidquam mutata, occurrunt. Legi aestate.

Cynosurus echinatus L.

Cynosurus elegans Desf.

Hab. Utramque speciem in *Hymetto* meridionali, Julio vertente, legi.

Festuca pungens R. et S.

Hab. Legi in regione alpina Olympi bith. locis sterilioribus.

Obs. Planta Olympica foliis rigidissimis crassissimis junceis caeterisque *Festucae pungentis* gaudet, et a *F. glauca* Schrad. distinguendam esse existimo. Qui vero *Festucam glaucam, duriusculam*, cum *F. ovina* Linnaei conjungunt profecto errant.

Vulpia myurus Lk.

Vulpia ciliata Lk.

Hab. In pascuis collinis siccioribus circa Byzantium.

Stipa tortilis Desf.

Hab. In *Hymetto* meridionali.

Aristella bromoides Bertol. Fl. ital. I. p. 690. — *Stipa aristella* L. — All. Auct. tab. 2. fig. 4.

Hab. In monte *Parnis* atheniensi legi autumno.

Obs. Collecta cum speciminibus siculis et ligusticis nulla nota essentiali differt! Genus *Aristella* a cl. Bertolonio in Fl. ital. conditum pro hac a reliquis *Stiparum* speciebus tum habitu, cum characteribus desciscente, libenter amplectendum esse concedimus.

Brachypodium ramosum Roem. et Schult.

Hab. Legi in monte *Hymetto* ab Athenis non longe.

Obs. A reliquis generis speciebus, culmis repetite ramosis, ramisque adpressis subfastigiatis, foliorum convolutorum distiche patentium tenuitate et rigiditate distinctum. Folia superiori pagina sub vitro dense hispidula. Locustae in speciminibus nostris 6-7-floris, flosculis adproximatis; palea inferior arista brevissima rigidula mucronata.

Brachypodium pinnatum γ. *coespitosum* Koch. Syn. p. 944.

Hab. In collibus byzantinis.

Huc forte ducendum *Brachypodium ramosum* Fl. rumelicae.

Bromus intermedius Guss.

Hab. In monte *Hymetto* atheniensi legi aestate. Variat racemo simpliciusculo paucifloro, foliis et culmis minus pilosis.

Bromus erectus L.

Hab. In Olympo bithynico. Spicae compressae et magis laxae quam in stirpe italica.

Gaudinia fragilis P. B.

Hab. Crescit in pascuis siccis constantinopolitanis, cui loco et cl. Grisebach refert.

Spicae articulationes multo minus fragiles quam in stirpe italica observantur. Floret aestate.

Triticum glaucum Desf.

Triticum repens L.

Hab. In aggeribus sterilioribus ad Bosphorum frequenter occurrunt aestate.

Elymus crinitus Schrb.

Hab. Legi in collibus byzantinis vere decedente et in m. Hymetto.

Obs. In speciminibus byzantinis a me observatis, characteres speciei paullo aliter se praebent quam in planta a cl. Grisebachio descripta; folia nempe lineari-setacea, convoluta, facie glabrata! Spicae retrorsum valde scabrae. Species aliunde pro loco maxime variabilis, et revera in monte Hymetto atheniensi ipsius speciei complura exemplaria inveni, quae fructu maturescente spicas omnino glabras et folia multo latiora praebent.

Hordeum distichum L.

Hab. Prope *Katikioi* (*Chalcedonia*) ad agrorum margines aestate.

Statura plus quam orgyalis; spica abbreviata; radix minus quam in sequenti specie bulbosa.

Hordeum bulbosum L.

Hab. In cultis locisque apricis byzantinis.

Secale villosa L.

Hab. Ultra Scutarim.

Lolium perenne L. varietas.

Hab. Legi in siccioribus locis collinis circa Byzantium.

Obs. Haec ubique pervariabilis species, illa regione formam contractam, caules adscendenti-tortuosos, duros, spicas abbreviatas offert.

Aegilops Notarisii mihi.

Ae. Spica oblonga, valvulis spicularum inferiorum fertilium bifidis, segmento antico dentiformi, postico in aristam valvulis ipsis plus duplo longiorem producto; valvulis spiculae terminalis sterilis integris, angustis, subulato-aristatis, spicam longitudine superantibus; palea inferiore acute bicuspidata.

Hab. Crescit rara in sylvulis collinis circa *Ciamlicia* ultra Scutarim asiaticum. Legi die 25 Junio 1850.

Planta caespitosa. Radix fibrosa, annua? Culmi geniculati, striato-sulcati, geniculis badiis. Vaginae laeviter inflatae merithallos ultra medium amplectentes. Folia linearia subinvoluta, vaginis dimidio breviora, pilis rigidulis patulis adspersa, superiora nuda; omnia ad vaginarum faucem utrinque auriculata, auriculis nervosis, inflexis, albidis; ligulae abbreviatae, truncato-lacerae. Rachidis haud fragilis articuli inferiores 2, 3, abbreviati steriles. Spiculae plerumque 3: inferiores adpressae ventricosae 3-4-florae, flore supremo abortiente: terminalis sterilis. Valvulae nervosae bifidae, segmento antico ovato, ovatove-lanceolato, postico angustiore, in aristam 2-3-nerviam scaberrimam rigidam attenuato. Valvulae spiculae terminalis tabescentis integrae, e basi lanceolata sensim subulato-aristatae spica longiores. Paleae subchartaceae, harum inferior 5-nervis ex apice contracto longe bidentatae. Caryopsis cymbiformis carina bicostata, superne marginato-coronata, barbataque.

Obs. Facies *Aegilopsis caudatae* L. (*Ae. cylindrica* Host. Gram. austr. 2. tab. 7.), sed palearum inferiorum forma ab illa prae ceteris diversa.

Aegilops triuncialis L. — Kunth Agrost. 1. p. 458.

Hab. Abunde crescit in herbidis collinis prope Byzantium. Tota aestate floret.

Obs. Formam caespitosam et staturam humilem praebet. Arista intermedia longitudine summe variat; quandoque, etiam in glumis inferioribus, laterales aequat, rarissime deest; quo charactere a specie Linneana divergit.

Avena fatua L.

Hab. Circa Scutarim.

Psilurus nardoides Trin.

Hab. In declivitatibus collinis sterilioribus prope Byzantium haud frequens reperitur. Legi quoque, sed perpusillum, in monte *Hymetto* atheniense.

Rottboellia incurvata L. fil.

Hab. In sterilibus constantinopolitanis crescit aestate.

NARDUS ARISTATA L.

Hab. In pascuis editioribus Olympi bith. crescit, sed minus frequens quam in nostris regionibus. Floret tota aestate.

SCHISMUS MARGINATUS P. BEAUV.

Hab. In collibus atheniensibus, circa *Philopappi* monumentum legi.

FILICES.

CHEILANTHES ODORA SWARTZ.

Hab. Inter saxa montis *Hymetti* atheniensis haud raram et minus furfuraceam quam planta dalmatica reperi.

NOTHOCLAENA LANUGINOSA DESV.

Hab. Filix perelegans et rupium fissuras prope *Piraeum* athen. rarissime incola. Legi Martio mense fructificatione adhuc carente.

CETERAC OFFICINARUM W.

Hab. In monte *Parnis* atheniens.

ASPLENIUM TRICHOMANES L.

ADIANTUM CAPILLUS L.

Hab. In monte *Pentilico* ath. ad rupium fissuras humentes.

ICONUM EXPLANATIO

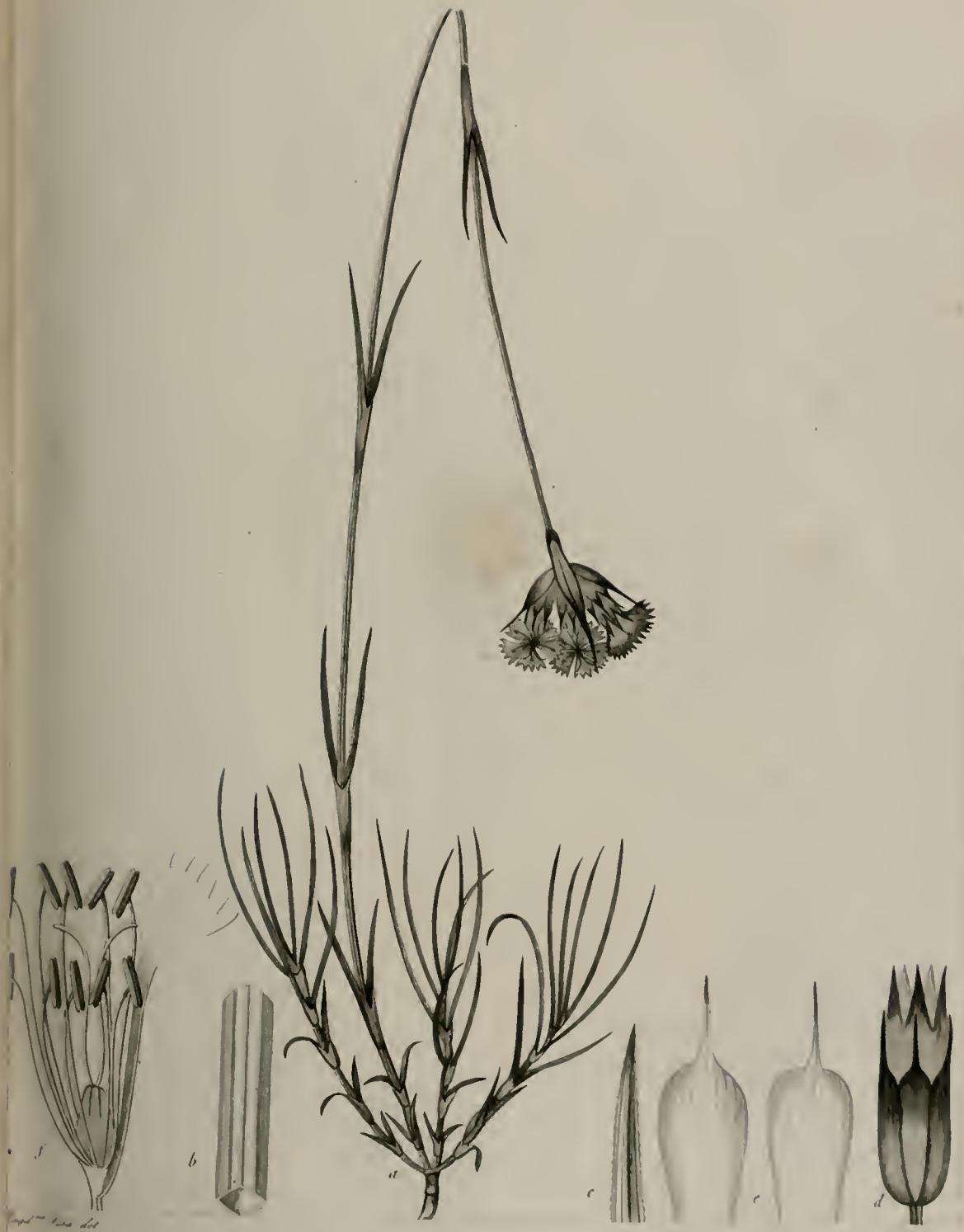
TAB. I. — RANUNCULUS CAMOZZIANUS.

a. Torus et carpophorus, staminibus duobus et carpella praediti, cum sequentibus multoties aucti; *b*. carpella; *c*. syncarpus; *d*. petalum; *e*. calyx quinquesepalus.

TAB. II. — DIANTHUS CIBRARIUS.

a Ramulus e caespite decerptus; *b*. caulis fistulosi sectio, cum sequentibus multoties aucta; *c*. folii inferioris summitas; *d*. calyx bracteis circumdatus; *e*. bracteae calycinae magis auctae; *f*. stamina cum pistillo et petalo.

BRITISH
NATURAL HISTORY.



Dianthus Cibrarius

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

Fig.ª 1. Lycopodium Mexicana Fig.ª 2. Polygonum Linnaeanum

Tanner Lith. E. Doyen

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 1. Lamium Wangenheimianum. Fig.a 2. Orobanthus Turnbulli.

NATURAL HISTORY

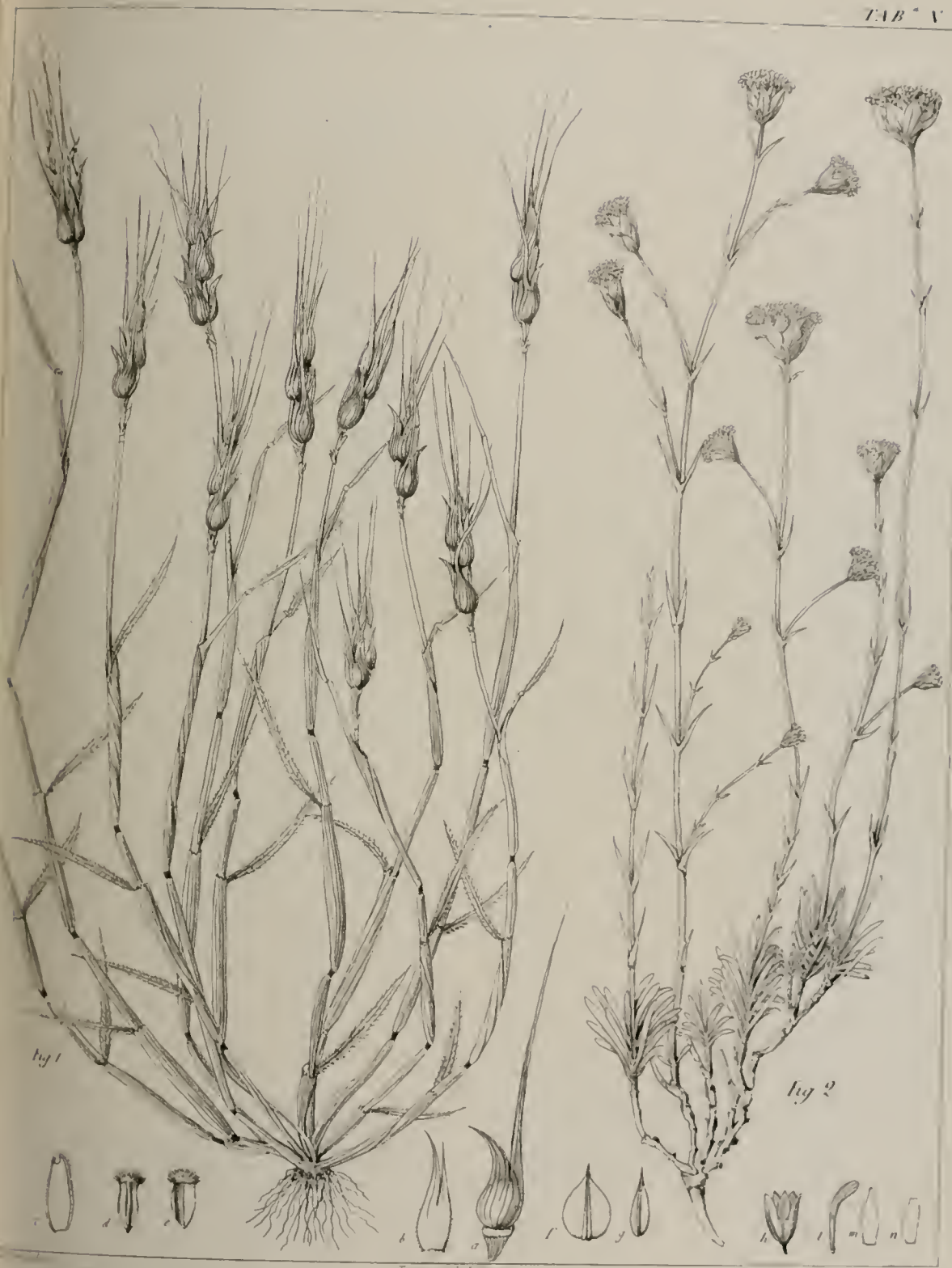
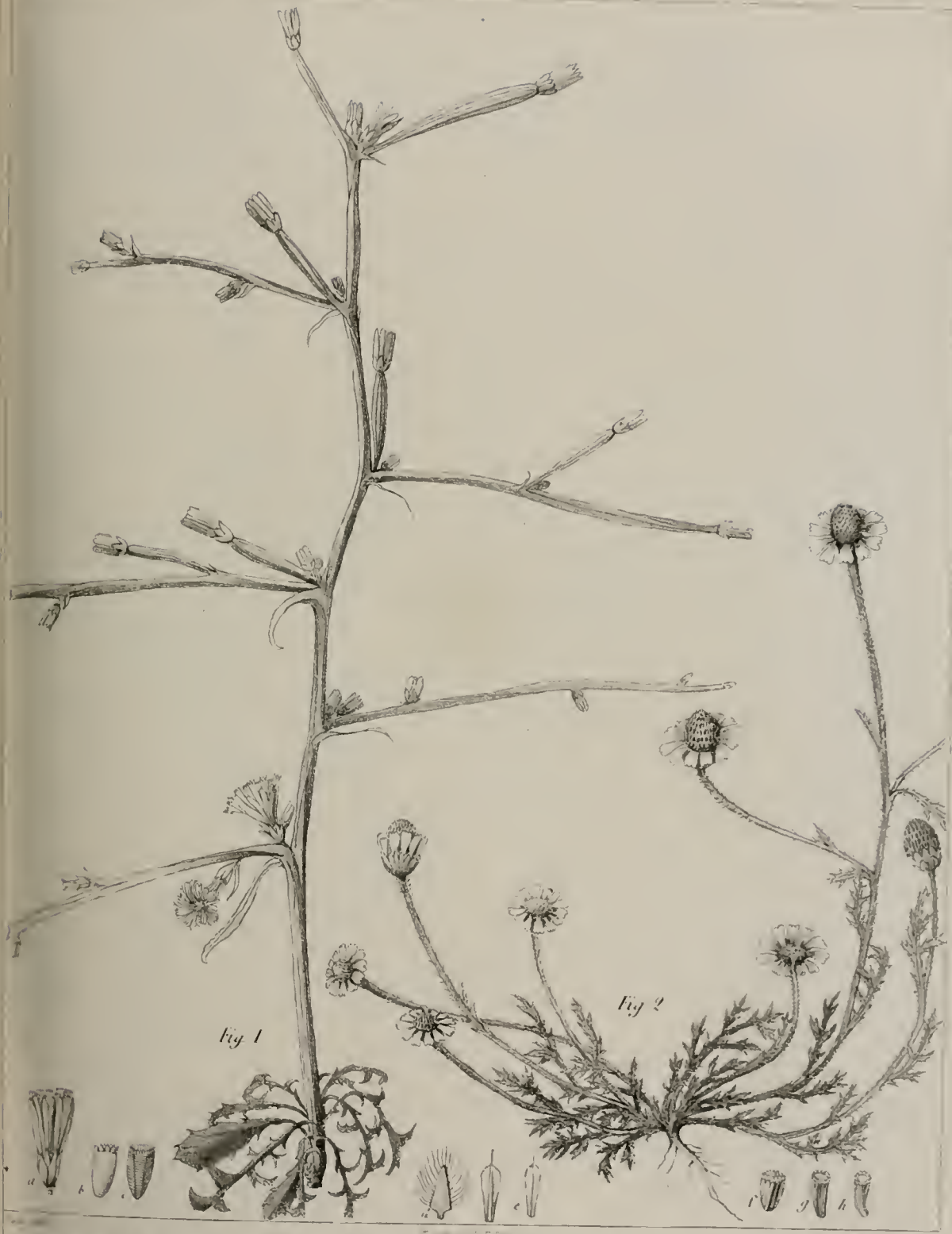


Fig.ª 1 Aegilops Velarisii

Fig.ª 2 Cuneca Cyaneatarsana

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



Fig^a 1. Cichorium byzantinum

Fig^a 2. Anthemis Osmondiana

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

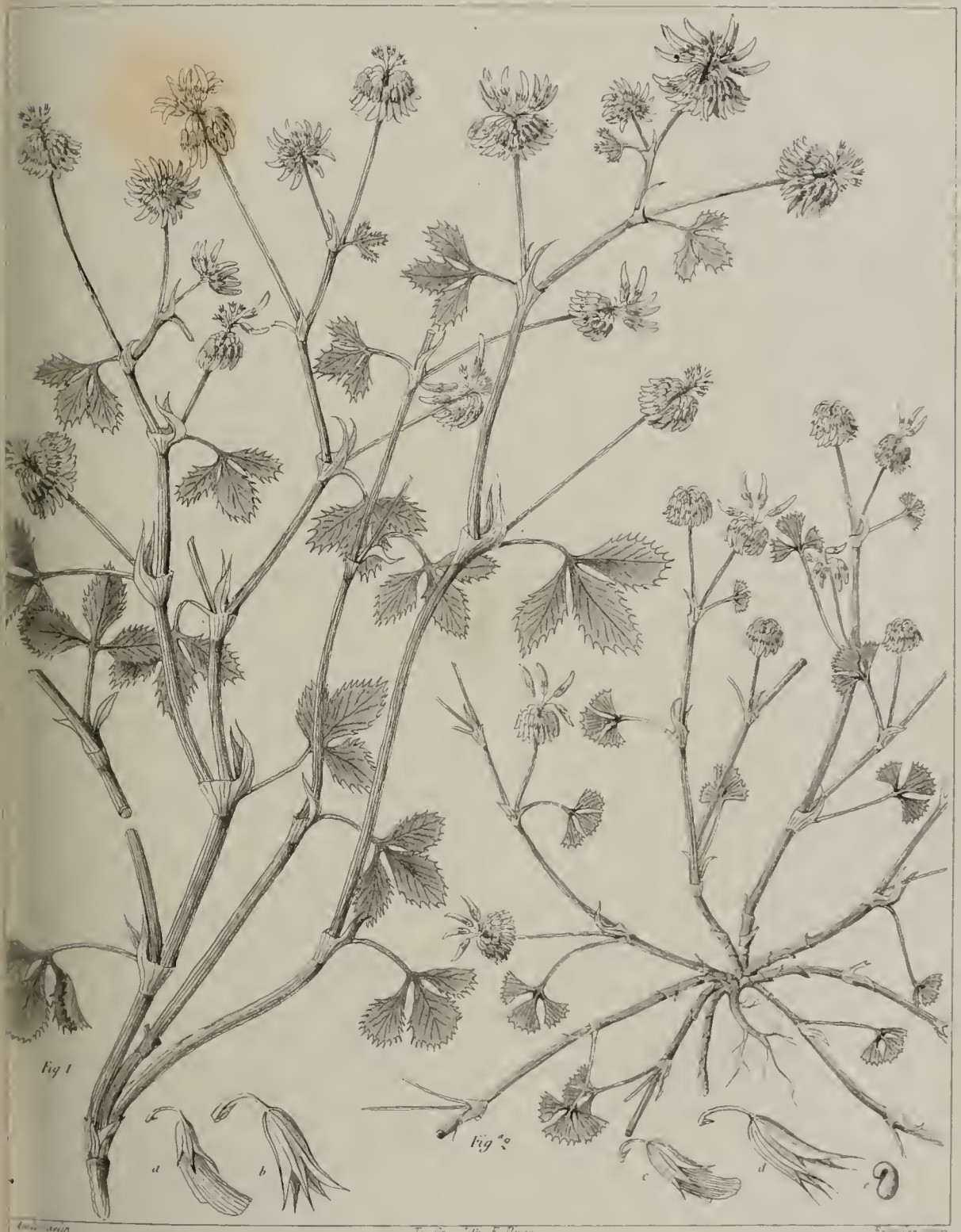


Fig.a 1 Crepidium Monophyllanum Figa 2 Crepidium Petiolare

NATURAL HISTORY

Taurine, Lith. F. Doyen

Fig.a 1. Allium Webbii

Fig.a 2a Ranunculus Bucoviana

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

ANTHICINI

INSULAE CYPRI ET SYRIAE

AUCTORE

PROF. EUGENIO TRUQUI

Exhib. die 15 april. 1855

PRAELEGENDUM.

Insecta Coleoptera a me in insula Cypro et in Syria abhinc paucis annis lecta observans, statim quae ad familiam *Anthicinorum* referrentur, specierum nondum descriptarum numero miratus sum. Facile eas novi, cl.ⁱ LAFERTÉ opere usus, quod *Monographia Anthicorum* inscribitur. Commercio autem litterarum cum eodem Auctore suscepto, impensius huic familiae operam dare impulsus fui, qua attente excussa, seriem specierum huc usque a me in dictis locis repertarum ordine disposui. Hic igitur enumerationem praebeo *Anthicinorum* omnium a me relatorum, adjectis tum cuique speciei observationibus, tum novarum descriptionibus et iconibus.

In Syria, paucos menses commoratus, non est quod dicam me plerasque *Anthicinorum* species in ea regione degentes invenisse: imo procul dubio numerus specierum Syriae quem hic praebeo duplo et ultra serius augebitur, cum quis illa locorum attente perquirat. At in insula Cypro mihi diutius insecta venari contigit, et quanquam certe omnes hujus familiae species non detexerim, tamen affirmare valeo paucas tantum adhuc detectum iri, cum quinque annorum lapsu in ea regione specialibus atque indefessis investigationibus operam dederim.

Caeterum ex specierum numero quas recensco semper evidentius patet

faunam insularum magis quam continentium terrarum inopem esse, cum ex quadraginta tribus speciebus a me recensitis, undetriginta in Syria paucis mensibus, in insula Cypro vero quinque annorum attenta perlustratione viginti septem tantum collegerim. Ex quadraginta tribus speciebus, 13 pariter in Syria et in insula Cypro occurrunt, 16 Syriae, 14 autem insulae Cypro sunt peculiares.

Ut species rite cognoscantur, primum semper allegavi Auctorem qui eas descripsit: sed qui de ipsis quidquid scriptum fuerit percallere velit, opus, quod supra memoravi cl.ⁱ Lafertè et illud cl.ⁱ Schmidt, in ephemeride Stetinensi anni 1842 insertum, adire oportet. Quapropter, inutile duxi ipsorum loca repetitis vicibus afferre; et tantum attuli, cum primo speciem aliquam descripserint. Animadvertendum vero, opus cl.ⁱ Lafertè, per fasciculos, paginisque interruptis, anno 1847 editum, rursus anno 1848 sub jam dicta inscriptione collectum fuisse, addito supplemento, paginisque continuis donatum. Opportunius igitur, ratione paginarum, visum est hac secunda editione uti, relicto anno 1847 ad indicandum quo tempore species in lucem prolata fuerit. Idem dicendum de opere expeditionis, scientiarum causa, gallicae in Algiriam, cujus articulatorum volumina anno 1849 absoluta, jam pro parte Coleopterorum, ab anno 1846 edi coeperant.

Cl.ⁱ Lafertè exemplum secutus, horismologiae entomologicae quaedam addidi, quorum explicationem hic tradens, hujus scripti intelligentiae inserviam.

Caput retro prominulum: ita dictum cum postice supra collum prominet, quod accidit quacumque vice collum sub margine supero capitis insertum est.

Fossula occipitalis: quae postice intra summum verticem et occiput in quibusdam speciebus occurrit.

Cervicula: processus brevis prothoracis omnino antice situs, ex quo collum exit, cervici amphorae non absimilis.

Colliciae: sunt sulculi hinc inde basi prothoracis *Notoxorum* siti, tomento serico dense induti.

Torruli: ita dictae prominentiae basi elytrorum nonnunquam conspicuae.

Pygidium: lamina analis, in maribus plerorumque Anthicorum praesertim conspicua, segmento abdominis superiori ultimo adhaerens.

Benevole, quaeso, accipite hoc primum coleopterologiae Cypriae specimen, quam paulatim pro viribus meis illustrare mihi in animo est.

NOTOXUS

Geoffroy, Hist. des Ins. I. (1762) p. 356.

1. Notoxus brachycerus.

Monocerus brachycerus. Faldermann, Fauna entomol. Transcaucas. II. (1837) p. 106.

Seidae (antiqua Sidone) in Syria D.r Gaillardot domi legit et benevole communicavit.

2. Notoxus excisus.

Kuester, Käfer Europa's. XIII. (1848) 68.

Species a *Notoxo monocerote* egregie distincta. Quinquaginta et ultra specimina e Cypro et Syria relata omni puncto congruunt cum hispanicis et gallicis quae in collectione Dejeanii vero *monoceroti* immixta erant. Processus thoracicus in *Notoxo exciso* constanter brevior, lateribus dilatatus, ejusdemque crista, elevata, plana, distincte marginata, abrupteque antice truncata. In *Notoxo monocerote* processus longior, lateribus parallelis, ejusdemque crista antice demissa, margineque ibi plerumque granulis confuso. Magnitudine *Notoxus excisus* magnopere variat: a o^{m}, oo35 ad o, oo55. Insuper pubescentia, praesertim capitis pronotique, multo minus densa, colore dilutiore, maculisque nigris perraro coalescentibus etiam distinguendus. Color pronoti in syriacis et cypriis omnino laete rufus, in hispanicis et gallicis antice paulo infuscatus, in specimine vero Rossiae meridionalis omnino fuscus.

Notoxo mauritanico Laf. colore propior, at processu thoracico aliter sculpto bene distinctus.

In montibus insulae Cypri prope pagum Agrò, supra corylos, primo vere, copiose legi. Retuli etiam Beryto Syriae, ubi pariter, quanquam supra alios frutices, frequens occurrit.

3. Notoxus trifasciatus.

Rossi, Mantissa insect. I. (1792) p. 45.

Notoxus monoceros, var. β. Rossi, Fauna Etr. I. (1790) p. 139. Tab. II. fig. XIV.

Notoxus cornutus. Fabr. Ent. Syst. I. (1792) p. 211.

Seidae (antiqua Sidone) in Syria D.r Gaillardot domi simul cum *Notoxo brachycero* legit, et amice tradidit. In Cypro ipse prope pagum Lefca, in floribus tamaricis, mense Junio, bina specimina typica inveni. Syriaca majoribus hujus speciei, quae praesto, speciminibus etiam majora, o^m,0045 metiuntur, et ad varietatem *b* cl.i Laferté pertinent.

Nomen a Rossio huic speciei traditum restituo, cum primus ejusdem iconem praebuerit, cumque nomen Fabricii, eodem anno quo Rossii in lucem editum, jam antea (1787) a Thunbergio speciei Capensi tributum fuerit. Nescio quare cl. Laferté, prioratus legem sedulo semper sequutus, cum pagina 37 operis sui Rossium primum speciem indicasse, et pagina 55 Fabricii nomen a Thunbergio jam adhibitum fuisse animadvertisset, nomen Rossii postposuerit.

4. Notoxus syriacus.

Laferté, Monogr. Anthic. in supplem. (1848) p. 298.

Hujus speciei bina specimina mascula Hierosolymis anno 1846 retuli. Nuper autem D.r Gaillardot femineum specimen Seidae (antiqua Sidone) lectum donavit, quod a marc in collectione cl.i De Brême, nunc R. Taurinensis Musei, servato, statura majore, pronoto punctis nonnullis sparsim impressis, processu duplo latiore et fortius rugoso, elytrisque apice conjunctim rotundatis, non spinosis, distinguitur.

Lapsu calami dictum est in descriptione cl.i Laferté hanc speciem majoribus *Notoxi trifasciati* individuis magnitudine parem esse, cum revera hujus minora tantum aequet, ut patet ex ipsa mensura ab auctore in diagnosi allata.

5. Notoxus rubetorum n. sp.

Rufo-piceus, nitidus, elytris fortiter punctatis, parce pubescentibus et seriatim setulosis, nigris, flavo late bifasciatis, antennis pedibusque ferrugineis, femoribus infuscatis. Long. 0, 0025 — 0, 003. Lat. 0, 0009.

Variat capite prothoraceque nigris, vel plus minusve intense piceis, vel laete rufis, pedibus omnino rufis.

♂, *elytris apice truncatis, angulo externo subspinosis.*

♀, *elytris apice conjunctim rotundatis.*

In eadem sectione cum *Notoxis numidico* et *syriaco* locandus. Caput rufo-piceum, nitidum, levissimum, parce pilosum, vix latitudine longius, postice rotundatum, fronte plana, inter oculos longitudinaliter impressum: antennis omnino rufis, articulo ultimo fusiformi praecedentibus duobus simul sumptis subaequali. Prothorax rufo-piceus, capite paulo latior, globosus, basi fortiter marginatus; processu modice elongato et lato, rugoso, margine antico levi, laterali denticulato; crista distincta, antice demissa, marginibus denticulatis, interne levi; supra levissimus et nitidissimus, admodum parce pilosus; colliciis profundis lanugine sericea dense vestitis. Scutellum minutum triangulare, rufo-piceum. Elytra antice prothoracis basi fere sesqui latiora, latitudine duplo longiora, lateribus parallelis, depressiuscula, torulis et pone torulos depressione notata, apice pro sexu vel abscissa vel rotundata, nitidiuscula, sat fortiter, basi parcius apiceque levius, punctata, parce pubescentia, et seriatim setosa, nigra, fasciis binis latis, altera ante medium, altera pone medium, flavis. Abdomen nigrum: pedes rufo-testacei, femoribus infuscatis. — Mas elytris apice oblique caesis, angulo externo caesurae acuto, subspinoso; femina elytris apice conjunctim rotundatis, processu thoracico latiore distinguuntur.

Variat *dilutius:* *a.* Capite rufo testaceo.

b. Capite prothoraceque laete rufo-testaceis.

obscurius: *a.* Capite, prothorace, scutelloque penitus nigris.

Beryti pulcherrimam hanc speciem in rubetis, praesertim supra ipsos rubos, mense Augusto legi. D.r Gaillardot quaedam specimina Seidae (antiqua Sidone) lecta dedit.

Ab affinibus *Notoxis numidico* et *syriaco* seriebus setularum in elytris

distinctu facilis. Praeterea a *numidico* elytris fortiter punctatis et parce pubescentibus, fasciis flavis latis et integris: a *syriaco* statura minore et angustiore, punctis fortius impressis, fasciisque elytrorum saturatius flavis, suturaque non interruptis, dignoscendus.

Notoxo piloso Laf. ex Africa australi etiam statura, sculptura et colore propior, sed, praeter sexus differentiam, setulis seriatim ordinatis pronotoque impunctato probe distinctus.

MECYNOTARSUS

Laferté, Monogr. Anthic. (1847) p. 57.

1. Mecynotarsus bison.

Notoxus bison. Olivier, Encycl. méth. Ins. VIII. (1811) p. 394.

Ut melius haec Olivierii species a *Mecynotarso servicorni* distingui possit, notas quibus ab isto sejungitur tradam. In *M. bisonte* caput minus convexum, angustius et elongatum, semper, etiam in speciminibus magis fuscis, testaceum, omnino leve, nitidissimum, admodum parce pubescens, antennis longioribus: pronotum subtiliter punctatum, parum pubescens, paulo longius, processu breviore, hoc basi magis angustato, apice minus rugoso, crista superiore magis distincta: elytra angustiora et subparallela, minus dense punctata, admodum parce pubescentia, nitida, fusca, margine plus minusve testaceo, saepe testacea sutura tantum infuscata: corpus subtus pedesque testacea.

Prima hujus speciei individua amice cl.^{s} D. Gobbi, anno proxime elapso, cum Beryti noster esset proxenus, tradidit. Deinde frequenter ibidem ad fluminis ostium, quod *la Fiumara* dicunt, arena quam ocissime cursitantem, Augusto mense, inveni.

Mecynotarsus a D.^{o} Melly in Aegypto lectus (*Ent. Zeit. v. Stettin, XIII.* 1852. *p.* 71), huic forsan est referendus.

Mecynotarsus bison cl.^{i} Laferté, ipso benevole admonente, ab hoc syriaco prorsus est distinctus; et vel *Mec. servicorni* jungendum esse, vel aliam constituere speciem puto. Typicum *Mecynotarsum bisontem* excidisse, eidemque aliam speciem suffectam fuisse, ex ipsis descriptionibus Olivierii et Lafertei comparatis patet.

MYRMECOSOMA

MANNERHEIM, in Bull. de la Soc. Impér. des Natural. de Moscou Tome XIX, I.ère partie (1846), pag. 227.

1. MYRMECOSOMA COERULEIPENNE.

Anthicus coeruleipennis. LAFERTÉ, in LUCAS, Hist. nat. des anim. artic. de l'Algérie. II. (1846) p. 369.
Formicomus coeruleipennis. LAFERTÉ, Monogr. Anthic. (1847) p. 73.
Formicomus cyanopterus. LAFERTÉ, Monogr. Anthic. (1847) p. 74.

Beryti passim occurrit sub resectis cactorum foliis, aliarumque plantarum reliquiis, in locis humidis.

Varietas, quam cl. LAFERTÉ nomine *Formicomi cyanopteri* disjunxit, simul cum typico *Myrmecosomate coeruleipenni* degit, quapropter ex specierum numero prorsus expungenda. Indiscriminatim occurrunt specimina pedibus abdomineque rufis, vel femorum apice abdomineque nigris: haec tamen minus frequenter obvia.

2. MYRMECOSOMA PEDESTRE.

Notoxus pedestris. ROSSI, Mantissa Ins. I. (1792) p. 45. Tab. II. fig. C.

In Syria passim, in insula Cypro rarius legi.

Carabus pedestris ROSSII (Fauna Etr. I. p. 224) quem cl. LAFERTÉ huc refert, e synonymis hujus speciei delendus, cum nullomodo, sive loco in genere *Carabo* inter *Dromios*, sive « *punctis duobus pellucidis*, « *altero ad basim, altero ad apicem* » *Myrmecosomati pedestri* referri queat. Nihili erit igitur *Carabus pedestris* a ROSSIO sui *Notoxi pedestris* synonymon factus, nec flocci facienda emendatio ab eodem auctore in Mantissa ad calcem II voluminis adjecta.

3. MYRMECOSOMA NINUS.

Formicomus Ninus. LAFERTÉ, Monogr. Anthic. (1847) p. 79.

In insula Cypro humi currentem interdum legi. Semel Beryti, et semel Tarsi Ciliciae inveni. Mas, haud feminis rarior, femoribus anticis subtus

angulatis, subspinosis, pygidio conspicuo et fortiter exciso, genitalibus omnibus conspicuis facile distinguendus.

4. Myrmecosoma jonicum.

Formicomus jonicus. Lafertè, Monogr. Anthic. (1847) p. 81.

Supra frutices in Syria et in insula Cypro ubique frequentissimus.

ANTHICUS

Paykull, Fauna Suecica, I. (1798) p. 253.

Manipulus I.

1. Anthicus glabellus n. sp.

Nitidissimus, capite valde convexo piceo: prothorace binodoso, rufo-testaceo, lobo antico levi, postico rugoso: corpore subtus, elytris pedibusque testaceis, illis fascia media apiceque nigris. Long. 0, 003. Lat. 0, 001.

Caput valde convexum, rotundatum, epistomate ruguloso, fronte parce et fortiter punctata, linea longitudinali media verticeque toto omnino levibus, glabrum, nitidum, pilis nonnullis minimis, nonnisi oculo fortiter armato observandis, rufo-piceum; oculis modice prominulis: antennis modice elongatis, articulo secundo bis tertiam sequentis partem aequante, septimo et sequentibus sensim brevioribus et crassioribus, ultimo fusiformi praecedentibus duobus simul sumptis subaequali; una cum palpis, piceo-testaceis. Prothorax capite angustior, laete rufo-testaceus. Pronotum latitudine sesquilongius, glabrum, constrictione postica bipartitum; pars antica globosa, lateribus valde prominulis, levis, subtilissime et disperse punctulata; pars postica multo angustior et depressior, rugosa, angulis rectis sed omnino in latere sitis, linea marginali interna ad similitudinem ephippii semicirculari fortiter elevata; spatio inter hanc lineam et marginem externum prope angulos posticos latiore et leviore: cervicula brevi sed distincta. Scutellum rotundatum, rufescens et levissimum. Elytra antice prothoracis basi duplo latiora, latitudine propria plus duplo longiora, angulis humeralibus rectis, pone humeros haud depressa, postice dilatata et conjunctim rotundata, parum depressa, levissima et nitidissima; vix

oculo fortiter armato puncta nonnulla subtilissima pilis minimis instructa observantur: testacea, fascia media maculaque subapicali, per suturam paulo adscendente, nigris. Corpus subtus dilute rufo-piceum, pedibus testaceis. Femora simplicia; tarsi lineares, anteriores quatuor parum elongati, articulo primo anticorum sequentibus duobus simul sumptis aequali, his inter se et quarto aequalibus; postici valde elongati, articulo primo ultimis tribus simul sumptis aequali, secundo tertio plus duplo longiore. Nullum animadverti sexus discrimen in duobus speciminibus quae prae manu sunt.

Ineunte Septembre Beryti bina specimina legi. Horum alterum est immaturum, ex quo speciem tunc temporis gigni conjicitur. Individua capite penitus nigro inventum iri opinor.

Inter *Leptaleos*, primum *Anthicorum* manipulum juxta cl. Lafertei distributionem, speciem istam pono, quanquam capite fortiter convexo (quale in nonnullis *Myrmecosomatibus*, in *Myrmecosomate pedestri* ex. gr., atque in nonnullis *Anthicis* aliorum manipulorum, in *Anthico exili* ex. gr., reperitur), elytris postice dilatatis, femoribusque, ut etiam in *Anthico Chaudoirii*, linearibus hinc amoliatur. Elytris dilatatis ad *Anthicum triguttatum* Laf. propius accedit. Serius, cum examini subjicienda plura exstiterint individua, forsan haec species sejunctim locanda erit.

2. Anthicus triguttatus.

Laferté, Monogr. Anthic. in supplem. (1848) p. 299.

Superioribus annis Damasco Syriae retuleram: postea nusquam alibi visus.

3. Anthicus Chaudoirii.

Formicoma Chaudoiri. Kolenati, Meletem. entomol. III. (1846) p. 34. Tab. XIII. fig. 6.

Juxta rivulos, aestivo tempore, sub lapidibus vel per arenam madefactam ultro citroque cursans invenitur. Cypri prope pagos Lefca et Defterà legi ad rivulorum ibi fluentium ripas. Beryto etiam retuli.

Manipulus II.

Nullam speciem hujus manipuli inveni.

Manipulus III.

4. Anthicus erro n. sp.

Rufo-testaceus, nitidus, capite abdomine elytrisque obscure piceis, his parallelis parce punctatis tenuiterque pubescentibus, macula magna basali piceo-testacea, fasciaque postica albida, prothorace basi fortiter angustato. Long. 0,0019. Lat. 0,0006.

Caput subquadratum, angulis posticis fortiter rotundatis, fossula occipitali parva notatum, obscure piceum, levissimum et nitidissimum, punctulorum utrinque duplici serie prope oculos, his punctulis inter antennas fortius impressis, pilosque breves gignentibus: antennis breviusculis, submoniliformibus praesertim apicem versus, articulis secundo tertioque aequalibus, testaceis, apice fuscis. Pronotum capitis latitudinem aequans, latitudine quarta parte longius, postice fortiter coarctatum, lateribus antice sat prominulis: vix antice punctis nonnullis sparsis, nitidissimum; postice punctis impressis ad latera obsitum; laete rufo-testaceum, parce et tenuissime pubescens: cervicula longiuscula, distincta. Elytra prothoracis basi plus quam sesqui latiora, latitudine plus duplo longiora, angulis humeralibus rectis, lateribus parallelis, omnino complanata, torulis vix conspicuis; basi sat fortiter at parce, dein gradatim, usque ad apicem levem, levius punctata, subtiliter pubescentia: tertia parte antica piceo-testacea, deinde nigro-picea, fascia albida in triente postico a sutura nigra divisa. Abdomen nigrum, pedibus dilute testaceis. — Mas abdominis segmento ultimo superiore leviter emarginato, pygidio longiusculo, subquadrato. Femina segmento ultimo rotundato.

Variat colore dilutiore: a. Elytris dilutius fuscis; capite pronotoque dilutioribus.

b. Colore piceo-testaceo elytrorum postice in nigredinem magis excurrente: nigredine media vix sequentis fasciae albidae latitudinem aequante.

Colore obscuriore: c. Macula scutellari plus minusve late fusca, nonnunquam basim picco-testaceam dividente.

d. Ut varietas *c*, at pronoto fuscescente.

Beryti frequentissima species quacumque arena madefacta adsit. Perpetuo agitatur et quam ocissime currit.

Elytrorum lateribus parallelis, pronoto postice fortiter angustato, femoribusque leviter incrassatis haec species in manipulo tertio locum obtinet. Attamen puto hunc tertium manipulum cl. Domini Laferté non satis distinctis characteribus innixum esse ut a sequente separetur. Nostra species ad instar annuli hos manipulos alterum alteri jungit.

Anthicus erro habitu et colore *Anthico Chaudoirii* similis, facile ab eodem statura minore, pronoto aliter constructo, elytrorum punctis subtilioribus, fasciaque postica albida non communi distinguitur. Proximus esse videtur et ab *Anthico quadrillo* Laferteı, descriptione tantum mihi noto, sed prothorace postice punctato, cervicula valde conspicua, femoribusque testaceis satis distinctus.

Manipulus IV.

5. Anthicus ustulatus.

Laferté, Monogr. Anthic. (1847) p. 124.

Laete rufo-ferrugineus, nitidus, parcius punctatus, tenuissime pubescens: capite subquadrato, postice medio nullo modo angulato: prothorace antice subgloboso, lateribus prominulis: pedibus elytrisque dilutioribus, his fascia media apiceque nigris. Long. 0,0022—0,0026. Lat. 0,0008.

Ut melius haec species a sequentibus distingui valeat, cl. Laferté diagnosim reformavi. Praeterea ejusdem auctoris descriptioni varietatum series addenda.

Varietas *a*. Dilute rufo-ferrugineus; elytris dilutioribus, macula laterali apicalique nigris, ut in *Anthico Bremei* sitis, sed minus distincte circumscriptis.

b. Plus minusve obscure rufo-ferrugineus: maculis ut in praecedente, sed latioribus.

c. Obscure rufo-ferrugineus: elytris nigris, basi fasciaque transversa postica testaceis: colore testaceo basis plus minusve retro dilatato, fasciaque postica plus minusve distincte circumscripta.

Nonnulla ab insula Cypro retuli specimina hujus speciei quam semper disjunctim modo volantem, modo sub lapidibus inveni. Beryti etiam

individuum legi fascia postica testacea distinctissime circumscripta, et a sutura nigra, ut in *Anthico errone*, divisa.

6. Anthicus fatuus n. sp.

Laete rufo-ferrugineus, opacus, creberrime punctatus, tenuissime pubescens: capite subquadrato, postice medio nullo modo angulato: prothorace antice minus globoso, nonnunquam etiam depressiusculo, lateribus rotundatis, prominulis: pedibus elytrisque dilutioribus, his fascia media apiceque nigris. Long. 0,0023 — 0,0028. Lat. 0,0008.

Caput subquadratum, postice levissime rotundatum at medio nullo modo angulatum, convexum, creberrime fortiterque punctatum, obscure rufo-ferrugineum, opacum, tenuiter pubescens: oculis majusculis et prominulis: antennis dilutius rufis. Prothorax capitis latitudinem aequans, latitudine quarta parte longior, parum convexus, ponc medium fortiter coarctatus, lateribus antice rotundatis, prominulis, postice leviter sinuatis, basi fortiter marginatus, cervicula prominente: obscure rufus, subnitidus, creberrime punctatus, tenuiterque pubescens. Scutellum minutum, triangulare, obscure rufum. Elytra antice prothoracis basi duplo latiora, latitudine duplo longiora, convexiuscula, torulis et depressionibus nullis, nitidiuscula, subtiliter punctata tenuiterque pubescentia; fulva, macula laterali lata apiceque indeterminatim nigris. Abdomen nigrum, pedes rufi. — Mas pygidio conspicuo.

Variat dilutius, elytrorum apice omnino concolore. Inventu rara et difficilis species, cujus in insula Cypro perpauca individua modo volatu, modo sub lapidibus legi. Specimen etiam Beryto retuli.

Praecedenti *Anthico ustulato* Laf. ut ovum ovo similis, et vix nisi capite pronotoque multo crebrius punctatis, opacis, distinguenda. In quibusdam speciminibus pronotum antice minus globosum et fere depressiusculum videtur. Praeterea varietates obscuriores, ut in *Anthico ustulato*, in hac specie non occurrerunt.

7. Anthicus incomptus n. sp.

Laete rufo-ferrugineus, subnitidus, crebre punctatus, tenuiterque pubescens: capite subquadrato, postice medio nullo modo angulato: pro-

thorace lateribus anticis rotundatis, vix prominulis: pedibus elytrisque testaceis, immaculatis. Long. 0,0024. Lat. 0,0008.

Praecedentibus duabus haec species adeo similis est ut tantum notarum, quibus ab utraque distinguitur, meminisse juvabit.

Ab *Anthico fatuo* plerumque elytris dilutioribus, immaculatis, primo intuitu distincta. Praeterea capite pronotoque minus opacis, paulo minus crebre punctatis, et praesertim pronoti lateribus antice minus prominulis sejunctim locanda.

Ab *Anthico ustulato*, cui etiam proxima, colore plerumque alio, capite pronotoque opacis, crebrius punctatis, pronotique lateribus antice minus prominulis differt.

Quinquaginta et ultra specimina hujus *Anthici* in insula Cypro vespertino volatu prope Larnacam primo vere legi. Omnia inter se congruunt, et statura minus quam individua praecedentium specierum variant. Bina tantum specimina nubeculam fuscam, hinc inde in medio elytrorum gerunt, qua nota praecedentibus binis speciebus propius accedunt: ceteris tamen notis e corporis forma et sculptura sumptis facile distinguuntur.

8. Anthicus villosulus n. sp.

Rufo-testaceus, subnitidus, parcius punctatus, tenuiter pubescens, et subtilissime undique setosus: capite subquadrato, postice medio nullo modo angulato: pronoto antice depressiusculo, lateribus prominulis, basi fortius coarctato: pedibus elytrisque dilutioribus, his fascia media apiceque infuscatis. Long. 0,0025. Lat. 0,008.

Supra undique sparsim setosus. Caput subquadratum, postice levissime rotundatum at medio nullo modo angulatum, convexum, sat fortiter at minus crebre punctatum, laete rufo-testaceum, subnitidum, tenuiterque pubescens: oculis majusculis et prominulis: antennis concoloribus. Prothorax capitis latitudinem subaequans, latitudine paulo longior, parum convexus, pone medium fortiter coarctatus, lateribus antice fortiter rotundatis et prominulis, postice leviter sinuatis, basi fortiter marginatus, cervicula prominente: laete rufo-testaceus, subnitidus, sat dense punctatus, tenuiterque pubescens. Scutellum minutum, triangulare, rufum. Elytra antice prothoracis basi fere duplo latiora, latitudine duplo

longiora, convexiuscula, torulis et depressionibus nullis, nitidiuscula, subtiliter punctata, tenuiterque pubescentia, testaceo colore, fascia media apiceque indeterminatim infuscatis. Abdomen piceo-rufum : pedes rufo-testacei.

Unicum hujus speciei individuum, hocque femineum, mense Novembre, sub lapide, prope Alexandrettam Syriae legi.

Ab affinibus corporis hirsutia in primis distinctus. Praeterea capite et prothorace dilutioribus, minus crebre quam in *Anthicis fatuo* et *incompto* punctatis, punctis minus fortiter quam in iisdem nec non in *Anthico ustulato* impressis, prothorace minus globoso anticeque paullo magis ampliato, lateribus magis prominulis, basique magis coarctato. Colore unicum quod exstat exemplar omnino cum *Anthico fatuo* et cum varietate *a Anthici ustulati* congruit.

9. Anthicus humilis.

Germar, Fauna insect. Europ. X. 6. (s. a.).

Omnino niger, vel nigro-piceus maculis quatuor elytrorum rufis, subnitidus, fortiter punctatus, tenuiterque pubescens : capite postice medio plus minusve fortiter angulato, retro prominulo. Long. 0, 002 — 0, 0028. Lat. 0, 0007 — 0, 0008.

Sub hoc nomine, exemplum cl.[i] Laferté secutus, omnia colligendo specimina quae e Caucaso, e Syria, ex insula Cypro, ex Hungaria, ex Dalmatia, ex Illyria, ex salsis lacubus Germaniae, e Gallia, ex Hispania, ex Italia ejusque insulis relata notas *Anthici humilis* secundum eundem auctorem praebent, facile suasus fui ut duae saltem essent species confusae ; altera, verus *Anthicus humilis* Germari, altera *Anthicus Bremei*, quondam ab ipso cl.[o] Laferté constituta, posteaque et ut puto immerito priori conjuncta.

In *Anthico humili* quomodo notae praecipuae e capitis forma sumptae, ad dividendas varietates inserviant, infra dicam : ceteris notis, centum et ultra specimina mihi praesto plus minusve similia sunt inter se, hoc tantum discrimine quod puncta magis vel minus fortiter et crebre impressa sint, corpus postice plus minusve convexum, in quibusdam parallelum et gracilius, in aliis robustius sit, pronoto in nonnullis antice parum latiore et depressiore, in plerisque rotundato. Nullus tamen fixus

est terminus quo varietates hujusmodi circumscribi valeant, et transitiones omnes ab una ad aliam obviam occurrunt. Quod ad colorem haec species vel penitus nigra, unicolor, vel plus minusve rufa vel rufo-maculata est.

Veruntamen notis ex forma capitis et ex colore sumptis tres varietates distinguere juvat. Prior, A, variat colore vel penitus nigro, vel maculis rufis: indiscriminatim rufo-maculata vel omnino nigra individua hujus varietatis adsunt in collectionibus Regii Taurinensis Musei et cl.ⁱ D. Reiche qui benevole quotquot habet *Anthicos humiles* mecum communicavit: penitus nigra ex salsis lacubus Germaniae et ex oris maritimis Galliae tantum ortum trahunt, rufo-maculata vero ex Gallia, Hispania, Italia ejusque insulis, Dalmatia, Illyria et Hungaria oriuntur. In Sardinia insula hoc notatu dignum; quod *humilis* typicus semper rufo-maculatus sit; quodque ibidem alia sit varietas, cum priore huc usque confusa, constanter penitus nigra, quae tamen notis peculiaribus ab eodem differre videtur. Inter quadraginta et ultra specimina uniuscujusque harum varietatum ex insula Sardinia allata, quaeque in collectionibus hujus R. Musei et cl.ⁱ D. Baudi asservantur, nullum adest quo transitum inter eas iniri queat. Haec igitur altera erit varietas, C, quam pro specie sumpsissem nisi alia extricatu difficillima adesset varietas, B, Cypri incola, quam specie distinguere sedulo studio prorsus frustra repetitis vicibus conatus sum, quaeque transitus offert e nigris speciminibus varietatis A ad varietatem C Sardiniae. Forma capitis in varietatibus A et C omnino differt, sed varietas B intermedia extremos illarum terminos jungit. Ex quibus efficitur ut hae tres varietates hoc modo recenseantur.

Varietas A. Nigro-piceus, subnitidus: capite subrotundato, lateribus pone oculos parallelis, postice medio leviter angulato: pronoto basi subtiliter marginato saepeque bitubereulato, lateribus rotundatis, prominulis: elytris vel unicoloribus, vel maculis quatuor plus minusve extensis rufis; antennis pedibusque ferrugineis. Long. 0,0022 — 0,0028. Lat. 0,0007 — 0,0008.

Niger, unicolor, habitat lacos salsus Germaniae, littoraque marina Galliae, et est typicus *A. humilis* Germ.

Rufo-piceus, elytris maculatis habitat in Gallia, Hispania, Italia ejusque insulis, Dalmatia, Illyria, Hungaria.

Varietas B. Niger, subnitidus: capite subrotundato, postice medio

plus minusve fortiter angulato: pronoto basi subtiliter marginato, lateribus antice rotundatis, prominulis: elytris concoloribus, nunquam rufo-maculatis: antennis, tibiis tarsisque testaceis. Long. 0,002 — 0,0025. Lat. 0,0007.

Habitat in insula Cypro, et in regione caucasica. Huc spectat, absque dubio, *Anthicus calycinus* Stéven, juxta specimen typicum in collectione Dejean, nunc Regii Taurinensis Musei, asservatum, de quo cl. Lafertè in Monogr. Anthic. p. 127.

Anthicus nigrofasciatus Motschoulsky ex iisdem regionibus caucasicis, cujus bina exstant specimina in collectione R. Taurinensis Musei, ab ipso auctore missa, quem cl. Lafertè loc. cit. ad *Anthicum humilem* refert, prothorace fortius angustato, elytrisque fortius punctatis, nec non aliis notis, ab hac specie differre videtur.

Varietas C. Niger, subnitidus: capite longiusculo, mox pone oculos occiput versus angustato, postice fortiter angulato: pronoto basi fortiter marginato, lateribus antice rotundatis, minus prominulis: elytris concoloribus, nunquam rufo-maculatis: antennis pedibusque ferrugineis. Long. 0,0025. Lat. 0,0007.

Habitat in Sardinia insula et in Gallia meridionali.

Huc spectat *Anthicus riparius* Dejean. Sub hoc nomine saltem omnes recensitae varietates promiscue in collectione sua erant perscriptae.

10. Anthicus Bremei.

Lafertè, Ann. Soc. Ent. de France. XI. (1842) p. 252. Tab. 10, fig. 3.

Anthicus humilis var. *e.* Lafertè, Monogr. Anthic. (1847) p. 127.

Laete rufus, nitidus, subtilissime parce punctatus: capite longiusculo, medio postice angulato, retro haud prominulo: elytris dilutioribus, medio utrinque apiceque nigris: antennis pedibusque testaceis. Long. 0,002 — 0,0024. Lat. 0,0007 — 0,0008.

Variat maculis elytrorum mediis in fasciam transversam coeuntibus.

Beryti in Syria quindecim hujus speciei exemplaria inveni, supra dictis notis omnino congruentia. Ibi nullum *Anthicum humilem* obviam habui: contra in insula Cypro, ubi investigationibus multis hunc *A. Bremei* non inveni, tantum varietas *B Anthici humilis* occurrit. — In

Europa septentrionali ubi *Anthicus humilis* occurrit, iste *Bremei* nunquam visus. Inferre igitur licet, pro diversis in quibus simul non occurrunt regionibus, hos binos *Anthicos*, *Bremei* scilicet et *humilem*, specie distinctos esse.

Additis insuper notis e colore et ex corporis forma sumptis, nullum amplius erit dubium quod separari debeant. In *Anthico Bremei* caput constanter oblongiusculum est, et postice subconicum, haud retro prominulum: pronotum antice magis globosum, et una cum capite subtilius et parcius punctatum: elytra, servata proportione, breviora et latiora, constanter aliter colorata.

11. Anthicus Cerastes n. sp.

Mas *Rufo-piceus, macula postica elytrorum rufo-testacea: pube sericeusat dense vestitus: capite postice rotundato: prothorace depressiusculo, lateribus antice rotundatis, prominulis, basin versus fortiter angustato: antennarum articulo primo incurvo, fortiter dilatato et superius mucronato.* Long. 0,0023. Lat. 0,0007.

Caput latitudine longius, postice fortiter rotundatum sed nullo modo productum, retro prominulum, rufescens, nitidiusculum, parce subtiliterque punctatum, sericeo-pubescens: antennis rufescentibus, articulo primo incurvo, fortiter dilatato, superius mucronato, secundo paullo tertio breviore, sequentibus sensim brevioribus apiceque leviter incrassatis, ultimo praecedente duplo longiore, obtuso. Pronotum capitis latitudinem aequans, rufo-piceum, vix latitudine longius, basi fortiter, non tantum autem quantum in *Anthico humili*, angustatum, parum convexum, lateribus antice parum prominulis; capite densius fortiusque punctatum, densiusque pubescens: cervicula distincta, longiuscula. Scutellum minimum, acuminatum, obscure rufo-piceum. Elytra capiti pronotoque concoloria, macula lata communi ante apicem rufo-testacea evanescente: antice pronoti basi sesqui latiora, latitudine duplo longiora, oblongo-ovata, convexa, pone humeros non depressa, subtiliter et dense punctata, tenuiter sericeo-pubescentia. Corpus subtus rufo-piceum, pedibus testaceis. — Mas abdominis segmento supero ultimo leviter emarginato, pygidio conspicuo.

Unicum exstat hujus speciei exemplar, quod ab insula Cypro in

lagunecula microcoleopterorum repleta retuli. Puto volatu retibus captum fuisse, cum in eadem lagunecula plures essent parvae species hoc modo captatae: quod si contigisset, Larnacae lectum fuisset.

Haec species una cum *Anthico armato* infra descripto ab omnibus Anthicinis huc usque cognitis mira et insolita antennarum articuli primi structura secedit. Attamen hac una nota has binas species in manipulo peculiari secernendas haud existimavi, cum ceteris characteribus inter se discrepent et omnino cum speciebus dissimilium manipulorum congruant. *Anthicum Cerastem* speciebus quarti manipuli cl.ⁱ Lafertei, quibus, exceptis antennarum structura et pubescentia sericea, similis est, jungo.

Manipuli V. VI. VII.

Nullam speciem horum manipulorum, sive in insula Cypro, sive in Syria inveni.

Manipulus VIII.

12. Anthicus floralis.

Lagria floralis. Fabr. Syst. Entom. (1775) p. 126.

Passim ubique, sive in insula Cypro, sive in Syria.

Meloe floralis Linné Syst. Nat. Edit. X. Tom. I. (1758) p. 420, insectum omnino aliud.

Fabricii diagnosis, in loco citato et in sequentibus operibus suis mendosa, primum anno 1801 castigata prodiit in Systemate Eleutheratorum I. p. 291.

13. Anthicus phoenicius n. sp.

Rufo-ferrugineus, nitidus, subtiliter punctulatus, et pube subtilissima parce obsitus: capite obscuro: elytris nigris, basi late pedibusque testaceis. Long. 0,002. Lat. 0,0007.

Caput subquadratum, convexum, fossula occipitali vix nisi sub quodam lumine conspicua, nigrum, nitidum, glabrum, parce subtiliterque punctatum: oculis minimis, vix prominulis: antennis rufis, elongatis, apicem versus sensim incrassatis. Prothorax paulo minus quam in *Anthico floreali* latus, minus convexus, anticeque minus dilatatus, oblongus, basin versus angustatus, lateribus rectis antice vix prominulis, basi

fortiter marginata: cervicula brevi sed distincta: ex ferrugineo rufus, nitidus, subtiliter et parce punctatus, fere glaber, seu breviter et tenuissime pubescens, pubescentia non nisi oculo fortiter armato conspicua. Elytra antice prothoracis basi sesqui latiora, latitudine duplo longiora, humeris obtusis, depressione post humerum nulla, parum convexa, lateribus subparallelis, apice subtruncata, subtiliter confertim punctata, breviter et tenuissime sub oculo fortiter armato pubescentia, nigra, antice quarta parte penitus testacea. Abdomen nigrum, pedesque testacei. — Mas abdominis segmento superiore ultimo late truncato, pygidioque omnino conspicuo.

Variat *obscurius:* prothorace fusco, elytrisque basi minus late testaceis, colore ipso testaceo a nigredine suturae plus minusve diviso.

Dilutius, a: capite prothoraceque rufo-ferrugineis.

b: capite prothoraceque, fere ut elytrorum basis, dilutis.

Proximus videtur *Anthico inedito* Lafertei mihi descriptione tantum noto, sed capite distincte punctato, antennis nullo modo moniliformibus, cervicula conspicua, elytrisque pubescentibus et aliter coloratis abunde differt.

Plura sunt mihi prae manibus hujus speciei exemplaria quae Beryto retuli. In aridis, sub lapidibus, legi.

14. Anthicus bifasciatus.

Lagria? bifasciata. Rossi, Fauna Etr. I. (1790) p. 108.

Beryti in fimo bubulo vivit. Quaedam retuli specimina omnino recentia in quibus animadvertitur setas cujusque elytri longitudinaliter in quatuor series dispositas esse. Character hujusmodi qui in operibus clarissimorum Laferté et Schmidt, nec non ab ipso Rossio in loco citato et in accuratiore descriptione Mantissae I, p. 48 siletur, in speciminibus recentibus Pedemontanis et Sardois etiam observatur.

Anthicus Kolenatii (Kolenati, Meletem. entomol. III (1846) p. 35. Tab. XIII. fig. 7) huc certe referendus. *Anthicus bifasciatus* autem ejusdem auctoris, ut ipse eodem loco testatur, nihil aliud quam varietas *Anthici tristis* Schmidt.

Manipuli IX. X.

Nulla species horum manipulorum mihi occurrit.

Manipulus XI.

15. Anthicus longicollis.

Schmidt, Stettin. Ent. Zeit. 3 Jahrg. 1842, p. 130.

Prope pagum Galâta in insula Cypro, mense Augusto, sub lapidibus in loco humido tria hujus speciei exemplaria nactus sum.

16. Anthicus ornatus n. sp.

Niger, opacus, tenuissime velutinus: capite postice quadrato: elytris pone humeros depressis, maculis binis latiusculis, altera pone humerum, altera pone medium, albido sericeis. antennarum basi, pedibusque testaceis, his femoribus infuscatis. Long. 0,0024. Lat. 0,0008.

Caput nigrum, vix nitidum, subtilissime et confertim punctatum, dense fusco-pubescens, convexum, postice quadratum: oculis modice prominulis: antennis basi rufis, apice fuscis, parum elongatis, magis quam in *Anthico tenello* tenuibus. Prothorax capitis latitudinem aequans, latitudine quarta parte longior, vix globosus, antice transverse rotundatus, basin versus angustatus, lateribus rectis, antice vix prominulis, basi ipsa iterum levissime ampliata, margine basali minus etiam fortiter quam in *Anthico tenello* notato, cervicula brevissima sed distincta; capiti concolor, tomento densiore vestitus, sericeo nitens, margine basali dilutiore. Scutellum tomento nigro obductum. Elytra antice prothoracis basi sesqui latiora, latitudine duplo longiora, oblongiuscula, nullo modo postice dilatata, apice subtruncata, parum convexa, torulis nullis, capitis pronotique instar nigra, subtilissime punctata, tenuissime fusco pubescentia, maculis binis luteis tomento albo-sericeo dense obsitis, altera antica depressionem posthumeralem occupante, latiuscula, suturam nunquam attingente, altera post secundum trientem sita, suturam versus, quam non attingit, adscendente: macula utraque marginem externum omnino dilutiorem attingente. Corpus subtus nigrum et opacum: episternis mesothoracis cavis, punctatis, nitidis, ambitu externo pilis argenteo-sericeis tenuissimis fimbriato. Pedes testacei, femoribus plus minusve infuscatis. — Mas pygidio conspicuo facile distinguitur. Inter

quinquaginta specimina sunt mihi viginti mares; ex quo hos in hac specie minus quam in *Anthici tenelli* raros esse colligitur.

Variat obscurior, margine prothoracis postico, margineque elytrorum externo nigris; maculis singulis sejunctis.

Species ista *Anthico tenello* proxima est, sed statura multo minore, antennis tenuioribus, pronoti margine postico etiam indistinctius marginato, elytris nullo modo postice ampliatis, lateribusque magis parallelis, naevis valde latioribus, pubescentia minus densa, denique margine pronoti postico elytrorumque laterali saepius dilutiore.

Aestivo tempore in insula Cypro arena currentem secus rivos pagorum Defterà, Givisìl, et Léfca hanc speciem inveni. Beryti in Syria etiam iisdem temporibus et locis, sed frequentius, legi.

Manipulus XII.

17. Anthicus tenuipes.

Laferté, Monogr. Anthic. (1847) p. 194.

In insula Cypro passim. In primis prope Larnacam, antiquum Citium, ineunte Livádia planitie sub lapidibus legi.

Manipulus XIII.

18. Anthicus tristis.

Schmidt, Ent. Zeit. Stettin. 3 Jahrg. 1842. p. 172.

Haec species non infrequens est in insula Cypro et Beryti. Locis aridis, sub lapidibus quisquiliisve delectatur: nihil illi potius quam reliquiae palcae tritae quae animalibus ad vescendum apposita fuerit.

19. Anthicus armatus n. sp.

Niger, cylindricus, opacus: capite quadrato: elytrorum fasciis duabus argenteis: antennis tibiis tarsisque ferrugineis, antennarum articulo primo fortiter dilatato, superius mucronato. Long. 0, 0028 — 0, 003. Lat. 0, 0009.

Caput majusculum, validum, quadratum, postice complanatum, trun-

catum, imo late emarginatum, supra parum convexum, nigrum, nitidum, parce at sat fortiter punctatum, parceque fulvo pubescens, pilis nonnullis hirtis: oculis minutis, parum prominulis: palpis testaceis, articulo ultimo intus brevissimo, extus longo, fortiter securiformi, acie praelonga: antennis ferruginei coloris, validis, pubescentibus, modice elongatis, non moniliformibus, articulo primo basi incurvo, apice fortiter dilatato et superius acute mucronato, secundo tertioque aequalibus, sequentibus sensim brevioribus et crassioribus, ultimo ovato, obtuso, praecedente sesqui longiore. Pronotum capitis latitudinem fere aequans, latitudine paulo longius, superne valde convexum, antice declive, angulis anticis rotundatis nullo modo prominulis, basin versus angustatum, lateribus rectis, dense et sat fortiter punctatum, in declivitate antica scabrum, dense argenteo pilosum, pilis nonnullis hirtis: cervicula brevi sed distincta. Scutellum minutum et rotundatum. Elytra elongata, lateribus parallelis, cylindrica, antice prothoracis basi sesqui latiora, humeris leviter rotundatis, convexa, torulis et impressione posthumerali nullis, apice truncata, angulo suturae recto, externo rotundato, antice densius et fortius, postice sensim subtilius et parcius punctata, apice levia; nigra, tomento fusco vestita, fasciis binis dilute ferrugineis tomentoque serico argenteis, anticis latioribus, suturam versus, ubi coalescunt, obliquatis, posticis angustioribus, transversis, sutura nigrescente divisis: sparsim parce setosa. Abdomen femoraque nigra, tibiis tarsisque dilute rufis. Maris pygidium satis conspicuum.

Pulcherrimae hujus speciei plura specimina ad Larnacam, antiquum Citium, primo vere prope salinas legi. Sportarum, quae salis exportationi inservierint, in fragmentis marcescentibus terraque salsa fere obrutis, degit. Nova igitur Coleopteris salinarum incolis addenda species.

Primi articuli antennarum mire structi tantum respectu, haec species una cum *Anthico Ceraste* in manipulo proprio sejunctim locari posset. Ubi vero *Anthicum Cerastem* descripsi, binas has species nullum alium characterem, quo jungi queant, praebere, et in manipulis generis *Anthici* prorsus diversis locum obtinere animadverti.

Primo intuitu, nulla habita ratione structurae antennarum, hanc speciem ad *Anthicum elegantem* Stevenii referri posse putaveram; postea vero insolitam structuram, auctoremque rossicum nullam illius mentionem facere observans, suasus fui ut insectum cyprium pro distincta specie haberem. Praeterea verba Stevenii « *habitus omnino* Anthici antherini

» . . . . . *elytra sericeo-nitentia* . . . . . *pedes rufescentes* . . . . . »
non quadrant ad meam speciem quae omnino cylindrica nec ullo modo postice dilatata uti *Anthicus antherinus* est; cujus elytra, tomento fusco dense obtecta, fasciis tantum sericeo nitent, cujus denique pedes nigra femora gerunt.

20. Anthicus antherinus.

Meloe antherinus. Linné, Fauna suecica, Edit. 2.ª (1761) n. 829.

Hujus anthici semel unicum specimen, ad varietatem *c* cl. Lafertei pertinens, mense Augusto prope pagum Galáta in insula Cypro sub lapide in humido inveni. Sunt mihi etiam prae manu bina specimina ejusdem varietatis Tarso Ciliciae missa.

21. Anthicus crinitus.

Laferté, Monogr. Anthic. (1847) p. 204.

Nonnullos retuli ex insula Cypro, ubi species infrequens est.

22. Anthicus hispidus.

Notoxus hispidus. Rossi, Mantissa Ins. I. (1792) p. 46.

Frequens in Cypro insula et in Syria. Varietates *b* et *c* cl. Lafertei, pronoto omnino rufo, omnium frequentissimae.

23. Anthicus morio.

Laferté, Monogr. Anthic. (1847) p. 215.

In Cypro insula et in Syria frequentissimus. Quod cl. Laferté animadvertit, mares scilicet feminis frequentiores videri, non est perfecta probatione firmatum. Inter 15 specimina insulae Cypri, 6 sunt mares et 9 feminae: contra sunt mihi 10 mares et 6 feminae Beryto Syriae. Ex his colligere est pariter et mares et feminas esse frequentes.

Est mihi femineum specimen e Cypro allatum et ad varietatem *c* cl. Lafertei spectans, in quo antennae sunt rufae. Ceterum cum specie typica omnino convenit.

21. Anthicus scurrula n. sp.

Nigro-piceus, opacus, fortiter punctatus, longius griseo-pubescens: pronoto angusto: elytris elongatis, lateribus parallelis: antennis pedibusque rufo-testaceis. Long. 0, 0016 — 0, 0022. Lat. 0, 0006.

Nigro-piceus. Caput quadratum, fossula occipitali nulla, nitidiusculum, fortiter punctatum, intervallo angusto et longitudinali omnino levi, subtiliter et parce pubescens: oculis parvis, prominulis: antennis apicem versus sensim crassioribus, rufo-testaceis, articulis secundo tertioque subaequalibus. Pronotum capite angustius, oblongum, antice rotundatum, convexum, lateribus rectis, antice nullo modo prominulis, basin versus leviter angustatum, basi ipsa vix marginata; capitis instar fortiter punctatum, at dense griseo-pubescens: cervicula brevi rufa. Elytra antice prothoracis basi duplo latiora, latitudine plus duplo longiora, basi recte truncata, lateribus parallelis, parum convexa, torulis impressioneque posthumerali nullis, subopaca, fortiter, antice densius, punctata, longius fulvo pubescentia. Corpus subtus nigrum, pedibus rufis. — Mas et femina, pariter obvii, inter se vix distinguuntur: mas tamen, plerumque minor, pygidio paulum conspicuo agnoscitur.

Variat margine postico prothoracis rufescente: nonnunquam omnino dilutior, et etiam subtestaceus.

Anthico luteicorni, a quo proxime locum obtinet, probe similis est. Hic noster vero capite haud transverso, cujus linea levis non prosilit, pronoto basin versus minus fortiter angustato, fortius punctato, densius pubescente, nec non elytris rudius punctatis, longius et, ut videtur, densius pubescentibus differt.

Per arenam, in aquarum vicinia, cursitantem, ad pagos Galáta, Léfca et Defterà in insula Cypro, frequentissimam hanc speciem aestivo tempore nactus sum.

Manipulus XIV.

25. Anthicus fenestratus.

Schmidt, Stettin. Ent. Zeit. 3 Jahrg. 1842. p. 181.

Clarissimi Schmidt et Laferté, nec non Kuester caput punctatum huic speciei tribuunt, cum revera sit granulatum. Hujusmodi notae causa, putaveram initio specimina mea capite granulato novam constituere speciem, sed speciminibus sardois, ab ipso D. Laferté *fenestrati* nomine donatis, in Regio Taurinensi Museo a me observatis, illorum descriptiones errore laborare certior factus sum. Capite granulato haec species proxime accedit *Anthicis pallenti* et *granulari* Lecontei, in America septentrionali nuper detectis.

Varietatibus colore dilutiore a cl.° Laferté enumeratis sequentes addendae sunt:

c. Capite pronotoque rufescentibus; elytris fuscis macula humerali dilatata.

d. Capite pronotoque rufescentibus; elytris testaceis fascia transversa, lata, fusca.

Frequentissimus Beryti occurrit, ubi ad littora maris, quam ocissime sole per arenam currentem legi.

Manipuli XV. XVI.

Nullam speciem ex his manipulis invenire mihi contigit.

Manipulus XVII.

26. Anthicus aspelius n. sp.

Niger, subnitidus, tenuissime pubescens: prothorace laete rufo: elytris fasciis duabus testaceis sutura late interruptis: antennarum basi, tibiis tarsisque testaceis. Long. 0, 0025 — 0, 0032. Lat. 0, 001 — 0, 0012.

Caput rotundatum, valde convexum, nitidiusculum, parce admodum et subtilissime punctulatum, tenuiter pubescens, supra nigrum, clypeo maculaque triangulari ad antennarum insertionem rufis; subtus rufum, medio nigrum; oculis parvis, vix prominulis; labro palpisque rufis; antennis validis, articulis secundo tertioque aequalibus, ceteris ab articulo

quinto leviter incrassatis, ultimo fusiformi, praecedentibus duobus simul sumptis subaequali, ferrugineis, articulis primo et tribus quatuorve ultimis nigro-fuscis. Pronotum capitis latitudinem aequans, latitudine haud longius, parum convexum, antice dilatatum lateribus parum prominulis, deinde basin usque constrictum, basi distincte marginatum, fossula laterali vix ulla in sulculum basin versus tendentem mutata; cervicula fere nulla; laete rufum, leve, nitidum, punctis nonnullis sparsis capitis ad instar subtilibus, tenuiter pubescens. Scutellum majusculum, apice rotundatum, obscure rufo-piceum. Elytra antice prothoracis basi duplo latiora, latitudine propria duplo longiora, parum convexa, saepe etiam complanata, basi recte truncata, angulis humeralibus rotundatis, lateribus leviter ampliata, apice late rotundata et fere truncata, torulis et depressione posthumerali nullis, omnium subtilissime punctulata et tenuissime pubescentia; nigra, maculis utrinque duabus latis marginem externum attingentibus, testaceis, antica satis a basi suturaque remota, postica ante apicem suturam versus quam non attingit adscendente; macula utraque fasciam sutura interruptam referente, et per marginem externum tenuissime testaceum coalescente. Corpus subtus nigrum, pedibus testaceis, femoribus medio fuscis.

Haec species ponitur inter *Anthicos sanguinicollem* Lav. et *mylabrinum* Genei. Proxima etiam *Anthico nectarino* Panzeri, ab eodem statura paululum minore, convexitate fortiore, prothorace breviore antice magis dilatato, maculisque elytrorum nitidius circumscriptis et forma minus variantibus, distinguitur. Facile etiam dignoscitur ab *Anthico mylabrino* statura majore, convexitate minore, pubescentia minus densa, et in primis habitu latiore et magis complanato. Icon *Anthici mylabrini* a Gené in opusculo *De quibusdam insectis Sardiniae* praebita ad varietatem fasciis elytrorum interruptis, de qua tamen nulla mentio in descriptione, refertur. Icon autem a cl. Laferté ejusdem speciei allata ad varietatem fasciis elytrorum antica interrupta, postica integra pertinet. Plerumque vero ambae fasciae integrae sunt.

Quibusdam *Anthici sanguinicollis* varietatibus etiam propior: attamen statura latiore, colore non fusco ut in *A. sanguinicolli*, sed nitide nigro, antennisque articulo primo fusco in primis distinctus.

Cyprus insula antiquitus dicebatur etiam Aspelia. Inde nomen speciei.

Semel primo vere anni 1849, quaedam specimina hujus *Anthici* supra flores, Famagostae in insula Cypro legi. Postea nec in eodem loco, iisdemque temporibus, nec usquam alibi visus.

27. Anthicus sidonius n. sp.

Nitidus, subtiliter punctulatus et tenuissime pubescens, hepatico colore, abdomine elytrisque nigris, his apice leviter sinuatis. Long. 0,0035. Lat. 0,0011.

Nitidus, tenuissime pubescens. Caput convexum, quadrangulare, angulis posticis rotundatis, parce punctulatum, colore hepatico; oculis majusculis, prominulis; antennis elongatis rufis, articulis singulis porrectis, secundo omnium brevissimo, ultimo longissimo praecedentibus duobus aequali. Prothorax capitis latitudine, rufus. Pronotum latitudine sua longius, capite fortius et densius punctatum, ante medium coarctatum, lateribus antice rotundato-ampliatis, prominulis, postice rectis, cervicula brevissima, fossula laterali margineque basali distinctis. Scutellum minutum, rufum. Elytra oblongo-ovata, antice prothoracis basi duplo fere latiora, angulis obtusis, medio ampliata, latitudine summa plus duplo longiora, apice late rotundata, juxta angulum internum sinuata, planiuscula, torulis exstantibus, pone humerum leviter depressa, oleagineo-nigra, nitida, omnium subtilissime parce punctulata, et tenuissime griseo pubescentia. Abdomen nigrum, nitidum, leve, tenuissime griseo pubescens. Pedes cum coxis rufo-testacei.

Haec species, ut videtur, rarissima, cujus unicum exemplar Doctor Gaillardot Scidae (antiqua Sidone) legit et benevole tradidit, ante *Anthicum plumbeum* in systemate cl. D.[i] Laferté locum obtinet.

Cum *Anthico Iscariote* Lap. Syriae itidem incola minime confundendus: noster statura majore, prothorace longiore, capite pronotoque fortius et densius punctatis, elytris magis ovatis multo subtilius punctulatis, coloreque alio abunde differt.

Colore, nostro *Anthico Lafertei* proxime sequenti similis, at duplo major, nitidior, capite pronotoque fortius densiusque punctatis, hoc depressiore lateribus antice magis prominulis, antennarum articulis singulis longioribus.

28. Anthicus Lafertei n. sp.

Subnitidus, subtilissime punctulatus et pubescens, capite rufo-piceo,

prothorace laete rufo, elytris nigro-plumbeis, abdomine nigro, antennarum basi pedibusque testaceis. Long. 0,0022. Lat. 0,0008.

Caput rotundatum, convexiusculum, nitidum, parce subtiliter punctulatum, tenuissime griseo pubescens, rufo-piceum; oculis parvis, parum prominulis; antennis longiusculis et validis, apicem versus nonnihil incrassatis, articulo ultimo praecedentibus duobus simul sumptis aequali, basi ferrugineis, apice fuscis. Pronotum capite paulo angustius, latitudine longius, convexum, capitis instar punctatum et pubescens, laete rufum, subnitidum, medio coarctatum, lateribus antice rotundato-ampliatis, vix prominulis, postice rectis, cervicula fere nulla, fossula laterali margineque basali distinctis. Scutellum minutum, rufum. Elytra ovata, antice prothoracis basi latitudine aequalia, postice latioribus prothoracis latitudinem maximam aequantibus, latitudine propria duplo longiora, angulis humeralibus nullis, convexiuscula, pone humeros nec depressa, nec torosa, apice late truncata, omnium subtilissime punctulata, tenuissime griseo pubescentia, plumbeo colore. Corpus subtus rufum, abdomine nigro, pedibusque testaceis. Nullum deprehendi sexus discrimen: inter sex specimina unum est majus, elytrorum lateribus magis parallelis, capite pronotoque fortius punctatis.

Haec infrequens et pulchra species inter *Anthicos plumbeum* et *capitonem* Lafertei locatur.

In insula Cypro, primo vere, per antiquae Amathuntis ruderum congerics sole discurrentem legi.

D. Marchioni Laferté-Sénectère, entomologo peritissimo, optimae Anthicinorum monographiae auctori honoris causa insectum hoc dico.

29. Anthicus Gorgus n. sp.

Nigro-oleagineus, subnitidus, subtilissime punctulatus et pubescens, antennis basi palpisque piceis, tibiis tarsisque testaceis. Long. 0,0019 — 0,0022. Lat. 0,0008 — 0,001.

Statura *Anthici Lafertei* antea descripti, a quo proximus est, paulo tamen brevior et proportione servata latior.

Caput validum, rotundatum, convexum, parce subtiliter punctulatum, linea media levi, nigrum, nitidum, tenuissime et brevissime griseo

pubescens ; oculis parvis, parum prominulis; antennis longiusculis et validis, versus apicem nonnihil inerassatis, articulo ultimo praecedentibus duobus simul sumptis subaequali, nigris, basi plus minusve obscure piceis; palpis fuscis. Prothorax capite paulo angustior, niger. Pronotum latitudine sua parum longius, convexum, capite subtilius punctatum et pubescens, nitidum, medio coarctatum, lateribus antice rotundato-ampliatis, vix prominulis, postice rectis, cervicula nulla, fossula laterali conspicua, margine basali parum distincto. Scutellum minutum, nigrum. Elytra ovata, antice prothoracis basi latitudine aequalia, deinde prothoracis latitudine summa duplo latiora, latitudine propria duplo longiora, angulis humeralibus nullis, plana, pone humeros nec depressa, nec torosa, apice late truncata, omnium subtilissime punctulata, tenuissime griseo pubescentia, oleaginei saepe etiam plumbei coloris, plus minusve infuscata. Corpus subtus femoraque nigra, tibiis tarsisque ferrugineis, his articulo ultimo plerumque nigro. — Mas capite robustiore, corporis lateribus magis parallelis, nec non pygidio conspicuo distinguitur.

Hanc speciem primo vere Larnacae (antiqui Citii) super lapideos margines aquaeductus sole cursitantem inveni. Ibi frequens.

Gorgus fuit rex Salamine in Cypro.

30. Anthicus Iscariotes.

Laferté, Monogr. Anthic. in supplem. (1848) p. 301.

Anno 1846 Hierosolymis legi. Postea alibi non inveni.

Manipulus XVIII.

Nulla species mihi sive in Cypro insula, sive in Syria occurrit.

Supra enumeratis speciebus addendi sunt *Anthicus instabilis* Schmidt, *Anthicus tenellus* Laf., nisi noster *Anth. ornatus* sit, et *Anth. sollicitus* Laf., quos uti Syriae incolas cl. Laferté affert, et quos invenire mihi non contigit.

OCHTHENOMUS

Schmidt, Stettin. Ent. Zeit. 3 Jahrg. 1842, p. 196.

Schmidt, hujus generis jam a Dejeanio anno 1821 in catalogo suo distincti auctor, *Notoxum tenuicollem* Rossii eodem refert; sed clariss. Laferté hanc Rossii speciem ab hoc genere merito repellens, primas *Ochthenomi* species a Dejeanio, loco citato, adnumeratas esse censet. Ego vero animadvertam jam ab anno 1807 *Ochthenomi* speciem a Bonellio nostro descriptam fuisse, in suo Faunae Subalpinae specimine, sub nomine *Anthici unifasciati*, quae postea a Schmidtio, descriptionis Bonellianae ignaro, sub nomine *Ochthenomi sinuati* rursus descripta est.

1. Ochthenomus unifasciatus.

Anthicus unifasciatus. Bonelli, Specimen Faun. Subalp. 1807 in Mem. della Soc. di Agric. T. IX. Torino, 1812. pag. 174. sp. 21. Tab. IV, fig. 21.

Ochthenomus sinuatus. Schmidt, Stettin. Ent. Zeit. 3 Jahrg. 1842. p. 199.

Beryti in Syria sat frequenter legi sub lapidibus, in arenosis.

2. Ochthenomus angustatus.

Laferté, in Lucas, Hist. nat. des anim. artic. de l'Algérie, II. (1846) p. 381.

Ab insula Cypro quaedam hujus speciei individua retuli, quorum pleraque ad varietatem quam Kuester nomine peculiari *Ochthenomi melanocephali* Käfer Europa's, IX. 57. (1847) donavit, referenda sunt. Sunt mihi prae manibus plura specimina hujus speciei, patria Dalmatina et Taurica, ex antiqua collectione Dejeanii, nunc Regii Taurinensis Musei, quae nullo modo a typico *Ochthenomo angustato* Lafertei separari queunt. De hac Kuesteri specie, ut cuique libitum fuerit, opinetur; ego tamen puto ipsum tot vicibus errore lapsum esse, quot asseverat specimina thorace lateribus angulato observasse. Ceterum idem

auctor sub nomine *Ochthenomi tenuicollis* non *Ochthenomum angustatum* Laferté sed *punctatum* hujus auctoris pinxisse videtur. Hoc ex icone conjicitur, quae statura, nubecula elytrorum, et antennarum articulo primo haud incrassato ad *Ochthenomum punctatum* refertur. Igitur haud immerito Knesterum, permixtis binis illis speciebus, *Ochthenomi angustati* varietatem nomine *Ochth. melanocephali* descripsisse inferre licebit.

5. Ochthenomus bivittatus n. sp.

Luteo-ferrugineus, fortiter denseque punctatus, opacus, tenuiter squamosus, pedibus elytrisque dilutioribus, his vittis transversis duabus latis, priore ante medium, altera ante apicem, nigris, antennarum clava picea, valde dilatata. Long. 0,002 — 0,0022. Lat. 0,0005 — 0,0006.

Fortiter et dense punctatus, opacus, totus squamulis setiformibus brevibus obtectus. Caput oblongiusculum, postice rotundatum, nonnunquam occipite tenuiter fossulato, vertice convexiusculo, inter oculos depressum, epistomatis lateribus fortiter supra antennarum basin elevatis, luteo-ferrugineum, antice in depressione fuscum; oculis minutis, prominulis; antennis longiusculis, articulis primo valde incrassato, secundo ceteris breviore, 2-4 teretibus, 5-6 sensim crassioribus, sequentibus etiam fortius incrassatis complanatis, ultimo praecedente vix sesqui longiore, ferrugineis, apice fuscis. Pronotum capite angustius, latitudine summa sesqui longius, antice angustatum, lateribus ante medium leviter rotundatis, postice cylindricum lateribus rectis, transversim convexum, cervicula brevi, capitis instar luteo-ferrugineum, dense punctatum et squamulis obsitum. Scutellum minutissimum, vix conspicuum, rufum. Elytra antice prothoracis basi fere duplo latiora, latitudine bis cum semisse longiora, subparallela, postice vix latiora, apice rotundata angulo externo nullo, interno recto, subdepressa, dense punctata et squamulis tenuibus obtecta, flava, opaca, vittis latis duabus transversis nigris, altera ante medium totidem lata quot spatium testaceum anticum, altera pone medium apicem non attingente: vel, ut aliter dicam, nigra, quarta parte antica, vitta mox pone medium et apice anguste flavis. Corpus subtus rufum, abdomine nigro, pedibus testaceis.

Variat *colore obscuriore: a.* Capite antennisque magis infuscatis,

vittis nigris elytrorum latioribus, apice ipso a nigredine vittae posticae invaso.

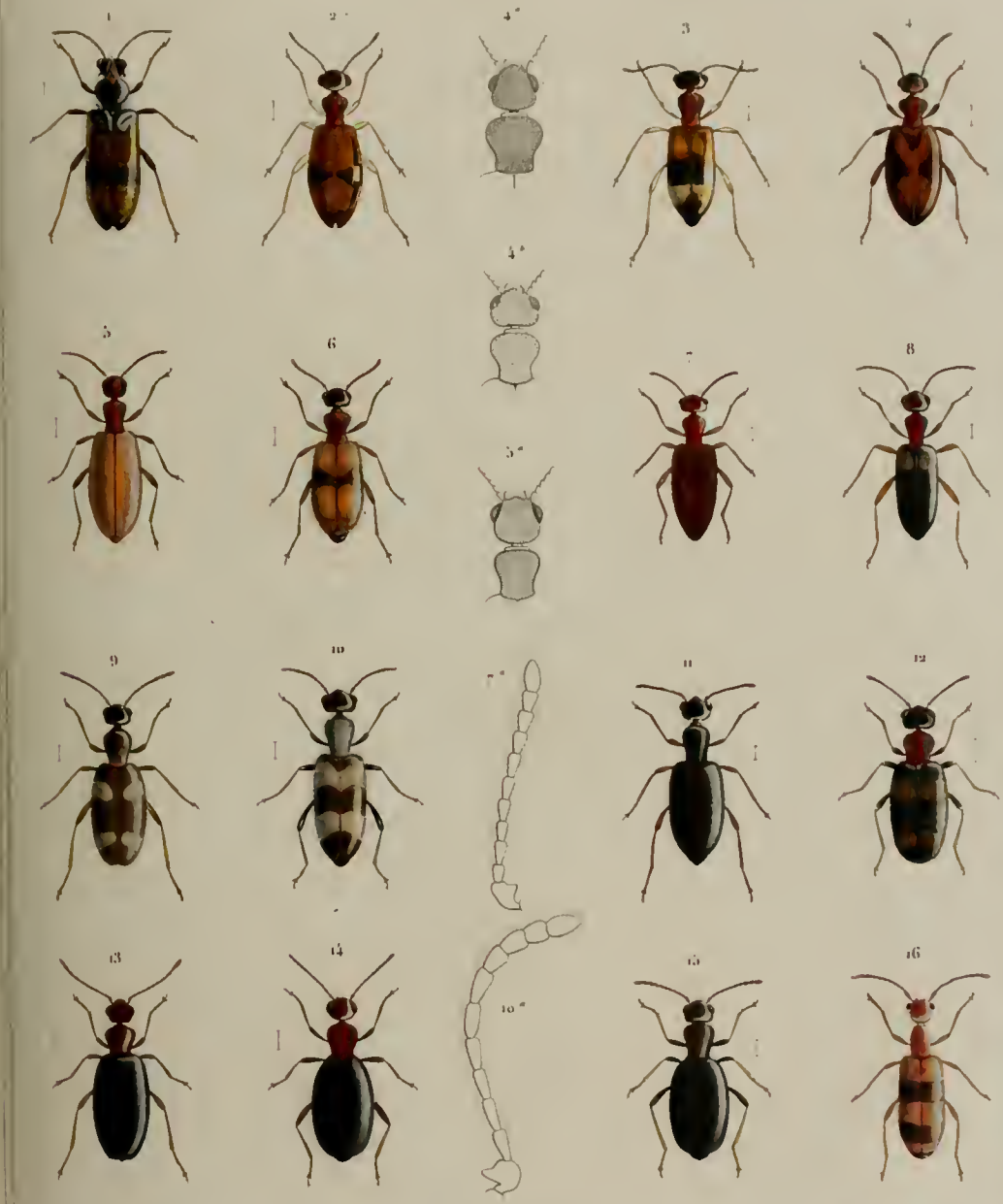
Colore dilutiore: b. Capite toto luteo-ferrugineo, nusquam infuscato, vittis nigris elytrorum angustioribus.

c. Vitta nigra antica omnino nulla, postica tantum angustius exstante.

Tempore autumnali et hiberno in insula Cypro frequens. Larnacae, antiqui Citii, vel domi cursitantem vel rure sub lapidibus, in hortis, pluries legi. Varietatem *c* semel tantum Nicosiae una cum individuis typicis degentem inveni.

Cum panca adhuc haberem hujus speciei individua, putaveram ipsam posse *Ochthenomo Lefebvrei* Laf., cum quo antennarum structura convenit, referri: sed postea, et cl.^n^ D. Laferté in litteris monente, et specimimum copia observata, facile suasus fui ut ambas sejunctim locarem. Inter quadraginta specimina nullum adeo fuscum occurrit ut *Ochthenomi Lefebvrei* descriptioni consonet. Praeterea ex eadem descriptione patet *Ochthenomum Lefebvrei* nullo modo, ut species europeae et nostra hujus generis, squamulis obtectum esse, qua nota, nec non colore obscuriore, antennisque apice abrupte non sensim ut in nostro, nigris, ab hoc cyprio specie differre videtur.

Varietas *c Ochthenomo unifasciato* simillima, at statura minore, capite antice fortiter incavato, prothorace postice non angustato, fasciaque postica ad suturam non dilatata, facile distinguenda.



Solei del

Lebrun sc

1 Notoxus rubeloeum.
2 Anthicus glabellus
3 cero
4 fatuus
4.a id
4.b Anthicus astulatus
5 mcmnplus
5.a id
6 villosulus
7. Cerastes
7.a Anthicus Cerastes (Antenna)
8. phoenicurus
9. ornatus
10 armatus
10.a id (Antenna)
11. Anthicus scurrula.
12 aspelius
13 sidonius
14 Laferlei
15. Gorgus
16. Ochthenomus bivittatus

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

SPECIERUM INDEX ET TABULAE EXPLANATIO

1. Notoxus *brachycerus*. Faldermann ..... pag. 341
2. » *excisus*. Kuester ..... » ibid.
3. » *trifasciatus*. Rossi ..... » 342
4. » *syriacus*. Lafertè ..... » ibid.
5. » *rabetorum* n. sp. (Fig. 1) ..... » 343
1. Mecynotarsus *bison*. Olivier ..... » 344
1. Myrmecosoma *coeruleipenne*. Lafertè ..... » 345
2. » *pedestre*. Rossi ..... » ibid.
3. » *Ninus*. Lafertè ..... » ibid.
4. » *jonicum*. Lafertè ..... » 346
1. Anthicus *glabellus* n. sp. (Fig. 2) ..... » ibid.
2. » *triguttatus*. Lafertè ..... » 347
3. » *Chaudoirii*. Kolenati ..... » ibid.
4. » *erro* n. sp. (Fig. 3) ..... » 348
5. » *ustulatus*. Lafertè (Fig. 4 *b*) ..... » 349
6. » *fatuus* n. sp. (Fig. 4 et 4 *a*) ..... » 350
7. » *incomptus* n. sp. (Fig. 5 et 5 *a*) ..... » ibid.
8. » *villosulus* n. sp. (Fig. 6) ..... » 351
9. » *humilis*. Germar ..... » 352
10. » *Bremei*. Lafertè ..... » 354
11. » *Cerastes* n. sp. (Fig. 7 et 7 *a*) ..... » 355
12. » *floralis*. Fabricius ..... » 356
13. » *phoenicius* n. sp. (Fig. 8) ..... » ibid.
14. » *bifasciatus*. Rossi ..... » 357
15. » *longicollis*. Schmidt ..... » 358
16. » *ornatus* n. sp. (Fig. 9) ..... » ibid.
17. » *tenuipes*. Lafertè ..... » 359
18. » *tristis*. Schmidt ..... » ibid.
19. » *armatus* n. sp. (Fig. 10 et 10 *a*) ..... » ibid.
20. » *antherinus*. Linnè ..... » 361
21. » *crinitus*. Lafertè ..... » ibid.
22. » *hispidus*. Rossi ..... » ibid.
23. » *morio*. Lafertè ..... » ibid.
24. » *scurrula* n. sp. (Fig. 11) ..... » 362
25. » *fenestratus*. Schmidt ..... » 363
26. » *aspelius* n. sp. (Fig. 12) ..... » ibid.
27. » *sidonius* n. sp. (Fig. 13) ..... » 365
28. » *Lafertei* n. sp. (Fig. 14) ..... » ibid.
29. » *Gorgus* n. sp. (Fig. 15) ..... » 366
30. » *Iscariotes*. Lafertè ..... » 367
1. Ochthenomus *unifasciatus*. Bonelli ..... » 368
2. » *angustatus*. Lafertè ..... » ibid.
3. » *bivittatus* n. sp. (Fig. 16) ..... » 369

LOIS GÉNÉRALES

DE DIVERS ORDRES DE PHÉNOMÈNES

DONT L'ANALYSE

DÉPEND D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

TELS QUE CEUX

DES VIBRATIONS ET DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

PAR

L. F. MÉNABRÉA

COLONEL DU GÉNIE MILITAIRE.

Lu dans la séance du 15 avril 1855.

Les lois fondamentales des phénomènes qui se rapportent aux vibrations et à la propagation de la chaleur dans les corps solides, se déduisent d'équations linéaires aux différences partielles ou, plus généralement, d'équations linéaires entre les variables et leurs fonctions dérivées prises par rapport au temps, et dans lesquelles le temps n'entre pas d'une manière explicite. Dans le problème des vibrations, les fonctions dérivées sont du deuxième ordre; dans celui de la propagation de la chaleur, elles sont simplement du premier. Il suit de ce rapprochement, que les lois qui régissent ces deux ordres de phénomènes, doivent avoir des caractères analytiques communs; c'est ce qu'ont démontré plusieurs Géomètres et entre autres Poisson dans sa *Théorie de la Chaleur*. Toutefois les considé-

rations développées par ce grand Mathématicien, n'ont pas toute la généralité qu'on peut concevoir; en outre les résultats auxquels il arrive sont fondés sur une analyse d'autant plus difficile qu'on n'y trouve pas établie une convenable distinction entre les conditions relatives aux limites et celles qui se rapportent aux données initiales du problème.

J'ai donc pensé que cet argument pouvait donner lieu à de nouvelles recherches qui m'ont conduit à une question beaucoup plus étendue que celles traitées jusqu'ici à ma connaissance; cette question a pour objet d'embrasser dans une même analyse toutes les théories qui peuvent dépendre d'équations linéaires différentielles d'un ordre quelconque, afin d'arriver à des formules générales, dont celles qui se rapportent aux vibrations et à la propagation de la chaleur ne soient que des cas particuliers. Tel est l'objet du présent Mémoire, dans lequel je suis parvenu au but que je me proposais par des procédés qui me semblent mériter quelque attention à cause de leur simplicité et de leur généralité.

J'examine en premier lieu un système de points matériels distribués d'une manière quelconque et réagissant les uns sur les autres. Dans le problème des vibrations, par exemple, ces réactions sont des forces de tensions ou de contractions mutuelles, et les variables, fonctions du temps, sont les petits déplacements des points du système. Dans le problème de la chaleur, les réactions sont les échanges mutuelles de chaleur entre les divers points matériels, les variables sont les températures de ces mêmes corps. Il y doit généralement y avoir autant d'équations linéaires différentielles distinctes qu'il y a de variables fonctions du temps. Je traite d'abord le cas dans lequel chacune de ces équations contient toutes les variables et leurs fonctions dérivées de l'ordre $n^{\text{ième}}$, et je déduis l'expression de chacune de ces variables en fonction du temps et des données initiales du problème. Je considère ensuite un système dans lequel chaque équation linéaire ne contient que les fonctions dérivées de divers ordres d'une seule variable, en même temps que toutes les autres variables.

Si le système au lieu d'être composé de points matériels distribués d'une manière quelconque, est, au contraire, continu ou formé de parties continues, les équations linéaires dont il a été question précédemment, se transforment en équations aux différentielles partielles dont le nombre sera égal à celui des divers corps continus qui constituent le système. Outre ces équations, il y en aura de particulières qui appartiendront les unes aux points matériels isolés, et les autres aux limites des corps tels que

points, lignes et surfaces libres ou de contact. Le passage des formules du cas précédent à celles relatives à un système composé de corps continus, se fait d'une manière très-simple ; l'on obtient ainsi des expressions générales qui embrassent la question dans toute son étendue, et donnent la solution de tous les problèmes que l'on peut ramener à dépendre d'équations linéaires aux différences partielles. Si l'on veut, par exemple, employer ces formules pour le problème des vibrations, il suffira d'y faire $n = 2$; et pour les appliquer à la propagation de la chaleur on prendra $n = 1$.

Je consacre un paragraphe à l'examen de quelques conséquences que l'on peut déduire des formules démontrées précédemment.

Afin de confirmer les principes que je développe, j'en fais l'application au problème de la distribution de la chaleur dans une sphère composée d'un noyau sphérique homogène et recouvert d'une couche sphérique également homogène mais de matière différente. Ce problème a été traité par Poisson dans sa *Théorie de la Chaleur ;* on aura ainsi occasion de comparer les deux méthodes et de vérifier la généralité et l'exactitude de celle que je propose. Pour ce qui tient aux vibrations, je renvois à mon précédent Mémoire (*) sur cette matière, dans lequel j'ai fait une constante application des principes que j'ai généralisés dans l'écrit actuel.

Le travail que je soumets aujourd'hui à l'Académie pourrait être exposé comme une étude purement analytique ; mais afin d'en rendre les résultats plus sensibles à l'esprit, je n'ai pas cru devoir séparer cette étude, des considérations de physique-mathématiques qu'elle a principalement pour but. C'est, d'ailleurs, en présentant, dans une même analyse, les lois de divers ordres de phénomènes que l'on peut en saisir les rapports, et remonter ainsi aux causes premières qui les produisent. Puisse cet écrit n'être pas inutile pour ces recherches qui sont l'objet le plus élevé de la philosophie naturelle.

(*) *Études sur la théorie des vibrations.* Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin. Série II. Tome XV.

I.

Considérons un système de points matériels liés entre eux d'une manière quelconque et exerçant une action mutuelle les uns sur les autres. Soient $u_1, u_2, \ldots u_r$ des variables fonctions du temps t, et relatives à ces divers points. Nous admettrons que l'union du système soit exprimé par des équations linéaires entre les variables et leurs dérivées prises par rapport au temps; le nombre de ces équations que nous appellerons *primitives* sera égal à celui des variables elles-mêmes. En vertu de l'action mutuelle des points matériels auxquels se rapportent les variables, les coefficients de ces dernières et de leurs dérivées seront *réciproquement* égaux dans les équations primitives correspondantes. On peut se convaincre de la vérité de ce principe en examinant les équations fondamentales des mouvements vibratoires et celles de la propagation de la chaleur.

Étudions en premier lieu le cas où chaque équation primitive ne contient que les dérivées de l'ordre n des diverses variables; les équations seront de la forme suivante :

$$[1] \quad \ldots\ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + a_{(1,2)} \dfrac{d^n u_2}{dt^n} + a_{(1,3)} \dfrac{d^n u_3}{dt^n} + \text{etc.} \\ + M_1 u_1 + A_{(1,2)} u_2 + A_{(1,3)} u_3 + \text{etc.} = 0 \ ; \\ m_2 \dfrac{d^n u_2}{dt^n} + a_{(1,2)} \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + a_{(2,3)} \dfrac{d^n u_3}{dt^n} + \text{etc.} \\ + M_2 u_2 + A_{(1,2)} u_1 + A_{(2,3)} u_3 + \text{etc.} = 0 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

$$a_{(i,j)} = a_{(j,i)} \ ;$$

$$A_{(i,j)} = A_{(j,i)} \ ;$$

i et j étant deux indices différents.

Pour déduire les expressions de u_1, $u_2 \ldots u_r$ des équations [1], sommons-les après avoir multiplié la première par p_1, la deuxième par $p_2 \ldots$, ainsi de suite; nous aurons :

$$[2] \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^n u_1}{dt^n}\left\{ p_1 m_1 + p_2 a_{(1,2)} + p_3 a_{(1,3)} + \text{etc.} \right\} \\ + \dfrac{d^n u_2}{dt^n}\left\{ p_2 m_2 + p_1 a_{(1,2)} + p_3 a_{(2,3)} + \text{etc.} \right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{d^n u_r}{dt^n}\left\{ p_r m_r + p_1 a_{(1,r)} + p_2 a_{(2,r)} + \text{etc.} \right\} \\ + u_1 \left\{ p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \text{etc.} \right\} \\ + u_1 \left\{ p_2 M_2 + p_1 A_{(1,2)} + p_3 A_{(2,3)} + \text{etc.} \right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_r \left\{ p_r M_r + p_1 A_{(r,1)} + p_2 A_{(r,2)} + \text{etc.} \right\} = 0 \ . \end{array} \right.$$

Comme p_1, $p_2 \ldots p_r$ sont des coefficients arbitraires, nous les déterminerons de manière à ce que l'on ait :

$$[3] \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p_2 m_2 + p_1 a_{(1,2)} + p_3 a_{(2,3)} + \text{etc.}}{p_1 m_1 + p_2 a_{(1,2)} + p_3 a_{(1,3)} + \text{etc.}} = \dfrac{p_2 M_2 + p_1 A_{(1,2)} + p_3 A_{(2,3)} + \text{etc.}}{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \text{etc.}} \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

en nombre suffisant pour déterminer les rapports $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$ ... $\frac{p_r}{p_1}$ ce qui est assez pour le but que nous nous proposons.

Si, pour abréger, nous représentons par $b_1, b_2 \ldots b_r$ et par $B_1, B_2 \ldots B_r$ les coefficients respectifs de $\frac{d^n u_1}{dt^n}$; $\frac{d^n u_2}{dt^n}$ ... $\frac{d^n u_r}{dt^n}$ et de $u_1, u_2 \ldots u_r$ dans l'équation [2], celle-ci pourra s'écrire ainsi qu'il suit:

$$[4] \ldots \quad \frac{d^n u_1}{dt^n} b_1 + \frac{d^n u_2}{dt^n} b_2 \ldots + \frac{d^n u_r}{dt^n} b_r + u_1 B_1 + u_2 B_2 \ldots + u_r B_r = 0 \ .$$

Les équations [3] deviendront

$$[5] \ldots \ldots \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{B_2}{B_1} \ ; \qquad \frac{b_3}{b_1} = \frac{B_3}{B_1} \ldots \frac{b_r}{b_1} = \frac{B_r}{B_1} \ ;$$

d'où l'on déduit

$$[6] \ldots \ldots \quad \frac{B_1}{b_1} = \frac{B_2}{b_2} = \frac{B_3}{b_3} \ldots = \frac{B_r}{b_r} = k^n \ ,$$

où k^n est une quantité constante que l'on obtiendra en éliminant les rapports $\frac{p_2}{p_1} \ldots \frac{p_r}{p_1}$ entre les r équations [6]. Il en résultera, par rapport à k^n, une équation du degré r, que nous représenterons par

$$[7] \ldots \ldots \ldots \ldots \quad K = 0 \ ,$$

et qui donnera r valeurs de k^n.

Quant à l'équation [4] elle deviendra, en vertu des équations [6],

$$[8] \ldots \ldots \begin{cases} \dfrac{d^n u_1}{dt^n} + \dfrac{B_2}{B_1} \cdot \dfrac{d^n u_2}{dt^n} \ldots + \dfrac{B_r}{B_1} \cdot \dfrac{d^n u_r}{dt^n} \\ + k^n \left(u_1 + \dfrac{B_2}{B_1} u_2 \ldots + \dfrac{B_r}{B_1} u_r \right) = 0 \ . \end{cases}$$

Faisons, par abréviation,

$$[9] \ldots \ldots \quad u_1 + \frac{B_2}{B_1} u_2 + \ldots + \frac{B_r}{B_1} u_r = v \ ;$$

l'équation précédente [8] prendra la forme

[10] ..... $$\frac{d^n v}{dt^n} + k^n v = 0 .$$

Si e représente la base des logarithmes hyperboliques, E une constante arbitraire, et h un coefficient également constant, on déduira, par l'intégration de l'équation précédente,

[11] ..... $$v = E e^{ht} .$$

En introduisant cette valeur dans l'équation [10] on aura

[12] ..... $$h^n + k^n = 0 ;$$

d'où l'on déduit

[13] ..... $$h = k.\sqrt[n]{-1} .$$

Or, comme $\sqrt[n]{-1}$ fournit n valeurs différentes, l'on aura autant de valeurs correspondantes de h ; si donc l'on représente par α, β, γ, ν les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de (-1), et par E_1, E_2, E_3 ... E_n les valeurs arbitraires correspondantes de E, l'expression générale de v se composera, comme il suit, de la somme de ses valeurs particulières :

[14] ..... $$v = E_1 e^{\alpha kt} + E_2 e^{\beta kt} \ldots + E_n e^{\nu kt} ,$$

puisque les valeurs de h sont respectivement

$$h_1 = \alpha k , \qquad h_2 = \beta k \ldots h_r = \nu k .$$

L'on sait, qu'en général, les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de -1 sont représentées par la formule

$$\sqrt[n]{-1} = e^{\frac{2l+1}{n}\pi.\sqrt{-1}} ,$$

où π exprime le rapport de la circonférence au diamètre, et dans laquelle on fera successivement $l = 0$, $l = 2$ ... etc. : de sorte que, si l'on exprime par α la racine correspondante à $l = 0$, ce qui donne

[15] ..... $$\alpha = e^{\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}} ,$$

les autres racines seront :

$$\alpha^3,\quad \alpha^5,\quad \alpha^7 \ldots \alpha^{2n-1}\ ;$$

ainsi l'expression générale de v deviendra

$$[16] \ldots\ldots\quad v = E_1 e^{\alpha k t} + E_2 e^{\alpha^3 k t} \ldots + E_n e^{\alpha^{2n-1} k t}\ .$$

Afin de déterminer les constantes arbitraires E_1, $E_2 \ldots E_n$, nous supposerons connues les conditions initiales du problème, ou, en d'autres termes, nous admettrons que, lorsque $t=0$, l'on connaisse les valeurs de u_1, $u_2 \ldots u_r$, et celles de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$: nous indiquerons par l'indice " ces valeurs relatives à $t=0$. Cela posé, l'on déduira des équations [9] et [16],

$$\left\{\begin{array}{l} \mathring{v} = \mathring{u}_1 + \dfrac{B_2}{B_1}\mathring{u}_2 \ldots + \dfrac{B_r}{B_1}\mathring{u}_r = E_1 + E_2 \ldots + E_n\ ; \\ \dfrac{d\mathring{v}}{dt} = \dfrac{d\mathring{u}_1}{dt} + \dfrac{B_2}{B_1}\cdot\dfrac{d\mathring{u}_2}{dt} \ldots + \dfrac{B_r}{B_1}\cdot\dfrac{d\mathring{u}_r}{dt} \\ \qquad = k(\alpha E_1 + \alpha^3 E_2 \ldots + \alpha^{2n-1} E_n)\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

par α, la troisième par $\alpha^2 \ldots$, la $n^{\text{ième}}$ par α^{n-1}, nous aurons :

$$[19] \ldots \begin{cases} \mathring{v} + \frac{\alpha}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^2}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2} \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{n-1}} \\ = E_1(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n-2}) \\ + E_2(1 + \alpha^4 + \alpha^8 \ldots\ldots + \alpha^{4n-4}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + E_n\left(1 + \alpha^{2n} + \alpha^{4n} \ldots + \alpha^{2n(n-1)}\right) \\ = E_1\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} + E_2\frac{\alpha^{4n}-1}{\alpha^4-1} \ldots + E_n\frac{\alpha^{2n.n}-1}{\alpha^{2n}-1}\,. \end{cases}$$

Or, comme $\alpha^n = -1$, on aura $\alpha^{2n} = \alpha^{4n} = \ldots \alpha^{2n(n-1)} = 1$; d'où l'on conclura que les coefficiens de E_1, E_2, E_3 ... etc. seront nuls à l'exception de celui de E_n qui est évidemment égal à n. Ainsi le dernier membre de l'équation [19] se réduit à nE_n ; d'où l'on tire

$$[20] \ldots \quad E_n = \frac{1}{n}\left\{\mathring{v} + \frac{\alpha}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^2}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2} \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{n-1}}\right\}.$$

Pareillement, en multipliant respectivement par α^3, $\alpha^6 \ldots \alpha^{3(n-1)}$ les deuxième, troisième ..... $n^{\text{ièmes}}$ équations [18], et en les sommant ensuite, avec la première, on aura :

$$\begin{aligned} &\mathring{v} + \frac{\alpha^3}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^6}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2} \ldots + \frac{\alpha^{3(n-1)}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{2-1}} \\ &= E_1(1 + \alpha^4 + \alpha^8 \ldots + \alpha^{4n-4}) \\ &\quad + E_2(1 + \alpha^6 + \alpha^{12} \ldots + \alpha^{6n-6}) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + E_{n-1}\left(1 + \alpha^{2n} + \alpha^{4n} \ldots + \alpha^{2n(n-1)}\right) \\ &\quad + E_n\left(1 + \alpha^{2n+2} + \alpha^{4n+4} \ldots + \alpha^{(n-1)(2n+2)}\right) \\ &= E_1\frac{\alpha^{4n}-1}{\alpha^4-1} + E_2\frac{\alpha^{6n}-1}{\alpha^6-1} \ldots + nE_{n-1} + E_n\frac{\alpha^{n(2n+2)}-1}{\alpha^{2n+2}-1} \\ &= nE_{n-1}\,; \end{aligned}$$

d'où

$$[21] \ldots \quad E_{n-1} = \frac{1}{n}\left\{\mathring{v} + \frac{\alpha^3}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^6}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2}\ldots + \frac{\alpha^{3(n-1)}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{n-1}}\right\}.$$

L'on obtiendra d'une manière analogue

$$[22] \ldots \quad E_{n-2} = \frac{1}{n}\left\{\mathring{v} + \frac{\alpha^5}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^{10}}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2}\ldots + \frac{\alpha^{5(n-1)}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{n-1}}\right\},$$

et, en général, i étant un indice quelconque, on aura:

$$[23] \ldots \quad E_i = \frac{1}{n}\left\{\mathring{v} + \frac{\alpha^{2n-2i+1}}{k}\cdot\frac{d\mathring{v}}{dt} + \frac{\alpha^{2(2n-2i+1)}}{k^2}\cdot\frac{d^2\mathring{v}}{dt^2}\cdots\cdots + \frac{\alpha^{(n-1)(2n-2i+1)}}{k^{n-1}}\cdot\frac{d^{n-1}\mathring{v}}{dt^{n-1}}\right\}.$$

Ainsi les valeurs des constantes arbitraires E_1, $E_2 \ldots E_n$ se trouvent toutes déterminées au moyen des données initiales du problème. Nous n'avons, jusqu'ici, obtenu que les expressions générales de v, ainsi que des constantes arbitraires précédentes; mais observons que v, aussi bien que E_1, $E_2 \ldots E_n$ sont fonctions de k, et que l'équation [7] nous fournit r valeurs de k^n et par conséquent de k. De sorte que, à chacune de ces valeurs, il y en aura une correspondante de v. Nous accentuerons les quantités qui se rapportent à ces diverses valeurs; de cette manière nous aurons, en vertu des équations [9] et [16], les r équations suivantes, dont le nombre est égal à celui des variables:

$$[24] \begin{cases} v' = u_1 + \dfrac{B_2'}{B_1'}u_2 + \ldots + \dfrac{B_r'}{B_1'}u_r = E_1' e^{\alpha k' t} \ldots + E_n' e^{\alpha^{2n-1} k' t} = T' ; \\ v'' = u_1 + \dfrac{B_2''}{B_1''}u_2 + \ldots + \dfrac{B_r''}{B_1''}u_r = E_1'' e^{\alpha k'' t} \ldots + E_n'' e^{\alpha^{2n-1} k'' t} = T'' ; \\ \ldots\ldots\ldots\

Comme on le voit, il sera toujours possible de déduire de ces équations les valeurs de $u_1, u_2 \ldots u_r$ et l'on aura évidemment des expressions de la forme

$$[25] \ldots \ldots \begin{cases} u_1 = F_1' T' + F_1'' T'' \ldots + F_1^{(r)} T^{(r)} ; \\ u_2 = F_2' T' + F_2'' T'' \ldots + F_2^{(r)} T^{(r)} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ u_r = F_r' T' + F_r'' T'' \ldots + F_r^{(r)} T^{(r)} ; \end{cases}$$

où $F_1', F_2' \ldots F_r'$; $F_1'', F_2'' \ldots F_r''$ désignent des coefficients indépendants du temps, et qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, substituons ces valeurs dans une des équations [1], la première, par exemple, nous aurons:

$$[26] \ldots \begin{cases} \dfrac{d^n T'}{dt^n} \Big\{ m_1 F_1' + a_{(1,2)} F_2' + a_{(1,3)} F_3' \ldots \Big\} \\ + \dfrac{d^n T''}{dt^n} \Big\{ m_1 F_1'' + a_{(1,2)} F_2'' + a_{(1,3)} F_3'' \ldots \Big\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + T' \Big\{ M_1 F_1' + A_{(1,2)} F_2' + A_{(1,3)} F_3' \ldots \Big\} \\ + T'' \Big\{ M_1 F_1'' + A_{(1,2)} F_2'' + A_{(1,3)} F_3'' \ldots \Big\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 . \end{cases}$$

Si l'on observe que

$$\alpha^n = -1 \; ; \qquad \alpha^{3n} = -1 \ldots \alpha^{n(2n-1)} = -1 \; ;$$

on conclura des équations [24], de même que de l'équation [10], que

$$[27] \ldots \quad \frac{d^n T'}{dt^n} = -k'^n T' \; ; \qquad \frac{d^n T''}{dt^n} = -k''^n T'' \ldots \text{etc.}$$

En substituant dans l'équation [26] et observant que, pour qu'elle puisse subsister, les coefficients respectifs de $T', T'' \ldots\ldots$ etc. doivent être nuls, car ils sont constants tandisque $T', T'' \ldots\ldots$ varient avec le temps, on aura

$$[28]\ldots\ldots\ldots\begin{cases} k'^{n}=\dfrac{M_1F_1'+A_{(1,2)}F_2'+A_{(1,3)}F_3'+\text{etc.}}{m_1F_1'+a_{(1,2)}F_2'+a_{(1,3)}F_3'+\text{etc.}}\ ; \\ k''^{n}=\dfrac{M_1F_1''+A_{(1,2)}F_2''+A_{(1,3)}F_3''+\text{etc.}}{m_1F_1''+a_{(1,2)}F_2''+a_{(1,3)}F_3''+\text{etc.}}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or, si l'on compare ces expressions à celles que l'on déduit des équations [6], on verra qu'on ne peut y satisfaire à moins que l'on ait :

$$[29]\ldots\ldots\quad \frac{F_2}{F_1}=\frac{p_2}{p_1}\ ;\qquad \frac{F_3}{F_1}=\frac{p_3}{p_1}\ \ldots\ldots\ \frac{F_i}{F_1}=\frac{p_i}{p_1}\ ;$$

l'on obtiendra donc les rapports $\frac{F_2'}{F_1'}$; $\frac{F_2''}{F_1''}$ ... $\frac{F_3'}{F_1'}$; $\frac{F_3''}{F_1''}$... etc.; en mettant pour $\frac{p_1}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$... leurs valeurs correspondantes aux diverses racines de l'équation [7]. L'on arriverait à un résultat semblable en substituant les valeurs [25] de u_1, u_2... dans une quelconque des équations [1]. D'après cela les expressions de ces variables seront

$$[30]\ldots\begin{cases} u_1=F_1'T'+F_1''T''+F_1'''T'''+\text{etc.}\ldots\ldots=\overset{(r)}{\Sigma}_{(1)}.F_1T\ : \\ u_2=\dfrac{p_2'}{p_1'}F_1'T'+\dfrac{p_2''}{p_1''}F_1''T''+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots=\overset{(r)}{\Sigma}_{(1)}.\dfrac{p_2}{p_1}F_1T\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

différentes valeurs F_1', F_1''..... de cette constante. Dans ce but, substituons les expressions [30] de u_1, $u_2 \ldots u_r$ dans une quelconque des équations [24], dans la première, par exemple, nous aurons:

$$[32] \ldots\ldots \begin{cases} F_1' T' \left\{ 1 + \frac{p_2'}{p_1'} \cdot \frac{B_2'}{B_1'} \ldots + \frac{p_r'}{p_1'} \cdot \frac{B_r'}{B_1'} \right\} \\ + F_1'' T'' \left\{ 1 + \frac{p_2''}{p_1''} \cdot \frac{B_2'}{B_1'} \ldots + \frac{p_r''}{p_1''} \cdot \frac{B_r'}{B_1'} \right\} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T'. \end{cases}$$

Or comme T'', T''' etc. sont des fonctions du temps qui diffèrent les unes des autres, l'on ne peut satisfaire à l'équation précédente qu'en égalant, dans les deux membres, les coefficients de T', et en rendant nuls respectivement ceux de T''', T'''' etc.; d'où l'on déduira

$$[33] \ldots\ldots \quad F_1' = \frac{1}{1 + \frac{p_2'}{p_1'} \cdot \frac{B_2'}{B_1'} + \ldots + \frac{p_r'}{p_1'} \cdot \frac{B_r'}{B_1'}} ;$$

$$[34] \ldots\ldots \begin{cases} 1 + \frac{p_2''}{p_1''} \cdot \frac{B_2'}{B_1'} + \frac{p_3''}{p_1''} \cdot \frac{B_3'}{B_1'} \ldots + \frac{p_r''}{p_1''} \cdot \frac{B_r'}{B_1'} = 0 ; \\ 1 + \frac{p_2'''}{p_1'''} \cdot \frac{B_2'}{B_1'} + \frac{p_3'''}{p_1'''} \cdot \frac{B_3'}{B_1'} \ldots + \frac{p_r'''}{p_1'''} \cdot \frac{B_r'}{B_1'} = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En général on conclura de l'analyse précédente que l'on a

$$[35] \ldots\ldots F_1 = \frac{1}{1 + \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} + \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{B_3}{B_1} \ldots + \frac{p_r}{p_1} \cdot \frac{B_r}{B_1}}$$

$$= \frac{p_1 B_1}{p_1 B_1 + p_2 B_2 + p_3 B_3 \ldots\ldots + p_r B_r} = \frac{p_1 B_1}{\sum_1^r . p B} .$$

$$[36] \ldots\ldots p_1^{(j)} B_1^{(i)} + p_2^{(j)} B_2^{(i)} + p_3^{(j)} B_3^{(i)} \ldots\ldots p_r^{(j)} B_r^{(i)} = 0 ;$$

où j et i désignent deux indices différents, et $\sum_1^r . p B$ exprime la somme des termes $p_1 B_1$; $p_2 B_2$ ..... etc.

Ainsi l'expression [31] de u_i deviendra

$$[37] \ldots\ldots\ldots \qquad u_i = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot \frac{p_i B_1}{\sum_1^r \cdot p B} T' \; ;$$

formule qui contient la solution complète du problème.

Pour avoir cette formule sous une forme plus explicite, nous substituerons, dans la précédente, pour T' sa valeur; on observera que, d'après les équations [17], l'on a

$$[38] \ldots\ldots \qquad \dot{v} = \frac{1}{B_1} \cdot \sum_1^r \cdot B \hat{u} \; ; \qquad \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{1}{B_1} \cdot \sum_1^r \cdot B \frac{d\hat{u}}{dt} \; ;$$

et, en vertu des équations [23] et [24], l'on a

$$[39] \ldots \quad T = \frac{1}{n B_1} \cdot \sum_{j=1}^{j=n} e^{k \alpha^{2j-1} t} \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r \cdot B \hat{u} + \dfrac{\alpha^{2n-2j+1}}{k} \cdot \sum_1^r \cdot B \dfrac{d\hat{u}}{dt} \cdot \cdots \cdots \\ \qquad + \dfrac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}} \cdot \sum_1^r \cdot B \dfrac{d^{n-1}\hat{u}}{dt^{n-1}} \end{array} \right\} ;$$

où $\sum_{j=1}^{j=n}$ indique la somme que l'on obtient en donnant à j toutes les valeurs entières comprises de $j=1$ jusqu'à $j=n$ inclusivement; ainsi il viendra

$$[40] \ldots \quad u_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{(1)}^{(r)} \cdot \frac{p_i}{\sum_1^r \cdot p B} \cdot \sum_{j=1}^{j=n} e^{k \alpha^{2j-1} t} \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r \cdot B \hat{u} + \dfrac{\alpha^{2n-2j+1}}{k} \cdot \sum_1^r \cdot B \dfrac{d\hat{u}}{dt} \cdots \\ \qquad + \dfrac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}} \cdot \sum_1^r \cdot B \dfrac{d^{n-1}\hat{u}}{dt^{n-1}} \end{array} \right\} .$$

Nous rappelons que le signe $\sum_{(1)}^{(r)}$ exprime la somme qui s'étend à toutes les valeurs que prennent les quantités qui lui sont soumises, en y mettant successivement pour k ses r valeurs k', $k'' \ldots k^{(r)}$.

Lorsque, dans les équations primitives [1], les coefficients $a_{(1,2)}$, $a_{(1,3)} \ldots a_{(i,1)}$, $a_{(i,2)} \ldots$ etc. sont nuls, ou, en d'autres termes, quand les équations primitives se réduisent aux suivantes :

$$[41]\ldots\begin{cases} m_1\dfrac{d^n u_1}{dt^n}+M_1u_1+A_{(1,2)}u_2\ldots\ldots+A_{(1,r)}u_r=0\ ; \\ m_2\dfrac{d^n u_2}{dt^n}+M_2u_2+A_{(1,2)}u_1\ldots\ldots+A_{(2,r)}u_r=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_r\dfrac{d^n u_r}{dt^n}+M_ru_r+A_{(r,1)}u_r\ldots\ldots+A_{(r,r-1)}u_{r-1}=0\ ; \end{cases}$$

l'on a, d'après les équations [3] et [5],

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{p_2m_2}{p_1m_1}\ ;\qquad \frac{B_3}{B_1}=\frac{b_3}{b_1}=\frac{p_3m_3}{p_1m_1}\ ;\qquad \text{etc.}$$

et, en général,

$$[42]\ldots\ldots\qquad B=B_1\frac{pm}{p_1m_1}\ ;$$

pm indiquant une des valeurs quelconques suivantes

$$p_1m_1\ ,\qquad p_2m_2\ ,\qquad \text{etc.}$$

Ainsi, en substituant dans la formule [40], l'on aura, dans ce cas,

$$[43]\ldots u_i=\frac{1}{n}\cdot\sum_{(i)}^{(r)}\cdot\frac{p_i}{\sum_1^r.mp^2}\cdot\sum_{j=1}^{j=n}e^{kx^{2j-1}t}\left\{\begin{array}{l}\sum_1^r.mp\mathring{u}+\dfrac{\alpha^{2n-2j+1}}{k}\cdot\sum_1^r.mp\dfrac{d\mathring{u}}{dt}\ \ldots \\ \qquad+\dfrac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}}\cdot\sum_1^r.mp\dfrac{d^{n-1}\mathring{u}}{dt^{n-1}}\end{array}\right\};$$

l'on déduira, en outre, des équations [6];

$$[44]\ldots\qquad k^n=\frac{M_1p_1+p_2A_{(1,2)}+p_3A_{(1,3)}+\text{etc.}}{p_1m_1}$$

$$=\frac{M_2p_2+p_1A_{(1,2)}+p_2A_{(2,3)}+\text{etc.}}{p_2m_2}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.}\ ,$$

et l'équation [36] donnera

$$[45]\ldots\quad m_1p_1^{(i)}p_1^{(j)}+m_2p_2^{(i)}p_2^{(j)}+m_3p_3^{(i)}p_3^{(j)}\ldots+m_rp_r^{(i)}p_r^{(j)}=0\ .$$

Cette dernière équation prouve que, dans le cas que nous examinons, k'' ne peut pas avoir de valeurs imaginaires.

En effet, si l'équation [7] avait des racines imaginaires, elles seraient par couple et de la forme

$$\begin{cases} \varpi + \rho . \sqrt{-1} \ ; \\ \varpi - \rho . \sqrt{-1} \ . \end{cases}$$

Chacune de ces racines donnerait, en général, pour p une valeur imaginaire; ainsi, en supposant que la première corresponde à l'indice i, et la deuxième à l'indice j, on aurait

$$p^{(i)} = P + Q . \sqrt{-1} \ ;$$

$$p^{(j)} = P - Q . \sqrt{-1} \ .$$

Cela posé, on peut disposer les équations [41] de manière à ce que tous les coefficients m_1, m_2, m_3 etc. soient positifs, ce qui a particulièrement lieu lorsque m représente la masse du point matériel auquel se rapporte la variable u; or, en substituant dans l'équation [45] les valeurs de $p^{(i)}$ et $p^{(j)}$, on aura

$$[46] \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{1}^{r} . m (P^2 + Q^2) = 0 \ ;$$

condition à laquelle on ne peut satisfaire qu'en prenant

$$[47] \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} P = 0 \ ; \\ Q = 0 \ . \end{cases}$$

Ainsi il est démontré que l'équation [7] n'admet aucune racine imaginaire lorsque les équations primitives se réduisent à celles [41].

Nous retrouverons cette même propriété dans un cas beaucoup plus général que nous allons examiner.

II.

Considérons le système d'équations suivant

$$[48]\ \ldots\ \begin{cases} m_1\left\{\dfrac{d^n u_1}{dt^n}+\nu\dfrac{d^p u_1}{dt^p}+\varpi\dfrac{d^q u_1}{dt^q}+\text{etc.}\right\} \\ +M_1 u_1+A_{(1,2)}u_2+A_{(1,3)}u_3+\text{etc.}=0\ ; \\ m_2\left\{\dfrac{d^n u_2}{dt^n}+\nu\dfrac{d^p u_2}{dt^p}+\varpi\dfrac{d^q u_2}{dt^q}+\text{etc.}\right\} \\ +M_2 u_2+A_{(1,2)}u_1+A_{(2,3)}u_3+\text{etc.}=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

Faisons

$$[50] \ldots \left\{ \begin{array}{l} k^n = \dfrac{p_1 M_1 + p_2 A_{(1,2)} + p_3 A_{(1,3)} + \text{etc.}}{p_1 m_1} \\ \quad = \dfrac{p_2 M_2 + p_1 A_{(1,2)} + p_3 A_{(2,3)} + \text{etc.}}{p_2 m_2} \\ \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad = \dfrac{p_r M_r + p_1 A_{(r,1)} + p_2 A_{(r,3)} + \text{etc.}}{p_r m_r} \end{array} \right. ;$$

$$[51] \ldots \quad v = u_1 + \frac{p_2 m_2}{p_1 m_1} u_2 + \frac{p_3 m_3}{p_1 m_1} u_3 + \text{etc.} ,$$

l'équation [49] deviendra

$$[52] \ldots \quad \frac{d^n v}{dt^n} + \nu \frac{d^p v}{dt^p} + \varpi \frac{d^q v}{dt^q} + \ldots\ldots + k^n v = 0 .$$

On y satisfait en prenant

$$[53] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = E e^{ht} ;$$

en substituant cette valeur dans l'équation [52] on obtient :

$$[54] \ldots\ldots\ldots \quad h^n + \nu h^p + \varpi h^q \ldots\ldots + k^n = 0 .$$

Cette équation donnera n valeur de h en fonction de k^n; en les indiquant par $h_{(1)}$, $h_{(2)} \ldots\ldots h_{(n)}$, la valeur de v se composera de la somme des termes $E e^{ht}$ correspondants, et sera ainsi

$$[55] \ldots \quad v = E_1 e^{h_{(1)} t} + E_2 e^{h_{(2)} t} + E_3 e^{h_{(3)} t} \ldots + E_n e^{h_{(n)} t} = T .$$

Pour déterminer les coefficients E_1, $E_2 \ldots\ldots E_n$ on aura recours aux conditions initiales du problème qui donneront les n équations suivantes:

$$
[56]\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}
\dot{v}=\dot{u}_1+\dfrac{p_2m_2}{p_1m_1}\dot{u}_2+\dfrac{p_3m_3}{p_1m_1}\dot{u}_3+\ldots\ldots \\
=E_1+E_2+E_3\ldots\ldots+E_n\ ; \\
\dfrac{d\dot{v}}{dt}=\dfrac{d\dot{u}_1}{dt}+\dfrac{p_2m_2}{p_1m_1}\cdot\dfrac{d\dot{u}_2}{dt}+\dfrac{p_3m_3}{p_1m_1}\cdot\dfrac{d\dot{u}_3}{dt}+\ldots\ldots \\
=h_{(1)}E_1+h_{(2)}E_2\ldots\ldots+h_{(n)}E_n\ ; \\
\dfrac{d^2\dot{v}}{dt^2}=\dfrac{d^2\dot{u}_1}{dt^2}+\dfrac{p_2m_2}{p_1m_1}\cdot\dfrac{d^2u_2}{dt^2}+\ldots\ldots \\
=h^2_{(1)}E_1+h^2_{(2)}E_2\ldots\ldots+h^2_{(n)}E_n\ ; \\
\ldots\ldots\ldots

$$[57]\ \ldots\quad u_i=\sum_{(1)}^{(r)}\cdot p_i\frac{m_1p_1}{\sum_1^r\cdot mp^2}\Big\{E_1e^{h_{(1)}t}+E_2e^{h_{(2)}t}\ldots\ldots+E_ne^{h_{(n)}t}\Big\}$$

$$=\sum_{(1)}^{(r)}\cdot p_i\frac{m_1p_1}{\sum_1^r\cdot mp^2}T\,,$$

qui est analogue à celle [37], et où $\sum_{(1)}^{(r)}\cdot$ indique la somme des termes correspondants aux diverses valeurs de k^n, et $\sum_1^r$ celle relative aux diverses quantités m_1p_1, m_2p_2, etc. L'on obtiendra pareillement une équation identique à celle [45], d'où l'on conclura que toutes les valeurs de k^n sont réelles.

Si les équations primitives [1] ou [48] contenaient des termes constants comme c_1, c_2 ....., on les ferait disparaître en posant

$$u_1=z_1+l_1\ ;\qquad u_2=z_2+l_2\ldots\ldots u_r=z_r+l_r\ldots\ldots$$

Les quantités l_1, l_2 ..... l_r seraient déterminées par les conditions

$$[58]\ \ldots\ldots\quad\begin{cases}M_1l_1+A_{(1,2)}l_2+A_{(1,3)}l_3\ldots\ldots+c_1=0\ ;\\ M_2l_2+A_{(1,2)}l_1+A_{(2,3)}l_3\ldots\ldots+c_2=0\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\

III.

Jusqu'ici nous avons considéré un système de points matériels distribués d'une manière quelconque: supposons actuellement que leur ensemble forme un corps continu, et appliquons y les formules trouvées précédemment. Nous considérerons spécialement le cas des équations primitives [48] qui est un des plus généraux qu'on rencontre dans les applications. Pour fixer les idées supposons que la position stable de chaque point soit exprimée par des coordonnées x, y, z, nous verrons du reste, que le résultat final, auquel on arrive, est indépendant du système des coordonnées.

Prenons l'équation générale [48] qui se rapporte à un point quelconque de l'intérieur du corps ou système, et désigné par l'indice ς; nous écrirons cette équation comme il suit:

$$[59] \ldots\ldots \quad m_\varsigma \left\{ \frac{d^n u_\varsigma}{dt^n} + \nu \frac{d^p u_\varsigma}{dt^p} + \varpi \frac{d^q u_\varsigma}{dt^q} + \text{etc.} \right\}$$

$$+ M_\varsigma u_\varsigma + A_{(\varsigma,1)} u_1 + A_{(\varsigma,2)} u_2 + \text{etc.} = 0 \ .$$

Nous admettrons que m_ς représente une quantité proportionnelle à la masse élémentaire correspondante au point en question; car on pourra toujours préparer l'équation de manière à ce qu'il en soit ainsi. Cela posé, observons qu'une des variables u_i, relative à un point quelconque, pourra toujours être, à un instant donné, exprimée en fonction de u_ς et de ses dérivées prises par rapport à x, y, z; c'est ce qui résulte des notions élémentaires du calcul aux différences; ainsi, dans le cas dont il s'agit, les variables u_1, u_2, u_3, etc. étant exprimées au moyen de u, et de ses dérivées, l'équation [59] prendra la forme suivante:

$$[60] \ldots\ldots \quad m. \left\{ \frac{d^n u}{dt^n} + \nu \frac{d^p u}{dt^p} + \varpi \frac{d^q u}{dt^q} + \text{etc.} \right\}$$

$$+ Vu + W \frac{d^{i+j+l} u}{dx^i dy^j dz^l} + W' \frac{d^{i'+j'+l'} u}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{l'}} + \text{etc.} = 0 \ ;$$

où V, W, W'..... etc. sont des coefficients fonctions de x, y, z. Nous avons supprimé l'indice ς, et il est entendu que la variable u se

rapporte à un point quelconque (x, y, z) du système. Maintenant prenons, dans les équations [50], l'expression générale de k^n

$$[61] \ldots\ldots \qquad k^n = \frac{p_\varsigma M_\varsigma + p_1 A_{(\varsigma,1)} + p_2 A_{(\varsigma,2)} + \text{etc.}}{p_\varsigma m_\varsigma},$$

Or comparons le numérateur du second membre aux termes hors des parenthèses

$$M_\varsigma u_\varsigma + A_{(\varsigma,1)} u_1 + A_{(\varsigma,2)} u_2 + \text{etc.}$$

de l'équation [59], l'on verra que u_ς, u_1, u_2, etc. entrent dans la composition de ces derniers, de la même manière que p_ς, p_1, p_2 etc. dans le numérateur susdit [61]; par conséquent, si les termes

$$M_\varsigma u_\varsigma + A_{(\varsigma,1)} u_1 + A_{(\varsigma,2)} u_2 + \text{etc.}$$

se transforment, dans l'équation [60], en

$$I'u + W' \frac{d^{i+j+l} u}{dx^i dy^j dz^l} + W'' \frac{d^{i'+j'+l'} u}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{l'}} + \text{etc.} \ ;$$

de même l'équation [61] deviendra :

$$[62] \ldots \quad pmk^n = I'p + W' \frac{d^{i+j+l} p}{dx^i dy^j dz^l} + W'' \frac{d^{i'+j'+l'} p}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{l'}} + \text{etc.}$$

Cette équation étant intégrée fera connaître les valeurs de p.

Maintenant il faut chercher de quelle manière l'on pourra déterminer k^n. En premier lieu nous observerons que l'équation finale en k^n sera transcendante, puisqu'elle doit être d'un degré égal au nombre des variables qui, dans le cas que nous traitons, est infini. Afin d'obtenir l'équation finale en k^n, il faut avoir recours à la considération des limites. Outre l'équation [60], qui se rapporte à un point quelconque de l'*intérieur du corps*, il y aura des équations spéciales, pour les conditions relatives aux surfaces, lignes ou points qui limitent ou fixent ce corps. Ces équations aux limites sont comprises dans celles générales [48]. Si la limite est une surface, on aura, suivant la nature de l'équation [60], une ou plusieurs équations différentielles en u relatives à tous les points de cette surface ; on en obtiendra d'analogues en p, auxquelles les valeurs de p,

déduites de l'équation [62], devront satisfaire. Il en sera de même si la limite est une ligne ou un point.

L'intégration de l'équation [62] introduira un certain nombre de quantités ou constantes arbitraires qui, étant éliminées entre les équations aux limites, conduiront à l'équation finale en k^n. Ces mêmes constantes se détermineront pareillement par la considération des limites. Nous avons vu, que le nombre des équations [50], desquelles on déduit

$$k^n\ ,\ p_1\ ,\ p_2\ \ldots\ldots\ p_r\ ,$$

sont au nombre de r, tandisque celui des inconnues est $r+1$; mais on a observé, qu'il suffisait de connaître les rapports $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$; ... $\frac{p_r}{p_1}$; il en sera de même dans le cas spécial que nous examinons; l'intégration de l'équation [62] donnera des constantes arbitraires, dont les rapports à l'une quelconque d'elles seront déterminés par les équations aux limites; ces rapports, étant éliminés entre ces équations, fourniront celles finales en k^n.

Comme on le voit, la détermination de k^n et des constantes arbitraires, introduites par l'intégration de l'équation [62], sont indépendantes des conditions initiales qui se rapportent au temps; tandisque celles-ci servent à déterminer les constantes introduites par l'intégration relative au temps. Ces considérations seront rendues plus claires par les exemples que nous traiterons à la fin de cet écrit. Je renvois d'ailleurs à mon Mémoire *sur les vibrations*, où l'on trouvera la confirmation de ces principes.

Après avoir exposé ces considérations, l'application de la formule [57], au cas actuel, ne présentera plus de difficulté. Si nous considérons des quantités m infiniment petites, proportionnelles aux masses élémentaires, nous ferons:

[63] ..... $$m = \rho\, dv\ ,$$

ρ étant un coefficient proportionnel à la densité, et dv le volume élémentaire.

Ainsi l'équation [51] donnera:

[64] ..... $$v = \frac{\int u\, p\, \rho\, dv}{p_1 m_1}\ ,$$

l'intégrale $\int$ étant étendue à tout le corps.

Les équations [56] deviendront

$$[65]\ldots\begin{cases} \mathring{v}=\dfrac{\int \mathring{u}p\rho d\upsilon}{p_1 m_1}=E_1+E_2\ldots\ldots+E_n\ ; \\ \dfrac{d\mathring{v}}{dt}=\dfrac{\int \dfrac{d\mathring{u}}{dt}p\rho d\upsilon}{p_1 m_1}=h_{(1)}E_1+h_{(2)}E_2\ldots\ldots+h_{(n)}E_n\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

IV.

Afin de donner plus de généralité aux résultats précédents, nous considérerons plusieurs corps distincts les uns des autres, contigus ou isolés.

En désignant ces divers corps par les indices $_{(1)}$, $_{(2)}$, $_{(3)}$, etc., et supposant en outre des masses isolées faisant partie du système, et auxquelles les quantités m_1, m_2, etc. sont proportionnelles, nous aurons, pour chacun des corps continus, des équations de la forme de celles [60], soit

$$[68]\quad \begin{cases} \rho_{(1)}\, d\upsilon_{(1)} \left\{ \dfrac{d^n u_{(1)}}{dt^n} + \nu_{(1)} \dfrac{d^p u_{(1)}}{dt^p} + \varpi_{(1)} \dfrac{d^q u_{(1)}}{dt^q} \right\} + V_{(1)} u_{(1)} \\ \qquad + W_{(1)} \dfrac{d^{i+j+t} u_{(1)}}{dx^i dy^j dz^t} + W'_{(1)} \dfrac{d^{i'+j'+t'} u_{(1)}}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{t'}} + \text{etc.} = 0 \ ; \\ \rho_{(2)}\, d\upsilon_{(2)} \left\{ \dfrac{d^n u_{(2)}}{dt^n} + \nu_{(2)} \dfrac{d^p u_{(2)}}{dt^p} + \varpi_{(2)} \dfrac{d^q u_{(2)}}{dt^q} \right\} + V_{(2)} u_{(2)} \\ \qquad + W_{(2)} \dfrac{d^{i+j+t} u_{(2)}}{dx^i dy^j dz^t} + W'_{(2)} \dfrac{d^{i'+j'+t'} u_{(2)}}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{t'}} + \text{etc.} = 0 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

Outre ces équations, il y aura celles relatives aux limites, aux surfaces, lignes ou points de contact, et aux masses isolées. L'ensemble de toutes ces équations fournira donc les expressions particulières de $p_{(1)}$, $p_{(2)}$ ..... p_1, p_2 .... etc. et donnera l'équation finale en k^n. Pour avoir l'expression générale de u, on observera que les équations [56] donnent

$$[70]\quad \begin{cases} \mathring{v} = \dfrac{1}{m_1 p_1}\left\{ m_1 p_1 \mathring{u}_1 + m_2 p_2 \mathring{u}_2 + \text{etc.} + \int \mathring{u}_{(1)} p_{(1)} \rho_{(1)} d\upsilon_{(1)} + \int \mathring{u}_{(2)} p_{(2)} \rho_{(2)} d\upsilon_{(2)} + \text{etc.} \right\} \\ \qquad = E_1 + E_2 + \ldots\ldots\ldots\

$$[73]\ldots\ u=\sum_{k'}^{k^{(n)}}\cdot p\,\frac{m_1p_1}{\bar{\Sigma}.m_ep_e^2+\bar{\Sigma}.\int p_a^2\rho_a d\upsilon_a}\left\{E_1e^{h_{(1)}t}+E_2e^{h_{(2)}t}\ldots\ldots+E_ne^{h_{(n)}t}\right\},$$

expression, dans laquelle on mettra, pour obtenir les diverses valeurs de u, les valeurs de p correspondantes.

L'analyse précédente démontre également que, dans le cas général que nous examinons, k^n et par suite p, ne peuvent avoir de valeurs imaginaires.

Si dans les équations différentielles [69] les dérivées, relatives au temps, se réduisent aux premières $\frac{d^nu_{(1)}}{dt^n}$, $\frac{d^nu_{(2)}}{dt^n}$; ou, en d'autres termes, si ces équations deviennent de la forme

$$[74]\ldots\ \begin{cases}\rho_{(1)}d\upsilon_{(1)}\dfrac{d^nu_1}{dt^n}+V_{(1)}u_{(1)}+W_{(1)}\dfrac{d^{i+j+l}u_{(1)}}{dx^idy^jdz^l}+\text{etc.}=0\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{cases}$$

on mettra, dans la formule précédente, pour E_1, E_2, etc. $h_{(1)}$, $h_{(2)}$ etc. leurs valeurs trouvées dans le premier paragraphe et l'on aura ainsi:

$$[75]\ldots\ u=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k'}^{k^{(n)}}\cdot\frac{p}{\bar{\Sigma}.m_ep_e^2+\bar{\Sigma}.\int p_a^2\rho_a d\upsilon_a}\cdot\sum_{j=1}^{j=n}e^{kl\alpha^{2j-1}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\bar{\Sigma}.m_ep_e\hat{u}_e+\bar{\Sigma}.\int\hat{u}_ap_a\rho_ad\upsilon_a\\ +\dfrac{\alpha^{2n-2j+1}}{k}\left\{\bar{\Sigma}.m_ep_e\dfrac{d\hat{u}_e}{dt}+\bar{\Sigma}.\int\dfrac{d\hat{u}_a}{dt}p_a\rho_ad\upsilon_a\right\}\\ +\dfrac{\alpha^{2(2n-2j+1)}}{k^2}\left\{\bar{\Sigma}.m_ep_e\dfrac{d^2\hat{u}_e}{dt^2}+\bar{\Sigma}.\int\dfrac{d^2\hat{u}_a}{dt^2}p_a\rho_ad\upsilon_a\right\}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\dfrac{\alpha^{(n-1)(2n-2j+1)}}{k^{n-1}}\left\{\bar{\Sigma}.m_ep_e\dfrac{d^{n-1}\hat{u}_e}{dt^{n-1}}+\bar{\Sigma}.\int\dfrac{d^{n-1}\hat{u}_a}{dt^{n-1}}p_a\rho_ad\upsilon_a\right\}\end{array}\right\}.$$

V.

Les équations établies précédemment, vont nous fournir les formules qui se rapportent aux cas spéciaux de la propagation de la chaleur et des mouvements vibratoires.

L'on sait que l'équation générale de la propagation de la chaleur est

$$[76] \ldots\ldots \quad c\rho\frac{du}{dt}=\frac{d.\chi\frac{du}{dx}}{dx}+\frac{d.\chi\frac{du}{dy}}{dy}+\frac{d.\chi\frac{du}{dz}}{dz},$$

où $c\rho$ exprime la chaleur spécifique rapportée à l'unité de volume, χ le coefficient de conducibilité intérieure, et u la température. Les coefficients $c\rho$ et χ peuvent varier d'un point à l'autre du corps, c'est-à-dire être fonctions de x, y, z; mais si on les suppose indépendants du temps, on voit que l'équation précédente rentre dans celles que nous avons étudiées jusqu'à présent et plus spécialement dans le dernière cas, auquel se rapporte la formule [75]. Ainsi, dans le problème de la propagation de la chaleur, nous avons $n=1$; $\alpha=-1$, et la formule [75] devient:

$$[77] \ldots\ldots \quad u=\sum_{k'}^{\cdot k(\infty)}.p.\frac{\bar{\Sigma}.m_e p_e \hat{u}_e+\bar{\Sigma}.\int \hat{u}_a p_a \rho_a d\upsilon_a}{\bar{\Sigma}.m_e p_e^2+\bar{\Sigma}.\int p_a^2 \rho_a d\upsilon_a}.e^{-kt},$$

où l'on mettra ρc au lieu de ρ.

Les équations des mouvements vibratoires, ou des petites oscillations, ne contiennent que les deuxièmes fonctions dérivées, par rapport au temps, des variables u_1, u_2, etc., qui expriment les déplacements qu'éprouvent, à un instant quelconque, les points du système *en dehors de leurs positions d'équilibre stable.* De sorte, que l'étude de ces mouvements rentre dans celle des équations primitives générales [1], [41] et [74]; on fera donc, pour ce cas spécial,

$$n=2 \; ; \qquad \alpha=\sqrt{-1} \; ;$$

ainsi la formule [75], entr'autres, devient:

$$u = \sum_{k'}^{k^{(\infty)}} \cdot \frac{p}{\bar{\Sigma}.m_e p_e^2 + \bar{\Sigma}.\int p_a^2 \rho_a d\upsilon_a}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{\Sigma}.m_e p_e \hat{u}_e + \bar{\Sigma}.\int \hat{u}_a p_a \rho_a d\upsilon_a\right)\left(\dfrac{e^{kt.\sqrt{-1}} + e^{-kt\ \sqrt{-1}}}{2}\right) \\ + \dfrac{\sqrt{-1}}{k}\left(\bar{\Sigma}.m_e p_e \dfrac{d\hat{u}_e}{dt} + \bar{\Sigma}.\int \dfrac{d\hat{u}_a}{dt} p_a \rho_a d\upsilon_e\right)\left(\dfrac{e^{-kt.\sqrt{-1}} - e^{kt.\sqrt{-1}}}{2}\right) \end{array} \right\},$$

expression qui se réduit à la forme suivante

$$[78] \ldots\ldots\ldots \quad u = \sum_{k'}^{k^{(\infty)}} \cdot \frac{p}{\bar{\Sigma}.m_e p_e^2 + \bar{\Sigma}.\int p_a^2 \rho_a d\upsilon_a}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{\Sigma}.m_e p_e \hat{u}_e + \bar{\Sigma}.\int \hat{u}_a p_a \rho_a d\upsilon_a\right)\cos.kt \\ + \dfrac{1}{k}\left(\bar{\Sigma}.m_e p_e \dfrac{d\hat{u}_e}{dt} + \bar{\Sigma}.\int \dfrac{d\hat{u}_a}{dt} p_a \rho_a d\upsilon_a\right)\sin.kt \end{array} \right\}.$$

Comme on le voit, les résultats auxquels nous sommes arrivés sont indépendants du système de coordonnées adopté pour fixer la position des points du système.

Dans l'application des formules précédentes, il est essentiel de faire attention à ce que les facteurs $m_e \ldots\ldots \rho_a d\upsilon_a \ldots\ldots$ qui multiplient p_e, $p_a \ldots\ldots p_e^2$, $p_a^2 \ldots\ldots$ satisfassent aux conditions exprimées par les équations

$$a_{(i,j)} = a_{(j,i)} \ ;$$

$$A_{(i,j)} = A_{(j,i)} \ ;$$

relatives aux équations primitives [1], et d'après lesquelles les coefficients des diverses variables $u \ldots\ldots$ et ceux de leurs dérivées par rapport aux temps, sont *réciproquement* égaux dans les équations primitives correspondantes. L'on verra comment il sera tenu compte de cette observation dans le problème, que nous traiterons ci-après, du mouvement de la chaleur dans une sphère composée de deux parties hétérogène et concentrique.

VI.

Nous examinerons un cas spécial qui se présente fréquemment dans les applications; c'est celui qui a lieu lorsque les équations primitives, outre les fonctions dérivées par rapport au temps, ne contiennent que des différences de variables, telles que

$$u_e - u_f \; ; \qquad u_{e'} - u_{f'} \; ; \qquad \text{etc.} \; ,$$

et quand, en outre, toutes ces différences disparaissent, en sommant ensemble les équations primitives, dont la somme se réduit, alors, aux seules fonctions dérivées des variables par rapport au temps. Ainsi, dans ce cas, la somme de toutes les équations [41], par exemple, serait

$$[79] \ldots \quad m_1 \frac{d^n u_1}{dt^n} + m_2 \frac{d^n u_2}{dt^n} + m_3 \frac{d^n u_3}{dt^n} \ldots\ldots + m_r \frac{d^n u_r}{dt^n} = 0 \ldots$$

Il est évident qu'on satisfera encore à ces équations si, au lieu de prendre pour u, l'expression générale [37], on prenait au contraire

$$[80] \ldots u_t = P + Qt + Rt^2 \ldots\ldots + Ut^{n-1} + \sum_{(t)} \cdot \frac{p_t B_t}{\sum_1^r \cdot pB} T \; ;$$

où P, Q, $R \ldots\ldots U$ représentent des coefficients constants; car ces nouveaux termes $P + Qt +$ etc. disparaîtront naturellement dans les différences $u_r - u_f$ etc.

L'équation [79], en vertu des équations [44], conduit évidemment à

$$[81] \ldots\ldots \quad m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots\ldots + m_r p_r = \sum_1^r \cdot mp = 0 \; ,$$

puisque le numérateur de l'expression [61] de k^n est composé avec $p_1, p_2 \ldots\ldots p_r$ de la même manière que le sont, avec u_1, u_r, etc., les termes des équations primitives dont la somme se détruit.

Ainsi, de l'équation [80], l'on déduit

$$\sum_1^r \cdot mu = (P + Qt + Rt^2 \ldots\ldots + Ut^{n-1}) \cdot \sum_1^r \cdot m + \sum_{(t)} \cdot \frac{B_t T}{\sum_1^r \cdot pB} \cdot \sum_1^r \cdot mp \; ,$$

qui à cause de $\sum_{1}^{r} . mp = 0$ se réduit à

$$[82] \ldots \quad \sum_{1}^{r} . mu = (P + Qt + Rt^2 \ldots\ldots + Ut^{n-1}) . \sum_{1}^{r} . m \ .$$

On déduira facilement de cette équation les valeurs suivantes:

$$[83] \ldots \begin{cases} P = \dfrac{\sum_{1}^{r} . m\hat{u}}{\sum_{1}^{r} . m} \ ; \quad Q = \dfrac{\sum_{1}^{r} . m \dfrac{d\hat{u}}{dt}}{\sum_{1}^{r} . m} \ ; \quad R = \dfrac{1}{2} . \dfrac{\sum_{1}^{r} . m \dfrac{d^2\hat{u}}{dt}}{\sum_{1}^{r} . m} \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ U = \dfrac{1}{1.2.3 \ldots (n-1)} . \dfrac{\sum_{1}^{r} . m \dfrac{d^{n-1}\hat{u}}{dt^{n-1}}}{\sum_{1}^{r} . m} \ ; \end{cases}$$

qui complètent la solution de la question.

Observons que, en vertu des formules [23] et [24], l'expression de T est de la forme suivante:

$$[84] \ldots\ldots \ T = \theta\hat{v} + \theta' \frac{d\hat{v}}{dt} + \theta'' \frac{d^2\hat{v}}{dt^2} \ldots\ldots + \theta^{(n-1)} \frac{d^{n-1}\hat{v}}{dt^{n-1}} \ ,$$

où $\theta, \theta' \ldots\ldots \theta^{(n-1)}$ sont des fonctions du temps; l'on a également

$$[85] \ldots \begin{cases} \hat{v} = \dfrac{p_1 m_1 \hat{u}_1 + p_2 m_2 \hat{u}_2 \ldots\ldots\ldots + p_r m_r \hat{u}_r}{m_1 p_1} \ , \\ \dfrac{d\hat{v}}{dt} = \dfrac{p_1 m_1 \dfrac{d\hat{u}_1}{dt} + p_2 m_2 \dfrac{d\hat{u}_2}{dt} \ldots\ldots + p_r m_r \dfrac{d\hat{u}_r}{dt}}{m_1 p_1} \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, écrivons l'expression de u_1 sous la forme

$$[86] \ldots\ldots \ u_1 = P + Qt + Rt^2 \ldots\ldots + Ut^{n-1} + \beta_1 \ ,$$

on aura

$$[87]\ldots\ldots\begin{cases} \mathring{u}_i = P + \mathring{\beta}_i\ ; \\ \dfrac{d\mathring{u}_i}{dt} = Q + \dfrac{d\mathring{\beta}_i}{dt}\ ; \\ \dfrac{d^2\mathring{u}_i}{dt^2} = 1.2.R + \dfrac{d^2\mathring{\beta}_i}{dt^2}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

$$[89]\ \ldots\ldots\ldots \qquad \beta_i = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot \frac{p_i B_1}{\sum_1^r \cdot pB} F\left(\mathring{\beta}, \frac{d\mathring{\beta}}{dt} \ldots t\right),$$

formule indépendante de $P, Q, \ldots U$.

Nous nous bornerons à ces considérations qu'il serait facile d'étendre aux différentes équations primitives traitées précédemment.

VII.

Reprenons l'expression générale (*)

$$u_i = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} T = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} \left\{ \theta \mathring{v} + \theta' \frac{d\mathring{v}}{dt} + \theta'' \frac{d^2\mathring{v}}{dt^2} + \text{etc.} \right\},$$

dans laquelle nous faisons abstraction des termes

$$P + Qt + Rt^2 + \ldots\ldots\ldots$$

introduits dans le paragraphe précédent.

Si l'action initiale a été produite sur le seul point [1], par exemple, les valeurs de $\mathring{v}$, $\frac{d\mathring{v}}{dt}$, etc. se réduiront à $\mathring{u}_1$, $\frac{d\mathring{u}_1}{dt}$ ..., ainsi l'expression précédente deviendra

$$[a]\ \ldots\ u_i = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} \left\{ \theta \mathring{u}_1 + \theta' \frac{d\mathring{u}_1}{dt} + \theta'' \frac{d^2\mathring{u}_1}{dt^2} + \text{etc.} \right\},$$

et l'on aura, lorsque $t = 0$,

(*) Voir les équations [37] et [84].

$$[b]\ldots\begin{cases} \hat{u}_i = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} \left\{ \hat{\theta}\hat{u}_1 + \hat{\theta}' \frac{d\hat{u}_1}{dt} + \hat{\theta}'' \frac{d^2\hat{u}_1}{dt^2} + \text{etc.} \right\} = 0 \ ; \\ \frac{d\hat{u}_i}{dt} = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} \left\{ \frac{d\hat{\theta}}{dt}\hat{u}_1 + \frac{d\hat{\theta}'}{dt} \cdot \frac{d\hat{u}_1}{dt} + \text{etc.} \right\} = 0 \ ; \\ \frac{d^2\hat{u}_i}{dt^2} = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_i \frac{B_1}{\sum_1^r \cdot pB} \left\{ \frac{d^2\hat{\theta}}{dt^2}\hat{u}_1 + \frac{d^2\hat{\theta}'}{dt^2} \cdot \frac{d\hat{u}_1}{dt} + \text{etc.} \right\} = 0 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\

VIII.

Nous ferons, dans ce paragraphe, l'application des formules qui viennent d'être démontrées, au mouvement concentrique de la chaleur dans une sphère composée d'un noyau central sphérique homogène et recouvert d'une couche sphérique également homogène, mais de matière différente. Ce cas a été traité par Poisson dans sa *Théorie de la chaleur* page 300 et suivantes.

Nous emploirons les dénominations qui suivent:

r, rayon correspondant à un point quelconque du noyau sphérique;
χ, coefficient de conducibilité intérieure du noyau;
$c\rho$, chaleur spécifique du noyau rapporté à l'unité de volume;
ρ, densité du noyau;
u, température, après un temps t, d'une couche élémentaire correspondante au rayon r;
r', χ', c', ρ', u', dénominations analogues aux précédentes pour la couche sphérique qui recouvre le noyau;
q, coefficient de conducibilité à la surface de contact du noyau et de la couche supérieure;
ϖ', coefficient de conducibilité extérieure de la couche superficielle;
π, rapport de la circonférence au diamètre.

Considérons la couche élémentaire sphérique de rayon r et d'épaisseur dr; sa masse étant

$$4\pi\rho r^2 dr ,$$

la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température de cette couche sera

$$4\pi\rho c r^2 dr .$$

Si durant l'instant dt la variation de température de cette couche est $\frac{du}{dt}dt$, le gain de chaleur, qu'aura celle-ci, sera

$$4\pi\rho c r^2 dr \frac{du}{dt} dt .$$

Cette quantité de chaleur devra être égale à la différence de celles

qu'elle reçoit et qu'elle perd par les couches contigues. Ainsi par la surface sphérique de rayon r elle perd la quantité de chaleur

$$4\pi r^2 \chi \frac{du}{dr} dt ,$$

tandisque, par la surface de rayon $r+dr$, elle gagne la quantité de chaleur

$$4\pi (r+dr)^2 \chi \frac{d.}{dr}\left(u+\frac{du}{dr}dr\right) dt .$$

Ainsi l'on devra avoir

$$4\pi\rho c r^2 dr . \frac{du}{dt} dt = 4\pi\chi dt . \left\{(r+dr)^2\left(\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}dr\right)-r^2\frac{du}{dr}\right\} ,$$

équation qui se réduit à

$$[90] \ldots \quad 4\pi\rho r^2 dr . c \frac{du}{dt} = 4\pi\chi \left\{2r\frac{du}{dr}+r^2\frac{d^2u}{dr^2}\right\} dr .$$

Cette équation appartient au noyau intérieur; on aura pareillement, pour la couche sphérique qui recouvre le noyau,

$$[91] \ldots \quad 4\pi\rho' r'^2 dr' . c' \frac{du'}{dt} = 4\pi\chi' \left\{2r'\frac{du'}{dr'}+r'^2\frac{d^2u'}{dr'^2}\right\} dr' .$$

Pour appliquer, aux deux équations précédentes, les résultats exprimés par les équations [69], l'on fera, dans ces dernières,

$$\rho_{(r)} dv_{(1)} = 4\pi . c\rho . r^2 dr ; \qquad \rho_{(2)} dv_{(2)} = 4\pi . c'\rho' . r'^2 dr' ,$$

ce qui vérifie l'observation consignée à la fin du paragraphe V.

De cette manière il viendra, toutes réductions faites, pour le noyau sphérique

$$[92] \ldots \ldots \ldots \quad \rho c k p + \chi \left\{\frac{2}{r}\cdot\frac{dp}{dr}+\frac{d^2p}{dr^2}\right\} = 0 ,$$

et pour la couche sphérique, qui le recouvre,

$$[93] \ldots \ldots \ldots \quad \rho' c' k p' + \chi' \left\{\frac{2}{r'}\cdot\frac{dp'}{dr'}+\frac{d^2p'}{dr'^2}\right\} = 0 .$$

La formule [77] conduit aux suivantes

$$[94] \ldots u = \sum_{k'}^{k(\infty)} \cdot \frac{\int_0^l \rho c \hat{u} p r^2 dr + \int_l^{l'} \rho' c' \hat{u}' p' r'^2 dr'}{\int_0^l \rho c p^2 r^2 dr + \int_l^{l'} \rho' c' p'^2 r'^2 dr'} \cdot p e^{-kt} ;$$

$$[95] \ldots u' = \sum_{k'}^{k(\infty)} \cdot \frac{\int_0^l \rho c \hat{u} p r^2 dr + \int_l^{l'} \rho' c' \hat{u}' p' r'^2 dr'}{\int_0^l \rho c p^2 r^2 dr + \int_l^{l'} \rho' c' p'^2 r'^2 dr'} \cdot p' e^{-kt} ;$$

où l exprime le rayon extérieur du noyau, et, par conséquent, intérieur de la couche qui le recouvre; l' est le rayon extérieur de cette dernière. Chacune de ces expressions s'étend à tous les points du corps auquel elle se rapporte.

On satisfait aux équations [92] et (93] en prenant

$$[96] \ldots\ldots p = \frac{1}{r} \cdot \left\{ A \sin. r \sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}} + B \cos. r \sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}} \right\} ;$$

$$[97] \ldots\ldots p' = \frac{1}{r'} \cdot \left\{ A' \sin. r' \sqrt{\frac{k\rho' c'}{\chi'}} + B' \cos. r' \sqrt{\frac{k\rho' c'}{\chi'}} \right\} ,$$

résultats auxquels on arrive facilement en observant que

$$2\frac{dp}{dr} + r\frac{d^2p}{dr^2} = \frac{d^2.rp}{dr^2} .$$

Il nous reste à déterminer les cinq quantités k, A, B, A', B'; et pour cela nous n'avons que quatre équations, savoir: 1.° l'équation relative au centre de la sphère; 2.° id. à la surface extérieure de la couche sphérique; 3.° et 4.° les équations relatives à chacune des surfaces de contact du noyau et de la couche qui le recouvre.

Mais, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, dans le cas général, il suffira d'avoir les rapports de A, B, etc. à l'une quelconque de ces quatre quantités; car, en observant les équations [94] et [95], l'on voit qu'en mettant pour p et p' leurs valeurs, après avoir fait, par exemple,

$B=b.A$; $A'=a'.A$; $B'=b'.A$, le coefficient A disparaîtra. Nous obtiendrons pareillement une équation qui ne contiendra que k, ainsi qu'on va s'en convaincre. Cela posé établissons les équations de conditions que nous avons indiquées précédemment.

1.° *Équation relative au centre de la sphère.*

Afin que, au centre de la sphère, la température ne devienne pas infinie, l'on devra, pendant tout le temps, et pour $r=0$, avoir $ru=0$, et par conséquent $rp=0$; d'où l'on conclut que, dans l'équation [96], il faut faire

[98] . . . . . $B=0$.

2.° *Équation relative à la surface extérieure.*

Pour plus de simplicité nous mesurerons les températures à partir de celle extérieure que l'on supposera égale à *zéro;* il sera facile de rapporter les températures de la sphère à une autre origine en ajoutant, ou en ôtant, de celles-ci une quantité constante. La quantité de chaleur qui traverse la couche extérieure, en vertu de la conducibilité intérieure, doit être égale à celle qui est perdue par le rayonnement, d'où l'on conclut que, pour $r'=l'$, l'on doit avoir:

$$4\pi r'^2.\chi'\frac{du'}{dr'}dt+4\pi r'^2.\varpi' u' dt=0 ,$$

d'où l'on déduit

$$\chi'\frac{dp'}{dr'}+\varpi' p'=0 ,$$

équation qui, en y mettant pour p' sa valeur [97], et faisant $r'=l'$: donne:

$$[99]\ \ldots\ A'\left\{\chi'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\cos.l'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}+\left(\varpi'-\frac{\chi'}{l'}\right)\sin.l'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\right\}$$

$$-B'\left\{\chi'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\sin.l'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}-\left(\varpi'-\frac{\chi'}{l'}\right)\cos.l'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\right\}=0 .$$

3.° et 4.° *Équations relatives aux deux surfaces de contact.*

L'échange de chaleur, qui a lieu entre le noyau et la couche qui le recouvre, doit être égal au flux de chaleur dû à la conductibilité intérieure de chacune des couches en contact. Cette condition nous fournira les deux équations suivantes, pour les valeurs de $r=r'=l$,

$$4\pi r^2.\chi\frac{du}{dr}dt+4\pi r^2.q(u-u')dt=0\ ;$$

$$4\pi r^2.\chi'\frac{du'}{dr'}dt-4\pi r^2.q(u'-u)dt=0\ ;$$

d'où l'on déduit

$$\chi\frac{dp}{dr}+q(p-p')=0\ ;$$

$$\chi'\frac{dp'}{dr'}-q(p'-p)=0\ .$$

En mettant pour p et p' leurs valeurs [96], [97], faisant $r=r'=l$, et réduisant, on aura:

$$[100]\ldots\ A\left\{\chi\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}.\cos.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}+\left(q-\frac{\chi}{l}\right)\sin.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}\right\}$$
$$-B\left\{\chi\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}.\sin.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}-\left(q-\frac{\chi}{l}\right)\cos.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}\right\}$$
$$-A'q.\sin.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}-B'q.\cos.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}=0\ ;$$

$$[101]\ldots\ A'\left\{\chi'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}.\cos.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}-\left(q+\frac{\chi'}{l}\right)\sin.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\right\}$$
$$-B'\left\{\chi'\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}.\sin.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}+\left(q+\frac{\chi'}{l}\right)\cos.l\sqrt{\frac{k\rho'c'}{\chi'}}\right\}$$
$$+Aq.\sin.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}+Bq.\cos.l\sqrt{\frac{k\rho c}{\chi}}=0\ .$$

équations que l'on peut directement simplifier en y faisant $B=0$, ainsi que l'indique l'équation [98].

Comme on le voit, les quatre constantes A, B, B', C' peuvent être éliminées entre les quatre équations [98], [99], [101], [102]. Il en résultera une équation finale transcendante qui ne contiendra que k. On obtiendra également les rapports de B, A', B' à A, par exemple, et en les introduisant dans les expressions de u et u', la quantité A disparaîtra; ces expressions ne renfermeront que k, dont les diverses valeurs seront déduites de l'équation en k indiquée précédemment.

Nous nous dispenserons de faire toutes ces opérations, vu que nous n'avions pour but que d'indiquer la marche à suivre et de démontrer qu'elle était conforme à celle que nous avons tracée, d'une manière générale, dans les paragraphes III, IV, V.

Il sera facile de vérifier que les résultats, auxquels nous arrivons, ne diffèrent pas de ceux obtenus par Poisson.

IX.

Afin de donner une application des formules [58] nous examinerons encore le cas du mouvement de la chaleur dans une barre prismatique homogène dont la température de la surface extérieure se maintient constante, mais varie d'une section à l'autre. Ce cas a été également traité, d'une manière moins générale, par Poisson, dans sa *Théorie de la chaleur*.

Nous supposerons que, à un instant donné, la température des points d'une même section de la barre soit uniforme, ou, en d'autres termes, que la propagation de la chaleur se fasse par couches parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction de la barre.

Nous exprimerons par

$2a$, la longueur de la barre;

q, le coefficient de conducibilité de la surface extérieure;

x, la distance d'une section quelconque au milieu de la barre prise pour origine.

Nous conserverons en outre les autres dénominations précédentes.

Cela posé, la température du contour extérieur d'une section donnée étant X, l'équation du mouvement de la chaleur dans la barre, dont il s'agit, sera:

$$[102] \ldots\ldots\ldots \quad c\rho\frac{du}{dt}-\chi\frac{d^2u}{dx^2}+q(u-X)=0 \ .$$

Outre cette équation, nous aurons celles relatives aux deux extrémités de la barre que nous supposerons respectivement maintenues aux températures 0 et $0'$. Si nous représentons par ϖ et par ϖ' les coefficients de conducibilité relatifs à ces extrémités, les deux équations, dont il s'agit, seront

$$[103] \ldots \quad \chi \frac{du}{dx} + \varpi (u - 0) = 0 \ldots\ldots \text{ pour } x = +a ,$$

$$[104] \ldots \quad \chi \frac{du}{dx} - \varpi' (u - 0') = 0 \ldots\ldots \text{ pour } x = -a .$$

Comme on le voit, les trois équations précédentes rentrent dans le système de celles auxquelles se rapportent les équations [58]. Pour les réduire à la forme des équations primitives [1] et [48], l'on devrait faire u égal à une autre variable z fonction du temps augmentée d'une autre quantité l indépendante du temps, mais variable d'une section à l'autre de la barre. Ainsi l'on fera:

$$[105] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = z + l .$$

Or, en examinant les équations [58], on remarquera qu'elles sont composées avec l_1, l_2 etc. de la même manière que, dans les équations [1], les termes indépendants des fonctions dérivées par rapport au temps, de u_1, u_2, etc., sont composés avec ces dernières quantités. Il s'en suit que, dans le cas où l'on aurait une équation primitive, relative à un corps continu, de la forme suivante:

$$[106] \ldots\ldots \quad \rho d\upsilon \left\{ \frac{d^n u}{dt^n} + \nu \frac{d^p u}{dt^p} + \varpi \frac{d^q u}{dt^q} \right\} + V(u - P)$$

$$+ W \frac{d^{i+j+l} u}{dx^i dy^j dz^l} + W' \frac{d^{i'+j'+l'} u}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{l'}} + \text{etc.} = 0 ;$$

où P est une fonction des variables x, y, z, mais indépendante du temps. On réduira cette équation à la forme [60] en faisant

$$u = z + l ;$$

z sera donné par l'équation

$$[107] \ldots\ldots \quad \rho dz \left\{ \frac{d^n z}{dt^n} + \nu \frac{d^p z}{dt^p} + \varpi \frac{d^q z}{dt^q} \right\} + Vz$$

$$+ W \frac{d^{i+j+t} z}{dx^i dy^j dz^t} + W' \frac{d^{i'+j'+t'} z}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{t'}} + \text{etc.} = 0 \ .$$

Pour déterminer l on aura:

$$[108] \ldots \quad Vl + W \frac{d^{i+j+t}.l}{dx^i dy^j dz^t} + W' \frac{d^{i'+j'+t'}.l}{dx^{i'} dy^{j'} dz^{t'}} - VP = 0 \ ,$$

équation correspondante aux équations [58].

Les équations aux limites serviront à déterminer les constantes arbitraires introduites dans l'intégration de cette dernière équation. Quant à l'équation [107], elle se résoudra comme celles que nous avons déjà traitées jusqu'à présent.

En appliquant ces principes au cas spécial de la barre que nous considérons, l'on aura

$$[109] \ldots\ldots\ldots \quad \rho c \frac{dz}{dt} - \chi \frac{d^2 z}{dx^2} + qz = 0 \ ;$$

$$[110] \ldots\ldots\ldots \quad -\chi \frac{d^2 l}{dx^2} + q(1 - X) = 0 \ .$$

Les équations [103] et [104] donneront respectivement

$$[111] \ldots\ldots \quad \chi \frac{dz}{dx} + \varpi z = 0 \ \ldots\ldots \text{ pour } x = +a \ ,$$

$$[112] \ldots\ldots \quad \chi \frac{dz}{dx} - \varpi' z = 0 \ \ldots\ldots \text{ pour } x = -a \ .$$

L'on devra en outre avoir

$$[113] \ldots\ldots \quad l = \theta \ \ldots\ldots \text{ pour } x = +a \ ,$$

$$[114] \ldots\ldots \quad l = \theta' \ \ldots\ldots \text{ pour } x = -a \ .$$

L'équation [109] conduit à la suivante :

$$[115] \ldots\ldots\ldots \quad \rho c k p + \chi \frac{d^2 p}{dx^2} - q p = 0 \ ,$$

à laquelle on satisfait en prenant

$$[116] \ldots\ldots\ldots \quad p = A.\sin.\alpha x + B\cos.\alpha x \ ;$$

cette valeur, substituée dans l'équation précédente, donne

$$[117] \ldots\ldots\ldots \quad k = \frac{\chi \alpha^2 + q}{\rho c} \ .$$

Les deux équations [111] et [112] donnent lieu aux suivantes :

$$[118] \ldots\ldots \begin{cases} \chi \dfrac{dp}{dx} + \varpi\, p = 0 \ldots\ldots \text{ pour } x = +a \ , \\ \chi \dfrac{dp}{dx} - \varpi' p = 0 \ldots\ldots \text{ pour } x = -a \ ; \end{cases}$$

en y mettant pour p sa valeur, déduite de l'équation [116], on aura :

$$[119] \begin{cases} \chi\alpha \left\{ A\cos.\alpha a - B\sin.\alpha a \right\} + \varpi \left\{ A\sin.\alpha a + B\cos.\alpha a \right\} = 0 \ , \\ \chi\alpha \left\{ A\cos.\alpha a + B\sin.\alpha a \right\} + \varpi' \left\{ A\sin.\alpha a - B\cos.\alpha a \right\} = 0 \ . \end{cases}$$

En combinant ces deux équations on obtiendra facilement

$$[120] \ldots\ldots \quad B = -A.\frac{2\chi\alpha.\cos.\alpha a + (\varpi + \varpi')\sin.\alpha a}{(\varpi - \varpi')\cos.\alpha a} \ .$$

En éliminant A et B, entre les deux équations susdites, on aura

$$[121] \ldots \left\{ \varpi\varpi' - (\chi\alpha)^2 \right\} \sin.2\alpha a + \chi\alpha(\varpi + \varpi')\cos.2\alpha a = 0 \ ,$$

équation transcendante qui servira à déterminer les valeurs de α, et, par conséquent, celles de k (éq.^{n} [117]).

En substituant dans l'expression [116] la valeur [120] de B, il viendra

$$[122] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p = \frac{A}{(\varpi - \varpi')\cos.\alpha a}$$

$$\times \left\{ (\varpi - \varpi')\cos.\alpha a \,.\, \sin.\alpha x - \left\{ 2\chi\alpha \cos.\alpha a + (\varpi + \varpi')\sin.\alpha a \right\} \cos.\alpha x \right\} .$$

La formule [77], appliquée au cas présent, donnera

$$[123] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z =$$

$$\sum . \left\{ (\varpi - \varpi')\cos.\alpha a \,.\, \sin.\alpha x - (2\chi\alpha \cos.\alpha a + (\varpi + \varpi')\sin.\alpha a)\cos.\alpha x \right\} \times$$

$$\frac{\int_{-a}^{+a} \left\{ (\varpi - \varpi')\cos.\alpha a \sin.\alpha x - \left(2\chi\alpha\cos.\alpha a + (\varpi + \varpi')\sin.\alpha a\right)\cos.\alpha x \right\} dx}{\int_{-a}^{+a} \left\{ (\varpi - \varpi')\cos.\alpha a \sin.\alpha x - \left(2\chi\alpha\cos.\alpha a + (\varpi + \varpi')\sin.\alpha a\right)\cos.\alpha x \right\}^2 dx} \,.\, e^{-\frac{(\chi\alpha^2 + q)t}{\rho c}},$$

formule dans laquelle le coefficient A a disparu.

En intégrant l'équation [110] on a

$$[124] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l =$$

$$\frac{e^{x\cdot\sqrt{\frac{q}{\chi}}} \left\{ C - q\int e^{-x\cdot\sqrt{\frac{q}{\chi}}} X dx \right\} - e^{-x\cdot\sqrt{\frac{q}{\chi}}} \left\{ C' + q\int e^{x\cdot\sqrt{\frac{q}{\chi}}} X dx \right\}}{2\cdot\sqrt{q\chi}},$$

où C et C' sont deux constantes arbitraires que l'on déterminera par les conditions [113] et [114].

Si l'on suppose, par exemple, que la température de la surface extérieure de la barre soit maintenue à *zéro*, on fera $X = 0$, et l'expression de l deviendra

$$l = \frac{\theta' . \left\{ e^{(a-x)\sqrt{\frac{q}{\chi}}} - e^{-(a-x)\sqrt{\frac{q}{\chi}}} \right\} + \theta \left\{ e^{(a+x)\sqrt{\frac{q}{\chi}}} - e^{-(a+x)\sqrt{\frac{q}{\chi}}} \right\}}{e^{2a\sqrt{\frac{q}{\chi}}} - e^{-2a\sqrt{\frac{q}{\chi}}}} .$$

Au moyen des expressions précédentes, la valeur de

$$u = z + 1 ,$$

sera complètement déterminée.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, car les exemples qui viennent d'être développés suffisent pour démontrer comment l'on doit appliquer la théorie générale que nous avons exposée.

DEUXIÈME MÉMOIRE

POUR SERVIR À L'HISTOIRE GÉNÉTIQUE

DES TRÉMATODES

PAR

LE DOCTEUR PH. DE FILIPPI

Lu dans la séance du 15 avril 1855.

Cercaria armata? — Le *Lymnaeus palustris* qui, dans le petit lac d'Avigliana, près de Turin, est tout-à-fait exempt de Cercaires, ne l'est plus le long du Pô, encore tout près de cette ville. Presque tous les individus que j'ai pêché dans les environs de Moncalier sont occupés par deux espèces de Cercaires, dont une assez semblable à la véritable *C. armata*, décrite et figurée pour la première fois par R. Wagner (Isis, 1834). On la reconnait tout de suite à ses Sporocystes allongées (fig. 4), à double enveloppe, et de si grande dimension, qu'elles parviennent jusqu'à la longueur de 2^{mm}. Ces Sporocystes sont logées en grand nombre dans le foie et dans le rein (*glandula mucosa* de Stiebel), sans manquer pourtant dans les autres viscères: par un de leurs bouts elles sont fort adhérentes aux tissus, par l'autre elles font protubérance au dehors: leur teinte varie entre le blanc et le jaune, selon la couleur de la substance granulaire qui occupe l'espace entre les deux tuniques.

Les Cercaires sont armées, ainsi que l'indique leur nom spécifique, et différemment de celles que j'ai décrites dans mon précédent Mémoire (1), elles présentent un tube intestinal assez reconnaissable surtout dans les jeunes individus. Il se forme dans l'intérieur de ceux-ci une cavité pleine d'un liquide transparent, qui commence près de la ventouse antérieure, se bifurque en bas (fig. 1), et dont on peut suivre aisément tout le développement jusqu'à se convaincre qu'elle correspond réellement à la cavité digérente, qui peu à peu, par l'accroissement successif de l'individu, devient moins distincte. Une autre cavité pareillement bifurquée, mais en sens opposé, se trouve dans la moitié postérieure du corps : c'est l'organe excrétoire qui commence sous cette forme pour s'arrondir plus tard. L'aiguillon buccal paraît le dernier.

La Cercaire, déjà développée et prête à s'enkyster, a le corps finement rayé transversalement, par des suites de pointes presque imperceptibles ; les deux ventouses médiocres, et égales en diamètre. Elle nage très-bien comme les autres Cercaires, et de plus rampe à la manière des Sangsues, appliquant successivement les deux ventouses sur le porte-objet du microscope.

La ressemblance de cette espèce avec celle décrite et figurée par Steenstrup, sous le nom de *C. armata*, est vraiment frappante : et je n'hésiterais pas à les considérer comme identiques, sans les observations qui vont suivre. Le savant naturaliste Danois dit positivement que, pour sa *C. armata*, a lieu l'enkystement normal et nécessaire, et plus tard l'éclosion et la transformation en Distome, dans les mêmes mollusques, où les Cercaires se sont développées; tandis que les Cercaires, qui ont formé le sujet de mes observations, ne se transforment jamais en Distome dans les Lymnées, mais après avoir nagé pour quelque temps dans l'eau, elles vont s'enkyster dans le premier animal qu'elles rencontrent, comme pressées par un besoin impérieux. Elles se sont enkystées sous mes yeux dans la peau d'un jeune *Triton punctatus*, ainsi que dans des larves d'Éphémères et de Perlides. A la vérité les Lymnées présentent aussi de ces Cercaires enkystées dans la tunique de l'œsophage ; mais tout porte à croire qu'elles sont là seulement pour avoir été avalées par le mollusque, et par la facilité avec laquelle ces Cercaires

(1) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin. Tom. XV.

s'enkystent dans les conditions les plus différentes, non pas pour atteindre dans la Lymnée leur développement ultérieur. Je crois avec Siebold que ce développement ne peut avoir lieu que dans des larves aquatiques, particulièrement d'insectes neuroptères.

Je représente ici, à la fig. 3, une de ces Cercaires enkystée dans l'œsophage d'un *Lymnaeus stagnalis;* on y voit l'organe excrétoire dilaté, et plein d'un liquide, dans lequel nagent de nombreux globules graisseux mêlés à d'autres plus opaques (1).

Je ne prétends pas mettre en doute les faits observés par Steenstrup. Probablement nos deux espèces de *C. armata* ne sont identiques qu'en apparence. Je me confirme toujours plus dans ce doute par la circonstance que Steenstrup dit avoir trouvé ses Cercaires dans le *Planorbis corneus*, aussi bien que dans le *Lymnaeus stagnalis*. Or il résulte de mes observations que chaque espèce de Cercaire habite une espèce déterminée de mollusques, ou tout au plus deux espèces du même genre. Ainsi il est probable que quelques-uns des faits observés par Steenstrup, se rapportent à une espèce réellement différente de celle que je viens de décrire.

Cercaria virgula. — J'ai décrit très-succinctement en 1837 (2), sous le nom de *Distoma virgula*, une Cercaire que j'ai trouvée en grande abondance à Pavie dans la *Paludina impura*, et que je n'avais pas revue l'année dernière à l'époque de la publication de mon Mémoire *sur l'histoire génétique des Trématodes*. Cet hiver seulement, ayant pu la retrouver encore en nombre incalculable dans les Paludines des prairies de Moncalier, j'en ai fait l'objet d'une étude toute spéciale, qui a été couronnée d'un succès très-satisfaisant.

Afin de procéder avec un peu de méthode, je commencerai par faire connaître la Cercaire développée et vivace, mieux que je ne l'ai fait la première fois, à l'époque où mes observations étaient faites à la simple loupe.

La *C. virgula* (fig. 5–6) appartient au type des Cercaires armées, et se développe dans des Sporocystes très-simples qui ne présentent rien

(1) C'est mon ami le Prof. Ercolani qui m'a fait remarquer ces kystes dans l'œsophage des Lymnées. Il a pris la tâche de poursuivre les métamorphoses de cette espèce; et certes des observations pleines d'intérêt ne manqueront pas de ressortir de ses investigations.

(2) Biblioteca italiana.

de particulier, étant tout-à-fait semblables à celles de la *C. microcotyla* figurées dans le Mémoire antécédent. Ce qui frappe à la première vue dans cette espèce, c'est l'organe (glandulaire?) situé près de la bouche, à la partie que je dirais inférieure ou ventrale de la ventouse antérieure. Cet organe (fig. 6) est formé de deux sacs en forme de cornue, opposés et soudés l'un à l'autre par le fond, tandis que les cols se portent en haut et vont aboutir à une ouverture commune. Dans les mouvements de l'animal, qui est très-remuant, ces deux sacs changent de forme à chaque instant: ils sont toujours pleins d'un liquide transparent d'une légère nuance jaunâtre. On ne peut méconnaître une analogie évidente en même temps qu'assez curieuse entre cet organe et les canaux (salivaires?) que j'ai décrit dans la *C. microcotyla*, également parasite d'une espèce de Paludine. Cet organe est entièrement séparé des quatre vaisseaux excréteurs qui, remontant de l'appareil glandulaire de la région ventrale, vont aboutir au dard.

Le corps de la *C. virgula* est parsemé d'innombrables épines bien distinctes, disposées par rangs transversaux: caractère que je n'ai pas vu jusqu'à présent dans aucune autre Cercaire armée. Un autre caractère constant et facile à saisir, consiste dans la forme en Y de l'organe excrétoire; forme qu'il conserve même dans les phases successives de l'espèce.

Je n'ai que peu de choses à ajouter quant au développement de la Cercaire dans la Sporocyste. Les germes sans doute sont libres dès leur origine, et sont d'abord formés par un agrégat de véritables cellules très-transparentes, avec un petit noyau: leur nombre augmente, tandis que leur diamètre diminue au fur et à mesure que le germe croît; enfin elles se fondent en substance homogène qui est le cytoblastême duquel se formeront les organes de la Cercaire. Dans cet état les germes tirés de la Sporocyste, au contact immédiat de l'eau, laissent suinter des bords de la matière sarcodique sous forme de grandes gouttes diaphanes.

Un des buts que je me suis toujours proposé avec la plus grande persévérance dans ce genre de recherches, était de parvenir une fois à saisir la nature à la formation des Sporocystes. Pouvant à mon aise examiner des centaines de Paludines impures pleines de Cercaires, j'en ai fait passer un très-grand nombre au microscope. Peu à peu le voile de ce mystère se soulève à mes yeux: et j'ai pu enfin, non me convaincre théoriquement, mais réellement voir que les Sporocystes sont le résultat d'une métamorphose directe et très-simple d'un embryon infusoriforme.

Celui-ci ne fait que perdre ses cils ; en même temps sa membrane tégumentale s'épaissit, et ses contours deviennent distincts ; des vésicules paraissent dans son intérieur, et ces vésicules ne sont autre chose que des germes de Cercaires : et enfin l'infusoire est complètement transformé en un sac, en une véritable Sporocyste.

J'ai pu faire ces observations d'une manière très-nette dans une Paludine que je venais de pêcher, et qui ne contenait que des Sporocystes récentes. Les figures 8-10, qui représentent d'une manière assez évidente cette métamorphose d'un Infusoire de la forme des Bursaires en Sporocyste, se sont présentées à mes yeux contemporainement : elles sont dessinées à la chambre claire (1). S'il pouvait rester encore quelque doute sur le passage de ces trois formes de l'une à l'autre, l'identité parfaite du contenu granuleux dans toutes, suffirait pour l'ôter entièrement. On n'a qu'à comparer cette observation avec celle plus ancienne de Steenstrup sur le passage gradué d'animalcules infusoires Paramécicns à la forme de sacs germinatifs ou nourrices du *Distoma duplicatum* (2), pour se convaincre toujours plus que le fait que je viens de rapporter est l'expression d'une loi générale, et explique d'une manière satisfaisante la formation des Sporocystes.

La *C. virgula* s'enkyste de même que la *C. armata* dans les larves aquatiques d'insectes. J'ai fait avec cette espèce les mêmes expériences qu'avec l'antécédente ; mais ce qui est encore plus important, c'est d'avoir trouvé la *C. virgula* à l'état de Distome enkysté (fig. 7) naturellement, et depuis long temps, dans la cavité abdominale des larves des Perlides, qui habitent dans le même ruisseau où j'ai pris les Paludines. Les autres mollusques de ce ruisseau (*Lymnaeus ovatus*, *Planorbis submarginatus*) étaient tout-à-fait exempts de Cercaires ; de manière que cette circonstance doit contribuer à dissiper toute espèce de doute sur l'identité spécifique entre les Distomes enkystés dans les larves des Perlides et les Cercaires des Paludines. Ces Distomes d'ailleurs présentent dans le corps épineux, et surtout dans la forme en Y de l'organe excrétoire, des traits caractéristiques qui sont d'une grande valeur dans le cas actuel. L'organe excrétoire, dont je viens de parler, est déjà plein de sa sécrétion,

(1) Oculaire N.° 1. Objectives 2. 3. 4 du microscope de Schiek, petit modèle.

(2) Ueber *d. Generationswechsel* etc. pag. 98 et suiv.

ce qui prouve que le jeune Distome, malgré son état d'individu enkysté, reçoit des matériaux nutritifs à travers les parois du kyste; il s'en nourrit et croît. En effet, la forme des kystes à peine formée est ellipsoïdale; la longueur du plus grand diamètre est de $0,11^{mm}$, tandis que le Distome des larves des Perlides est contenu dans un kyste sphéroïdal de $0,19^{mm}$ en diamètre.

Toutes les larves des Perlides, qui étaient attaquées par ce Distome, touchaient déjà à l'époque de la transformation en insecte parfait. Or, il résulte de mes expériences, que ces larves dans cette époque ont la peau trop dure pour que les Cercaires puissent y pénétrer; ce n'est que dans les individus très-jeunes de la première année, que les Cercaires s'enkystent. Ainsi on peut, sans crainte d'une erreur trop forte, apprécier à trois ans au moins le temps que le Distome a passé dans ces larves, pour parvenir à l'état dans lequel je l'ai décrit et figuré.

Chacun peut concevoir facilement ce qui arrivera de ce Distome, sa destinée étant désormais liée à celle de la larve dont il est parasite. Ainsi cette larve subit-elle sa dernière métamorphose, le Distome se trouvera alors dans l'abdomen de l'insecte parfait: la larve, ou plus tard l'insecte parfait lui-même sont mangés par quelque animal insectivore, le Distome passera dans l'intestin de celui-ci, où il pourra trouver les conditions de son développement final.

Il s'agit maintenant de trouver quel sera cet animal insectivore, dans lequel de cette manière sera close la série des transformations et des transmigrations de l'espèce dont la *C. virgula* n'est que le premier état. J'ai tout de suite pensé à certains Distomes des oiseaux, tels que le *D. maculosum* des Hirondelles, que Dujardin a trouvé aussi dans les Mésanges et dans les Farlouses, et les *D. cirrhatum*, *elegans*, et *globocaudatum*, que bien à raison ce savant helminthologiste voudrait réunir en une seule et même espèce. L'analogie du *D. maculosum* avec le Distome enkysté des Perlides, qui, ainsi que je l'ai démontré, appartient à la même série génétique de la *Cercaria virgula*, est vraiment frappante, soit par les épines du tégument, soit par les proportions du corps et des ventouses, soit enfin par la forme à Y de l'organe excrétoire. Tout donc nous force à reconnaître que la *C. virgula* est l'état de larve du *D. maculosum*. Cette opinion, toute raisonnable et presque irrésistible qu'elle est, doit pourtant être soumise au contrôle de l'expérience, en faisant avaler à des oiseaux des larves de Perlides contenant des Distomes

enkystés. Cette expérience aurait peut-être déjà décidé définitivement la question, si le fossé, où j'avais pris mes Paludines et mes larves de Perlides, n'avait été réduit à sec. Certes, je saisirai avec empressement la première condition favorable à ce genre de recherches, pour porter, dans cette dernière période de l'histoire de la *C. virgula*, le même degré d'évidence que je trouve dans les périodes antécédentes; mais en attendant on ne m'accusera pas de trop hasarder si j'insiste sur ce qui me paraît une légitime déduction des faits; et si je lie la *C. virgula* et le *D. maculosum* à une même série génétique, dont je résume l'histoire de cette manière: le Distome parfait se développe dans l'intestin des hirondelles, produit des œufs, qui se mêlent aux excréments de ces oiseaux, et sont évacués. Si par un hasard très-fréquent, grâce à l'habitude des hirondelles de planer sur la surface des eaux et la raser en pourchassant les insectes, ces œufs tombent dans l'eau et y trouvent des conditions favorables pour le développement des embryons, ceux-ci ne tarderont pas à éclore. Ces embryons se présentent comme des Infusoires de la famille des *Bursaires;* et après avoir passé quelque temps dans cet état, pénètrent dans les Paludines impures, et passent rapidement à l'état de Sporocyste qui produit des Cercaires (*C. virgula*). Celles-ci se transforment en Distome enkysté dans les larves aquatiques des Neuroptères (Perlides, Éphémérines?) et y restent pour toute la durée de la vie de ces larves, et même passent de cette manière dans les insectes parfaits, qui bientôt volent librement dans l'air, et sont mangés par les Hirondelles: le Distome passe ainsi par transmigration tout-à-fait passive dans l'intestin de ces oiseaux, où recommence la génération par œufs.

Une condition bien curieuse est celle relative à l'*habitat* de la *Cercaria virgula*. J'ai déjà dit que ce parasite est excessivement fréquent dans les Paludines impures près de Moncalier. Dans cette localité des centaines de Paludines examinées jusqu'à présent ne m'ont laissé voir aucune autre espèce de Cercaires ou de Distomes. Par contre à une lieue de distance se trouvent les prairies de Villastellone, où il y a également des Paludines impures, mais celles-ci ne contiennent plus de *C. virgula* qui est remplacée par les Rédies et les Distomes que j'ai fait connaître dans mon précédent Mémoire. Il serait difficile pour le moment de donner une explication satisfaisante de ces faits: on pourrait penser tout au plus que les embryons infusoriformes des Distomes ne trouvent pas, dans tous les étangs et ruisseaux, les mêmes conditions favorables à leur dévelop-

pement ultérieur, et à leur transmigration active dans les mollusques. Les œufs qui tombent dans l'eau hors de ces conditions sont naturellement perdus.

Cercaria coronata. — Les deux grandes espèces de Lymnées (*L. palustris* et *stagnalis*) des prairies marécageuses près de Moncalier sont très-fréquemment attaquées par un autre parasite, dans lequel j'ai cru reconnaître au premier abord la *C. echinata*, qui a fait le sujet des recherches de Siebold et de Steenstrup. Quelques instants d'observation ont pourtant suffi pour me persuader que ce parasite, bien qu'appartenant à ce type, constitue une espèce tout-à-fait différente, que j'appellerai provisoirement *C. coronata.*

Cette espèce naît et se développe dans de grandes Rédies (fig. 11) très-distinctes, même à l'œil nu, par leur dimension (jusqu'à 2^{mm} de longueur), et la couleur jaune du contenu de l'intestin, et dont la forme générale se rapproche beaucoup de celle des Rédies de *C. echinata* par un colleret saillant, et, près de l'extrémité postérieure du corps, par deux appendices latéraux que l'animal retire et allonge à volonté. Mais ce qui distingue aisément ces Rédies, consiste dans la longueur de l'intestin qui fait plusieurs inflexions dans le corps, tandis que dans les Rédies de *C. echinata*, figurées par Steenstrup, l'intestin est très-court. Leur organisation m'a présenté quelques particularités fort remarquables, qui ont passé inaperçues jusqu'à présent. Ainsi on voit le long de l'intestin, de chaque côté, un vaisseau très-replié (fig. 11. a), fort transparent, dont je n'ai pu suivre ni le commencement, ni la terminaison: et après cela, encore aux côtés du corps, des ramifications nombreuses et très-déliées, dont l'intérieur présente des cils vibratiles (fig. 11. e). Je ne saurais dire si ces ramifications sont en continuité avec les deux grands vaisseaux qui n'ont pas de cils, ou si elles appartiennent à un système propre. La cavité du corps est transversée sans ordre par des brides.

Les germes des Cercaires sont libres dès leur origine, et leur développement se fait de la manière que j'ai décrite plus haut. La Cercaire, parvenue à son maximum de développement, se présente comme à la fig. 12. La ventouse antérieure est couronnée d'épines courtes, assez fortes, et toutes de la même longueur: l'intestin est très-peu distinct par sa grande transparence, la finesse de ses contours, et le manque d'un contenu particulier. Les deux vaisseaux latéraux sont au contraire très-développés: la queue manque du bord membraneux, qui est si distinct

dans les *C. echinata* et *echinatoides*. Chaque Rédie ne contient qu'une seule Cercaire développée, au milieu de plusieurs germes à différentes phases d'évolution.

Dans mon précédent Mémoire j'ai dit que les Rédies de la *C. echinatoides* ne présentent jamais d'autres jeunes Rédies dans l'intérieur, tandis que bien souvent elles contiennent ce ver singulier, que j'ai appelé *Tétracotyle*. C'est le cas contraire pour la *C. coronata*. Dans les Rédies de cette espèce je n'ai jamais rencontré une seule fois des Tétracotyles, et bien souvent, au contraire, de jeunes Rédies. C'est un nouvel argument en faveur de l'opinion que j'ai émise sur la nature physiologique du Tétracotyle (1).

Ce fait a excité en moi un intérêt d'autant plus vif, qu'ayant cherché si long temps, et par des observations répétées en grand nombre, des Rédies productrices d'autres Rédies, ou des *nourrices maternelles* (*Grossammenn* de Steenstrup), je n'avais pu en trouver qu'un seul cas, et même non suffisamment clair et précis, dans les Rédies des Distomes de la Paludine impure (2). Il y a cependant encore cette différence, que les Rédies de la *C. coronata* contiennent une Rédie filiale en même temps qu'une Cercaire, avec des germes de l'une et de l'autre, conformément à ce qui a été vu par Siebold dans l'espèce qu'il appelle *C. echinata* (3), tandis que les Rédies de cette espèce, selon Steenstrup, contiennent exclusivement ou des Cercaires ou d'autres Rédies. Si le nom de grandes nourrices ou nourrices maternelles convient dans ce cas, il n'est pas également propre à l'égard des Rédies de la *C. coronata*. Il est bon d'ajouter ici, que celles de ces Rédies, qui produisent en même temps une Cercaire et une Rédie filiale, se distinguent des autres, qui ne produisent que des germes de Cercaires, par le bulbe pharyngien beaucoup plus grand. Dans la figure 11, qui représente une de ces Rédies, on voit en effet le bulbe pharyngien très-musculeux et dilaté.

Pour ce qui regarde le développement des Rédies filiales, j'ai fait les observations suivantes. On ne saurait distinguer au commencement le germe d'une de ces Rédies de celui d'une Cercaire: seulement plus tard, lorsque le germe a déjà pris la dimension qu'aura la Rédie (fig. 11. *c.*),

(1) Voyez mon premier Mémoire, pag. 24.
(2) Ibid., pag. 25.
(3) Burdach, Physiologie. Traduct. franç. T. 3. p. 39.

on la distingue assez bien à sa forme allongée, à son opacité un peu plus forte que dans les germes des Cercaires, et à sa surface inégale, à gros tubercules. Enfin l'intestin paraît d'abord sous la forme d'un boyau droit, clos aux deux bouts ; dans ses parois on remarque des contractions vermiculaires lentes mais énergiques, avant encore que dans le corps se manifestent des mouvements quelconques : l'intestin peu à peu s'allonge, et présente quelques inflexions, mais restant encore sans communication avec le bulbe pharyngien. Enfin, la forme générale du corps se dessine, les appendices latéraux font saillie au dehors, et la jeune Rédie présente des mouvements spontanés (fig. 13). A cette période j'ai vu presque toujours dans l'intestin de la jeune Rédie un cristal octaédrique à base carrée, que les contractions du corps font rouler dans la cavité de l'intestin. On voit, d'après cette exposition, que le développement des Rédies filiales de la *C. coronata* est bien différent de celui des jeunes Rédies de la *C. echinatoides*, ce qui tient sans doute à la différence d'origine.

Une circonstance particulière pour cette espèce, c'est que les Rédies sont toujours très-vivaces, même avec leur progéniture complètement développée dans la cavité du corps : et qu'on ne trouve jamais, dans les viscères des *Lymnaeus palustris* et *stagnalis*, ni de Cercaires couronnées libres, ni de jeunes Rédies filiales ; et que même on rencontre une extrême difficulté à déchirer les Rédies pour en mettre en liberté le contenu, vu aussi la résistance et la contractilité des parois. Ces Rédies tendent à se porter à la surface du corps du mollusque : j'en ai même trouvées plusieurs fois qui étaient déjà sorties entre le manteau et la coquille. Il est donc bien probable que les Rédies transportent elles-mêmes leur progéniture hors du corps des mollusques pour la faire passer, on ne saurait décider si activement ou passivement, dans les conditions propices pour les métamorphoses ultérieures. Ceci complique la question de savoir quelle sera l'espèce de Distome représenté à l'état de larve par la *C. coronata :* question qui est pour moi, et pour le moment, tout-à-fait inabordable.

Il reste encore à savoir d'où viennent originairement ces Rédies. Elles sont certainement douées du pouvoir de se multiplier par elles-mêmes, ainsi que nous venons de le voir : mais de quelle manière se rattache la première génération de ces êtres à la série génétique du Distome dont la *C. coronata* est la larve ? C'est la même question que j'ai déjà

traitée en parlant de la *C. echinatoides*. Mais, peut-être, les faits rapportés dans mon Mémoire restant toujours les mêmes, ai-je eu tort de m'en servir pour réfuter l'opinion de Siebold sur la première procréation des Rédies par un embryon infusoriforme, qui sort directement de l'œuf du Trématode adulte de la série. Mes anciennes observations, et celles de Siebold, peuvent rester à côté les unes des autres, sans se contredire réciproquement. Je persiste dans mon opinion, que le Tétracotyle de la série de la *C. echinatoides*, est un être reproducteur des Rédies; je crois toujours qu'il y a des espèces de Trématodes qui n'existent plus, ou très-rarement, à l'état parfait (peut-être la *C. echinatoides* est de ce nombre), et qui pourtant se propagent par la faculté qu'ont les Rédies de se reproduire; mais la question est toujours ouverte sur la première génération de ces Rédies; précisément comme pour le cas actuel, outre une génération propre et indépendante des Rédies de la *C. coronata*, on peut encore se demander d'où proviennent les premières Rédies de la série? La belle observation de Siebold sur les embryons du *Monostomum mutabile* reprend dans ce cas toute sa valeur; et peut-être en communique un peu au fait suivant, tout insignifiant qu'il paraisse. Il m'a été possible de voir une fois dans un *Lymnaeus palustris*, au milieu d'un grand nombre de Rédies encore peu développées, le cadavre d'un Infusoire couvert de cils à moitié décomposés, qui contenait un autre corps oblong à contours bien distincts, de telle manière que j'ai été amené tout de suite à rapprocher cette observation de celle déjà citée de Siebold; et à voir, dans cet Infusoire mort, un embryon de Distome qui renfermait dans le corps le germe d'une Rédie. Cette circonstance m'encouragea à pousser et multiplier mes recherches pour parvenir enfin à voir un peu mieux d'autres faits de cette nature; mais jusqu'à présent tous mes efforts restèrent sans fruit. Si l'on demande maintenant pourquoi on ne rencontre jamais, ou si rarement, dans les Mollusques de tels embryons de Distome producteurs de Rédies, on répondra que cela dépend encore du fait général de l'extrême rapidité avec laquelle se font tous les passages d'un état à l'autre dans les séries génétiques des Trématodes: de manière que les embryons, qui sont les êtres producteurs des premières Rédies, ne font que porter leur progéniture dans le corps des mollusques et disparaître. Un peu de persévérance et on viendra à bout aussi de cette difficulté.

Amphistoma subclavatum. — Le parasite, que j'ai fait connaître sous le nom

de *Diplodiscus Diesingii*, n'était plus tombé sous mes yeux depuis 1837 jusqu'à l'époque de la publication du Mémoire qui précède celui-ci : j'ai donc dû me borner à rapporter dans ce Mémoire quelques-unes des mes anciennes figures, et à émettre l'opinion que ce ver, loin d'être une espèce définie et à terme, n'était que l'état de larve ou de Cercaire de l'*Amphistoma subclavatum* des Batraciens. L'occasion enfin se présenta cet hiver de reprendre ce sujet; d'étudier un peu mieux l'organisation et la métamorphose de cet animal. Mes anciennes observations, faites à l'aide d'un microscope simple, devaient naturellement se ressentir de l'insuffisance de cet instrument : pourtant je me trouve plutôt à même d'ajouter que de changer aux résultats précédents. Ainsi, la forme générale du corps de la Cercaire jadis nommée *Diplodiscus Diesingii*, est suffisamment bien représentée par mes anciennes figures; les taches noires que j'ai considérées comme des yeux, le sont réellement : et la métamorphose de ce parasite des Planorbes dans l'Amphistome des Batraciens est devenue un fait des mieux prouvés.

C'est dans le *Planorbis vortex* des ruisseaux, près de Moncalier, que j'ai trouvé encore en abondance ce parasite, dont les dimensions sont énormes, si on le compare avec le corps du mollusque qui le loge. Il parvient en effet à la longueur de $0^{mm},42$, la queue non comptée. Vu à la simple loupe, il présente la couleur générale d'une légère nuance jaunâtre, sur laquelle tranchent nettement les taches noires des yeux. Il est très-remuant et nage avec une grande vivacité à la manière des autres Cercaires. La grande ventouse postérieure change à chaque instant de forme : tantôt elle se dilate, tantôt se contracte; le fond fait saillie au dehors, pour se retirer un instant après.

A l'inspection microscopique on aperçoit, avant tout, deux grands vaisseaux latéraux qui commencent près des yeux, et se portent en bas pour se rencontrer à la partie postérieure du corps, et aboutir à une cavité à parois contractiles. Ces vaisseaux ne contiennent que des globules de graisse en proportion et de diamètre variables selon les individus: tantôt ce sont de grands globules fortement réfringents; tantôt des gouttelettes plus petites et plus transparentes, le tout mêlé à une infinité de granules. Aux côtés de la cavité buccale, selon les divers mouvements de cette partie du corps, on voit paraître de temps en temps un rudiment des deux cavités latérales (salivaires?), qui sont si distinctes dans l'adulte. L'intestin, à cause du peu de transparence des téguments, n'est que

difficilement visible; on reconnait pourtant qu'il est divisé en deux grandes branches. Quelques individus laissent voir déjà dans le milieu du corps un rudiment des testicules.

Des corpuscules particuliers sont distribués en grand nombre dans l'épaisseur des téguments, de manière à les priver de transparence; leur forme n'est pas mal comparable à celle d'une navette ou d'un fuseau, à parois épaisses, tronquée aux deux bouts. Plus tard ces corpuscules sont destinés à disparaître.

Les deux taches noires, que j'ai dit être les yeux, sont constituées par une lentille conique, couverte de pigment, hormis la face convexe externe qui correspond à la base du cône. Ces organes se forment assez de bonne heure; car ils sont déjà visibles dans tous les jeunes individus encore sans vaisseaux, sans intestin, et tout-à-fait inertes.

La queue a son insertion au bord de la ventouse, à la partie dorsale. Elle est très-développée, et l'animal l'agite en tous sens, l'allonge et la raccourcit avec une grande vivacité. Un canal la parcourt dans toute sa longueur, tandis que la partie périphérique se montre comme formée de grandes cellules transparentes disposées en pavé, et que je n'ai pas vues clairement dans les autres Cercaires.

Ce parasite est procréé par des Rédies d'une forme particulière, sans appendices latéraux, et terminées en pointe à la partie postérieure. Après un bulbe pharyngien assez robuste vient un intestin ou un estomac très-court et presque sphérique. Je dois ici rectifier une erreur qu'on trouve dans les figures ainsi que dans les descriptions précédemment données. Ce que j'ai représenté comme étant un intestin tortueux, qui fait suite à un estomac, n'est qu'une réunion de germes de Cercaires, comme on voit à la fig. 15.

Bien différemment de ce que nous avons vu pour la *C. coronata*, les Cercaires d'Amphistome sortent de la Rédie dans un état qu'on peut dire embryonnaire. Les germes parvenant bientôt à une dimension telle qu'ils ne peuvent plus rester renfermés dans le corps de leur mère, le rompent par distension, en sortent, et achèvent de se développer dans les viscères du Planorbe, qu'enfin elles quittent aussi, pour chercher ailleurs les conditions favorables à leur dernière métamorphose.

Maintenant il s'agit de savoir si cette Cercaire d'Amphistome s'enkystera comme les autres, et dans quel animal. Je n'ai pas d'observations positives pour répondre nettement à ces questions: mais quant à la

première je pense qu'on doit répondre affirmativement; d'abord, par la force de l'analogie avec les métamorphoses connues des autres Cercaires, ensuite par la considération que les corpuscules tégumentaires de la larve disparaissent plus tard dans l'Amphistome parfait, se comportant en cela comme les cellules kystogènes d'autres Cercaires (*C. echinatoides*, par exemple), et donnant lieu probablement, comme dans celles-ci, à la formation des enveloppes du kyste. Jusqu'à présent je n'ai pas le moindre fait pour répondre à la seconde question. J'ai inutilement cherché cette espèce de Cercaire enkystée dans les larves d'insectes ou dans les petits crustacés vivants avec les Planorbes.

Mais si j'ai échoué dans ce point de mes recherches, j'ai été bien largement compensé par la découverte de l'état adulte de l'espèce. C'est dans l'intestin des Salamandres aquatiques (*Triton punctatus*) de la même localité de Moncalier que j'ai vu les Amphistomes dans la dernière période de leur développement, et dans tous les degrés de transition, depuis la larve qui n'a fait que perdre la queue et qui probablement vient d'éclore de son kyste, jusqu'au véritable Amphistome déjà plein d'œufs et d'embryons.

Les plus jeunes individus, ceux qu'on dirait parvenus depuis peu dans l'intestin des Tritons, conservent encore bien distinctement les yeux qu'ils avaient dans la période antécédente de leur vie: et à cause de la plus grande transparence des téguments, qui permet de suivre plus distinctement tous les détails de l'organisation interne de l'animal, on voit que ces yeux sont supportés par les ganglions de la masse nerveuse centrale placée de travers sur l'œsophage: ce qui prouve encore mieux leur véritable nature.

Quant aux détails de l'organisation interne de ces Amphistomes, je ne fais que les représenter dans une figure qui mettra à même de voir qu'il ne manque plus rien à l'Amphistome dans cet état, hormis les œufs dans les replis de l'oviducte, lequel pourtant existe, aussi bien que toutes les autres parties de l'appareil sexuel, et qu'au contraire il y a quelque chose de trop, les yeux, que les Amphistomes adultes n'ont pas. En peu de temps ces organes se décomposent, la lentille est dissoute, les granules pigmentaires sont dispersés, et de cette manière les yeux disparaissent complètement. Cette espèce subit donc une véritable métamorphose regressive, analogue à celle de plusieurs crustacés inférieurs (Bopyriens, Lernéens, Cirrhipèdes), dans lesquels aussi la perte

des yeux, la réduction ou l'atrophie des organes de la locomotion se lient comme un effet à sa cause, à l'activité concentrée dans les ovaires, à la production accélérée d'un grand nombre d'œufs à la fois. Celui qui trouverait même dans la simple perte de la queue des Cercaires un fait de métamorphose regressive, ne serait pas dans le tort.

Distoma Buccini mutabilis. — Dans mon précédent Mémoire j'ai déjà fait connaître des Sporocystes qui donnent directement des Distomes: or ce fait n'était pas destiné à rester isolé, et presque comme une exception: en effet, je viens de trouver aussi dans le *Buccinum* (*Nassa*) *mutabile* du golfe de Gênes, des Sporocystes pyriformes, avec une petite protubérance arrondie, représentant presque un pédoncule, et qui contiennent grand nombre de Distomes munis d'un aiguillon buccal de la même manière que les Cercaires armées, et de longs cils ou soies immobiles, au bord de l'extrémité postérieure du corps. Je me bornerai à cette notice, en l'accompagnant de quelques figures (fig. 17-18), n'ayant pu me procurer aucune notion relative au développement ultérieur de cette espèce.

Cercaria echinocerca. — Cette espèce, qui est évidemment une larve de Distome, est parasite du *Buccinum Linnaei* Payr. du golfe de Gênes, et présente des caractères tout particuliers. On la reconnait à la première vue à sa queue régulièrement annelée, hérissée de longues soies disposées en rayons à la conjonction des anneaux, et douée d'une grande vivacité, de manière qu'elle s'allonge, se raccourcit, se plie de tout côté par des mouvements rapides, même après sa séparation du corps. La partie antérieure du ver est toute couverte d'épines: les deux ventouses sont grandes, et à peu près d'égal diamètre. Un œsophage long et étroit finit en bas à un bulbe œsophagien, qui précède immédiatement la bifurcation de l'intestin.

La partie antérieure du corps se présente à la lumière réfléchie d'une couleur grisâtre, à cause d'un grand nombre de granulations pigmentaires disséminées à l'intérieur. A un plus fort grossissement et par transparence on remarque, parmi ces granulations, deux grandes taches plus foncées, de forme irrégulière, disposées symétriquement des deux côtés de l'œsophage, et qu'il n'est guère possible de comparer à autre chose qu'aux yeux des larves d'Amphistome, d'autant plus qu'on peut voir très-bien, dans l'intérieur de ces taches, un noyau transparent, qui représente une véritable lentille rudimentaire.

Un autre caractère de cette espèce consiste dans le grand développe-

ment de la cavité excrétoire qui, de l'orifice postérieur du corps, se prolonge en haut jusqu'au de-là de la ventouse ventrale, rejetée de côté par celle-ci. Cette cavité contient de grands globules fort réfringents (graisse?) (fig. 19).

La *C. echinocerca* est produite dans des Rédies qui ont plusieurs caractères d'analogie avec celles de l'*Amphistoma subclavatum* (fig. 20); en effet les appendices latéraux manquent: la partie postérieure du corps est pointue, et terminée par un bourrelet peu distinct: l'œsophage très-court conduit à un intestin assez petit. Le cou avec le bulbe pharyngien est ordinairement retiré dans le tronc; mais la Rédie le fait sortir de temps en temps, et alors la bouche présente un bord circulaire épais, qui se dilate, se retrécit et s'applique sur la surface du verre comme une ventouse. Conformément à ce que nous avons déjà vu à propos des larves d'Amphistome, la progéniture de ces Rédies quitte de bonne heure la cavité maternelle, et l'organisation des Cercaires s'achève au dehors et, pour ainsi dire, à nu dans les viscères du *Buccinum*.

Quant aux métamorphoses successives de cette espèce, l'observation directe n'est pas venue à mon aide; mais je suis invinciblement porté à croire, que le Distome trouvé par Dujardin dans des kystes de la muqueuse buccale des *Pleuronectes*, et qu'il a décrit sous le nom de *D. hystrix* (1), appartient à un degré plus avancé de la même série génétique. Les traits les plus caractéristiques de la *C. echinocerca* se rencontrent aussi dans le *D. hystrix*, tels que la partie antérieure prolongée comme un cou épineux, le bulbe œsophagien séparé de la bouche par un tube long et étroit, l'orifice postérieur donnant entrée à une vaste cavité ventrale. Quant aux différences des autres caractères, on peut les expliquer de la manière la plus naturelle. Ainsi les taches oculaires manquent dans le *D. hystrix* par la raison très-probable qu'elles ont déjà disparu; le double rang d'épines plus longues, dont est pourvue la tête de ce Distome, est une production nouvelle tout-à-fait analogue à la couronne d'épines qui paraît presque soudainement dans la période d'enkystement d'autres Cercaires (*C. echinatoides* p. ex.); de même la matière blanche opaque qui remplit la cavité excrétoire du *D. hystrix*, est une sécrétion postérieure analogue à celle que nous avons déjà vue à

(1) Histoire des Helminthes, pag. 433.

propos de la *C. virgula*. Seulement il y a lieu de croire que les kystes du *D. hystrix* ne sont pas exactement comparables à ceux dont j'ai souvent parlé à propos d'autres Cercaires (*C. echinata*, *echinatoides*, etc.). Le *D. hystrix* est déjà à un état plus avancé que s'il résultait de l'enkystement immédiat de la *C. echinocerca*. On doit plutôt le considérer comme un Distome dévié de son chemin, et qui ayant été arrêté dans la muqueuse buccale des *Pleuronectes* s'y est enkysté de nouveau, au lieu de passer dans le tube intestinal du poisson, où il aurait trouvé les conditions propices pour son développement complet. Dans ce dernier état il constitue probablement le *Distoma appendiculatum*, ou une de ces espèces mal définies qu'on groupe autour de celle qui porte ce nom.

Distoma renale. — L'*Helix adspersa* des environs de Turin contient très-fréquemment dans le rein (glande de la mucosité de Cuvier), des Distomes d'assez grande dimension, si on les compare à ceux qu'on trouve d'ordinaire dans les Mollusques, car ils mesurent jusqu'à 2^{mm} en longueur. Leur corps est très-transparent, déprimé, pointu au bout postérieur, à tégument lisse: les deux ventouses sont assez grandes et à peu près d'égal diamètre. L'œsophage membraneux se dilate pour recevoir le bulbe œsophagien, auquel font suite directement les deux branches de l'intestin. Le système vasculaire est très-développé, car on remarque distinctement deux troncs longitudinaux repliés entre les deux branches intestinales, et deux autres vaisseaux ramifiés entre ces branches et les bords du corps: en bas, près de l'organe excrétoire, qui est très-petit, on voit le vaisseaux interne et l'externe de chaque côté se continuer l'un dans l'autre. Les branches intestinales contiennent souvent une quantité de globules, les mêmes qui constituent la sécrétion de la glande du mollusque (fig. 21).

On trouve, dans une même glande, de ces Distomes à des degrés différents de développement: les plus agés présentent déjà un rudiment des testicules; les plus jeunes sont de véritables Cercaires, avec une queue très-courte, inerte, et qui ne laisse apercevoir que des très-lentes contractions vermiculaires (fig. 21^a). Je suis presque disposé à croire que cette espèce passe de l'état de Cercaire à celui de Distome sans s'enkyster. Jusqu'à présent je n'ai pu trouver des nourrices, mais je suppose, avec fondement, qu'elles doivent être des Rédies qui s'ouvrent de bonne heure pour laisser sortir les germes des Cercaires, destinés à se développer ultérieurement dans le tissu même de la glande.

H. Meckel a figuré une espèce analogue qu'il a trouvée dans le rein

de l'*H. pomatia* (1): et dans laquelle il a vu deux vaisseaux latéraux, présentants des contractions péristaltiques et qui sont une continuation avec les autres troncs latéraux ciliés, déboucher en bas à l'organe excrétoire. Je n'ai vu ni ces vaisseaux contractiles, ni des cils vibratiles dans les autres vaisseaux, dans l'espèce que je viens de décrire.

Considérations générales. — Les connaissances acquises jusqu'à ce jour sur les diverses phases du développement des Trématodes montent déjà à un assez bon nombre, pour permettre d'en déduire des corollaires, dont quelques-uns peuvent être considérés comme des lois génétiques établies, d'autres comme des faits probables, d'après lesquels il serait permis de tracer un plan rationnel et méthodique pour des recherches ultérieures. Je m'efforcerai d'en faire ressortir les principaux.

1. Il reste définitivement prouvé que le premier embryon (infusoire) des Trématodes ne se transforme pas en un Trématode de son espèce, mais qu'il produit ou devient lui-même un individu générateur (nourrice) des larves destinées à subir la métamorphose en Trématode.

2. Les Cercaires ne sont pas des animaux parfaits, mais la forme plus ordinaire de ces larves, le produit plus ordinaire des nourrices. La queue pourtant peut manquer dans les jeunes Trématodes nés dans les nourrices: et de cette manière leur métamorphose se simplifie, ou, pour mieux dire, il n'y a plus de véritable métamorphose.

La plupart des Cercaires connues jusqu'à ce jour, sont des larves de Distomes; mais on connait déjà des *Monostoma* dans cet état (*C. ephemera*), et des *Amphistoma* (*Diplodiscus Diesingii*) (2).

3. Quant à la forme et à l'organisation des larves et des nourrices, on peut déjà rapporter les Trématodes à deux types bien distincts; dont l'un serait représenté par la *C. armata*, l'autre par la *C. echinata*.

Dans le premier type:

a. Les larves sont munies sans exception et exclusivement d'un aiguillon inséré dans la partie dorsale de la ventouse antérieure.

b. Elles s'enkystent probablement en séparant la couche extérieure

(1) MUELLER. Archiv. d'Anatomie, u. s. w. 1846. Pl. 1. fig. 2.

(2) Selon STEENSTRUP le *Distoma duplicatum* des Moules serait l'état de larve ou de Cercaire de l'*Aspidogaster conchicola*. J'ai pourtant trouvé l'*Aspidogaster* dans les Moules du lac de Varèse où manque le *Distoma duplicatum*, et par contre je ne l'ai jamais trouvé dans les Moules de Racconis en Piémont, où ce Distome est excessivement abondant.

de la peau; et l'individu, tout enkysté qu'il est, se nourrit et fait des progrès dans son organisation.

c. Les nourrices sont des Sporocystes, c'est-à-dire de simples sacs membraneux sans bouche et sans intestin (1).

d. Elles se forment par métamorphose directe d'un embryon infusoriforme; et probablement une fois formées peuvent se reproduire par scission.

Dans le second type:

a. Les larves n'ont jamais d'aiguillon buccal; et celles qui deviendront des Distomes présentent tôt ou tard une couronne d'épines autour de la ventouse antérieure.

b. En s'enkystant, elles sécrètent par couches concentriques la substance qui forme l'enveloppe du kyste. Une fois enkystées, leur organisation reste stationnaire.

c. Elles sont procréées par des Rédies, c'est-à-dire par des nourrices avec une bouche, un bulbe pharyngien, un intestin, des vaisseaux.

d. Les Rédies se forment par métagenèse d'un embryon infusoriforme. Elles se multiplient ou directement, par génération endogène d'autres Rédies, ou indirectement, en procréant un Tétracotyle qui reproduit les Rédies à son tour (2).

Peut-être on devra faire un troisième type pour les espèces dont la Cercaire a une double queue (*C. furcata*, *Bucephalus polymorphus* et *Haimeanus*) (3).

4. Il est bon de faire attention aux rapports entre les différents genres et familles de Mollusques, et tel ou tel autre caractère des larves

---

(1) C'est sans doute par un *lapsus calami* que Siebold donne la figure d'une Rédie comme appartenant à la *C. armata*, tandis qu'elle doit se rapporter à la *C. echinata* (Ueber die Band und Blasen-Würmer. — Pag. 18. fig. 2.).

Je n'hésite pas à appliquer la même remarque à l'observation de Dujardin, qui dans son classique traité sur les vers intestinaux (pag. 477) décrit une Cercaire armée (peut-être la véritable *C. armata*) comme engendrée par une Rédie. Je crois que cet excellent observateur s'est laissé tromper par la présence contemporaine et accidentelle sous le microscope de Cercaires armées et de Rédies.

(2) Il reste à savoir si même les Sporocystes peuvent engendrer des Tétracotyles, ainsi qu'on devrait croire à la vue des figures 6*a* et 6*b* Tab. III de l'ouvrage de Steenstrup.

(3) J'ai vu une seule fois la *C. furcata* dans une Paludine vivipare du Lac-majeur; et je crois avoir remarqué dans les Sporocystes de cette espèce un phénomène opposé à celui de la scission· c'est-à-dire l'union et la fusion de deux ou plusieurs Sporocystes bout à bout.

du Trématode. Ainsi c'est dans les Paludines qu'on trouve des Cercaires douées d'une paire de glandes surnuméraires à la bouche (*C. microcotyla*, *C. virgula*) : c'est dans les Planorbes qu'on trouve des Cercaires munies d'yeux (*C. ephemera*, *Diplodiscus Diesingii*). Les Cercaires parasites des mollusques bivalves présentent un caractère commun dans l'énorme développement de la queue (*C. macrocerca*, *Distoma duplicatum*, et surtout *Bucephalus polymorphus* en comparaison de la *C. furcata*). Les deux espèces de Trématodes que j'ai trouvées dans le *Buccinum*, bien que très-différentes entr'elles (*Distoma Nassae mutabilis*, et *Cercaria echinocerca*), présentent toutes les deux de longues soies au bout postérieur du corps.

Assez probablement chaque espèce de Trématode à l'état de larve n'habite que dans une espèce déterminée de mollusque, ou dans deux espèces très-analogues.

5. Chaque espèce de mollusque, considérée dans des limites géographiques naturelles, peut servir de nid à deux et même à trois espèces de Trématodes à la condition de larve ; mais, si je dois juger d'après mes observations, ces différentes espèces de larves appartiennent à des types différents. Ainsi jusqu'à présent je n'ai jamais trouvé en Lombardie ou en Piémont, une Paludine, une Lymnée, un Planorbe avec deux espèces de Cercaires armées, ou deux espèces de Cercaires du type de la *C. echinata*. Voici la distribution que j'ai trouvée dans les Gastéropodes de ces pays.

	1.er type	2.ème type	3.ème type?
PALUDINA IMPURA	*Cercaria virgula*	*Distoma paludinae impurae*	.....
» VIVIPARA	*C. microcotyla* (1)	*C. echinatoides*	*C. furcata.*
LYMNAEUS AURICULARIS	*Dist. Lymnaei*	.....	.....
» OVATUS			
» PALUSTRIS	*C. armata?*	*C. coronata*	.....
» STAGNALIS			
» PEREGER	*C. gibba*	*C. neglecta*	.....
PLANORBIS NITIDUS	*Cercaria* sp. indeterm. (2)	*Diplodiscus Diesingii*	.....
» VORTEX			
BUCCINUM MUTABILE	*Dist. buccini*	.....	.....
» LINNAEI	.....	*C. echinocerca*	.....
HELIX ADSPERSA	.....	? *Dist. renale*	.....

(1) La *C. vesiculosa* dont j'ai parlé dans mon Mémoire antécédent, et qui se trouve en grand nombre dans la *Paludina vivipara*, mais toujours dans un état de développement très-arriéré, n'est probablement autre chose que la *C. microcotyla* hors de place.

(2) Vue une seule fois et encore non suffisamment développée. C'est peut-être l'espèce que j'ai décrite anciennement sous le nom de *Distoma polymorphum* (Biblioteca Italiana, 1837).

APPENDICE.

Ce Mémoire était déjà sous presse, lorsque j'ai reçu une lettre du Docteur Guido Wagener, datée de Berlin, 20 juin; et plus tard une dissertation de M.r le Baron De la Vallette de S.t George (1). La science est redevable à ces auteurs de précieuses découvertes sur le développement et les métamorphoses des Trématodes. On me saura gré de traduire ici les choses les plus essentielles de la lettre de Wagener.

« Dans mon travail, couronné par l'Académie de Harlem (2), j'ai décrit et figuré 20 espèces de Cercaires avec leurs nourrices. Je crois avoir vu toutes celles que vous avez fait connaître dans votre Mémoire. La *Cercaria macrocerca* appartient au *Distoma cygnoides*. Dans l'embryon cilié de ce Distome et de plusieurs autres j'ai trouvé un système vasculaire avec cils vibratils. J'ai nourri l'embryon du *Dist. cygnoides:* et de cette manière j'ai obtenu la série génétique complète, anatomiquement sans la moindre lacune, de cette espèce.

« Dans l'embryon du *Monostomum mutabile* j'ai trouvé un système vasculaire, et dans les taches dorsales un corp lentiforme; et dans la nourrice renfermée dans cet embryon, un pharynx, un intestin, et un système vasculaire.

« J'ai découvert, après cela, que le système vasculaire de plusieurs Cercaires s'ouvre à l'extérieur dans la queue. Dans cette partie des Cercaires j'ai souvent vu des cils vibratils.

« Sous la peau du *Diplodiscus* à l'état de Cercaire j'ai trouvé des batonnets (*Stäbchen*), qui disparaissent dans le développement ultérieur (3).

« Le *Distoma duplicatum* appartient assez probablement au *Dist. tereticolle;* la nourrice avec 4 appendices rétractiles au cou, au *Dist. trigonocephalum.*

« Quant à moi, j'établis de cette manière le développement des Trématodes:

---

(1) *Symbolae ad Trematodum evolutionis historiam.* Berolin. 1855.

(2) Ce travail tout-à-fait récent est encore inédit; mais on a droit d'espérer qu'il ne le restera pas long-temps.

(3) La même chose a été observée par moi, ainsi qu'on a vu dans ce Mémoire.

« *A.* L'embryon non cilié:

« 1. devient directement un sac producteur de Cercaires (*Dist. tereticolle*);

» 2. produit des nourrices par gemmation (*Verzweigung*) (*Dist. holostomum. Gasterostomum. Leucochloridium*)

« Tous manquent de vaisseaux ciliés.

« *B.* L'embryon cilié et pourvu des vaisseaux:

« 1. produit des nourrices, et celles-ci des Cercaires; les nourrices n'ont pas de vaisseaux (?) (*Dist. cygnoides, Dist. folium* (?)).

« 2. est même pourvu d'un intestin, et plus tard aussi d'un pharynx; les nourrices ont des vaisseaux, et une ouverture dorsale (*Monostomum capitellatum. Echinostomum?*). »

Quant à la dissertation de M.r De la Vallette, 15 espèces de Cercaires y sont décrites et figurées, dont plusieurs de formes tout-à-fait nouvelles et bien intéressantes, à queue bifurquée, et d'autres à queue entourée de soies, découvertes par M.r le Prof. J. Mueller qui les a pêchées dans la Méditerranée; assez différentes pourtant de celle que j'ai décrite sous le nom de *C. echinocerca*.

M.r De la Vallette, qui n'a pu voir que très-tard mon premier Mémoire, a donné le nom de *C. pugnax* à l'espèce appelée par moi *C. microcotyla*; et celui de *C. echinifera* à celle que j'ai nommé *C. echinatoides*. Il a pu faire éclore les kystes de cette espèce dans l'intestin des oiseaux et du lapin, et obtenir des Distomes complets. La même expérience lui est réussie avec la *C. echinata*, qu'il a vu se transformer réellement dans le *D. echinatum* des oiseaux. Il a aussi vérifié expérimentalement ce que Siebold avait déjà soupçonné, que la *C. ephemera* (*C. flava* De la Val.) est la larve d'un *Monostomum*.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1-4. *Cercaria armata?*

1. Une jeune Cercaire pour montrer la formation du canal intestinal. 2. Un individu plus développé. 3. Un individu enkysté. 4. Une Sporocyste.

Fig. 5-10. *Cercaria virgula.*

5. Une Cercaire. 6. Sa partie antérieure plus grossie. 7. Jeune distome enkysté dans une larve de *Perla*. 8-10. Transformation graduelle d'un Infusoire (*Bursaria*) en Sporocyste.

Fig. 11-13. *Cercaria coronata.*

11. Une Rédie; *a.* germes de Cercaires; *b* une Cercaire développée; *c.* une Rédie filiale; *d.* grands vaisseaux longitudinaux; *e.* ramifications vasculaires avec cils vibratiles dans l'intérieur. 12. Une Cercaire tirée de sa Rédie, pour montrer la couronne d'épines à la ventouse antérieure. 13. Une Rédie filiale isolée, pour montrer la formation du canal alimentaire, contenant un cristal octaédrique.

PLANCHE II.

Fig. 14-16. *Amphistoma subclavatum.*

14. Une Cercaire (autre fois *Diplodiscus Diesingii*). 15. Sa Rédie avec des germes de Cercaires. 16. Jeune Amphistome: *a.* glandes buccales (salivaires?); *b.* ganglions de la masse nerveuse centrale qui supportent les yeux, et donnent origine aux deux filets latéraux *b'*; *c.* grands vaisseaux internes; *d.* vaisseaux externes; *e.* intestin; *f.* organe contractile auquel aboutissent les vaisseaux; *g.* ovaires rudimentaux; *h.* testicules; *i.* glande vitellogène? *k.* oviducte.

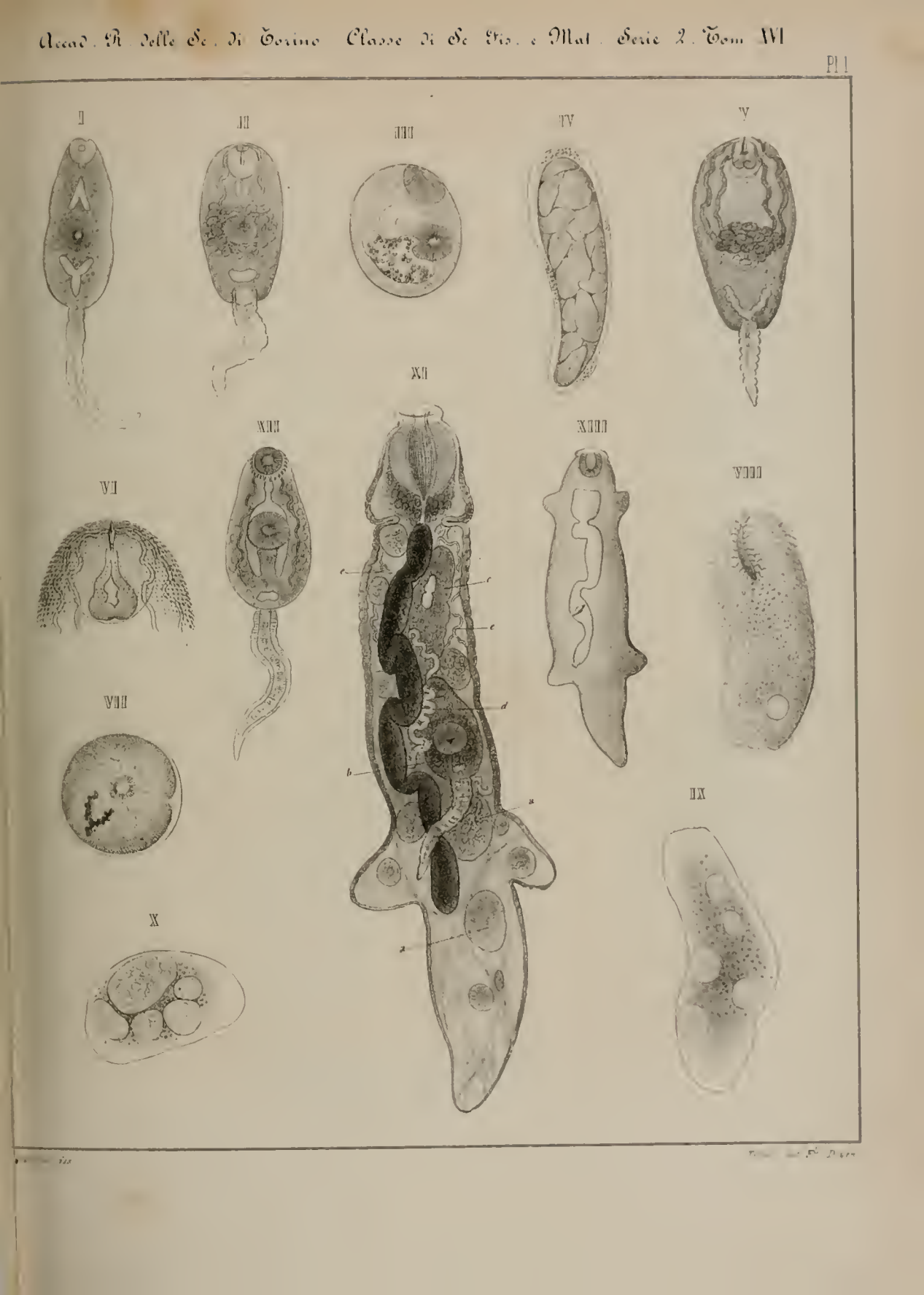
Fig. 17-18. *Distoma Buccini mutabilis.*

17. Un Distome; 18. Sporocyste.

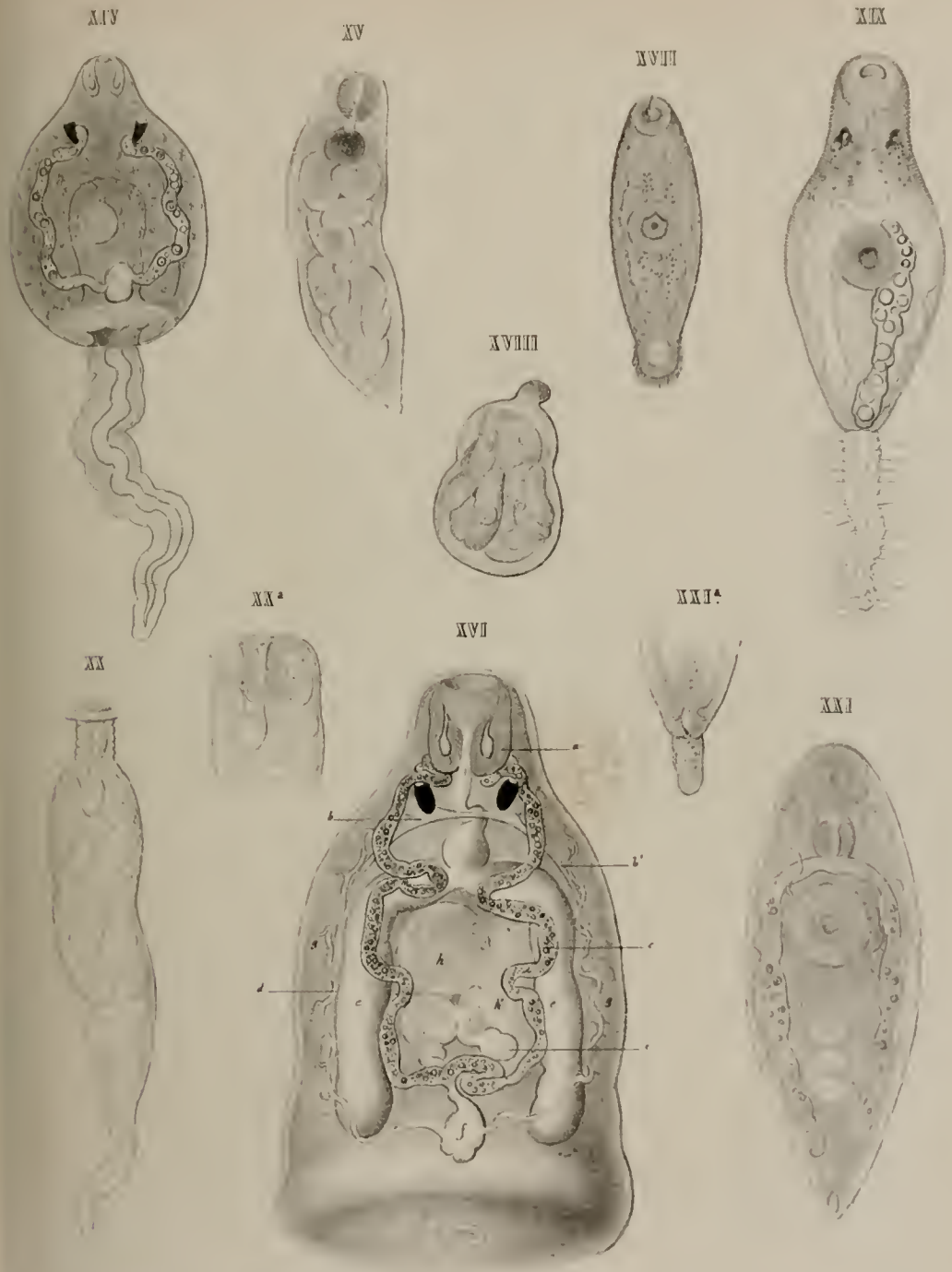
Fig. 19-20. *Cercaria echinocerca.*

19. Une Cercaire. 20. Sa Rédie, qui est représentée en 20^a, avec la partie buccale retirée dans le corps.

Fig. 21. *Distoma renale;* individu déjà un peu avancé dans son développement; 21^a la partie postérieure d'un individu plus jeune pour montrer la petite queue qui le constitue à l'état de Cercaire.


I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
a
b
c
d
e
f
g
h

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY


XIV
XV
XVII
XIX
XVIII
XX
XX*
XVI
XXI*
XXI
a
b
b'
c
d
e
f
g
h
k
k'

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

NOTE

SUR LE TERRAIN NUMMULITIQUE SUPÉRIEUR

DU DEGO, DES CARCARE ET C.

DANS L'APENNIN LIGURIEN

PAR LE PROFESSEUR

EUGÈNE SISMONDA

MEMBRE ET SECRÉTAIRE ADJOINT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE TURIN, ETC.

Lue dans la séance du 15 avril 1855.

Dès l'année 1845, à l'occasion du congrès des Savants italiens à Naples, j'ai déclaré, dans la séance du 1^er^ octobre de la section de Géologie et de Minéralogie, que le terrain nummulitique appartenait à la série des formations tertiaires, et non pas à celle des formations crétacées, comme généralement on croyait alors. Mon opinion s'appuyait sur la nature d'un nombre considérable de corps organiques fossiles, que l'on avait trouvés dans le terrain nummulitique du comté de Nice, et parmi lesquels il y avait plusieurs espèces identiques à celles du terrain tertiaire inférieur ou éocénique.

Une telle idée, tirée exclusivement des données paléontologiques, et émise dans le but d'inviter les Géologues à voir s'il y avait quelque moyen de mettre d'accord la paléontologie avec la géologie sur cette importante question, souleva, comme il résulte des *Atti* du même congrès de Naples, pag. 1160, dans le sein de la section une vive discussion, à laquelle prirent spécialement part le Président M. Louis Pasini, et le V-Président M. le marquis Laurent Pareto: cette discussion se termina par une déclaration, passez-moi le mot, conciliatrice, faite par le marquis

Pareto, c'est-à-dire que dans le comté de Nice il y avait deux formations nummulitiques différentes, l'une crétacée, inférieure au *macigno* avec fucoïdes, et caractérisée par de grands nummulites mêlés avec des bélemnites et d'autres fossiles de la craie, l'autre tertiaire, avec des nummulites plus petits, associés à des fossiles de l'époque tertiaire.

Je m'abstiens d'entrer dans le mérite de cette distinction, parceque mon but est seulement d'indiquer d'une manière historique quelles étaient les idées des Géologues italiens sur l'âge du terrain nummulitique, quand j'ai tâché de démontrer que ce terrain, d'après les données paléontologiques, devait se classer parmi les formations éocènes.

Deux lustres ne se sont pas-même écoulés depuis le congrès de Naples, et les découvertes paléontologiques, qui ont été faites dans ce court espace de temps, et qui attestent l'âge tertiaire de la formation nummulitique, sont si nombreuses, que mon opinion, qui d'abord avait été reçue avec beaucoup de réserve, est aujourd'hui embrassée par la plupart des Géologues.

Cela se rapporte à la question de l'âge du terrain nummulitique en général; mais il y a plus; si l'on étudie comparativement les fossiles nummulitiques provenant de divers endroits, on s'aperçoit bientôt qu'il existe différentes faunes nummulitiques, et que par conséquent leurs sédiments ne sont pas tous contemporains, de sorte que, tout en admettant le principe que le terrain nummulitique en général soit éocénique, il faut cependant encore avouer qu'il y a des sédiments nummulitiques plus anciens, et d'autres plus récents, ou, ce qui revient au même, qu'il y a des sédiments nummulitiques qui se sont déposés au commencement, et d'autres vers la fin de la période éocène.

Je me suis persuadé de la nécessité d'introduire dans la science une telle distinction dès l'année 1850, en étudiant une petite série de Polypes, de Mollusques et d'autres fossiles du terrain nummulitique des environs des Carcare, du Dego, et d'autres localités des Apennins liguriens, et qui avaient été recueillis en grande partie par le professeur Sismonda (Ange), qui donna de ces régions une description géologique dans un Mémoire sous le titre de *Classificazione dei terreni stratificati delle Alpi*, imprimé dans le vol. xii, 2ème série des publications de l'Académie royale des sciences de Turin. Mais quoique dès cette époque je fusse persuadé de l'existence de plusieurs formations nummulitiques distinctes, et que je me préparasse à la démontrer à l'aide d'une Monographie des

fossiles de l'Apennin ligurien, cependant MM. Hébert et Renevier m'ont en partie au moins prévenu dans la publication de ce fait; car dans un récent ouvrage intitulé: *Description des fossiles du terrain nummulitique supérieur des environs de Gap, des Diableretz et de quelques localités de la Savoie*, ils viennent précisément de faire voir que le terrain nummulitique de ces régions est plus récent que celui des Corbières, de Biaritz, du comté de Nice etc., et ils proposent par conséquent de l'appeler *terrain nummulitique supérieur* pour le distinguer du terrain nummulitique plus ancien, mais aussi tertiaire, qui devra donc prendre le nom de *terrain nummulitique inférieur*.

Or, il est à remarquer que le terrain nummulitique supérieur de MM. Hébert et Renevier n'arrive point à embrasser les sédiments nummulitiques les plus récents, tels que ceux de l'Apennin ligurien: il comprend des dépôts plus anciens, c'est-à-dire des dépôts intermédiaires entre le terrain nummulitique inférieur et le véritable terrain nummulitique supérieur.

La démonstration de cette vérité forme précisément le but de cette *Note*, que j'ai l'honneur de communiquer à l'Académie, en lui présentant les résultats d'une première étude que j'ai faite sur les fossiles de l'Apennin ligurien, et les corollaires que, selon moi, on peut en déduire, *en se laissant guider par la seule valeur paléontologique de ces fossiles, sans se préoccuper du gisement des roches qui les renferment.*

Les fossiles, dont il est question, grâce au nombre considérable des espèces miocènes et à la nature lithologique des roches, dans lesquelles ils se trouvent ensevelis, et qui sont particulièrement des arénaires fines, des marnes, et des poudingues serpentineux, représentent une faune qui a une très-grande ressemblance avec la faune miocène de la colline de Turin. Ceux que j'ai étudiés proviennent de la vallée de la Bormida, et principalement des environs des Carcare, du Dego, d'Acqui etc.; mais l'on en a déjà trouvé dans bien d'autres localités, hors de la vallée de la Bormida; ce qui prouve que l'horizon de cette zone nummulitique récente est assez vaste et mérite toute l'attention des Géologues. En attendant, avant d'entrer dans les considérations théoriques, que la nature de ces fossiles peut suggérer, je crois nécessaire de faire précéder la note des espèces, que j'ai pu déterminer:

NOTE

des Fossiles du terrain nummulitique supérieur du pied de l'Apennin ligurien.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
POISSONS.			
Carcharodon megalodon Ag.	miocène	Macigno des environs d'Acqui	Argile mioc. du Monferrat et de la colline de Turin; Malte, Dax etc.
— polygyrus Id.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin; mollasse suisse etc.
Oxyrhina Desorii Id.	miocène	Id.	Argile mioc. de la colline de Turin; mollasse suisse etc.
CÉPHALOPODES.			
Nautilus regalis? Sow.	éocène	Marne des Carcare	Terr. éoc. de Grignon, Parnes, Courtagnon, de la Belgique et de Londres; terr. nummul. infér. de Nice; nummul. d'Égypte.
GASTÉROPODES.			
Chemnitzia costellata Lam. (melania)	nummulitique	Id.	Terr. éoc. de Londres; nummul. de Cuise-Lamotte (oise), de Levil près de Castellane; num. infér. de Nice; nummul. moyen du Vicentin, à Ronca, Saugonini; de St-Bonnet et Faudon etc.
Turritella incisa Al. Brongn.	nummulitique	Marne entre Dego et Carcare	Terr. nummul. moy. des Diableretz en Suisse et du Vicentin; fal. bl. mioc. de Dax, de St-Jean-de-Marsac etc.
— strangulata Grat. . .	miocène	Poudingue des Carc.	Terr. mioc. de Dax, Gaas, Lesbarritz etc.
— imbricataria Lam. . .	éocène	Id	Terr. éoc. de Paris; argile de Londres; terr. num. infér. de Nice; moy. de St-Bonnet, en France, etc.
Proto cathedralis Defr. . . .	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin; fal. mioc. de Dax, St-Paul etc.
Scalaria decussata Lam. . . .	éocène	Marne des Carcare	Terr. éoc. de Grignon, Parnes, Chaumont etc.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
Scalaria crispa Lam.	éocène	Marne des Carcare	Terr. éoc. de Mouchy, Grignon, Chaumont en France; de Forêt en Belgique etc.
Natica suessoniensis D'Orb. (spirata Desh.)	nummulitique	Id.	Terr. nummul. de Bethenil, Cuise-Lamotte etc. en France; terr. nummul. moy. de Ronca, Vicentin.
— sigaretina Lam. . . .	éocène	Poudingue des Carc.	Terr. éoc. de Paris, de Londres; nummul. infér. des Corbières, de Nice; nummul. moyen de St-Bonnet, du Véronais et du Vicentin.
— crassatina Desh. . .	miocène	Marne des Carcare	Terr. mioc. infér. de Pontchartrain, le parc de Versailles, Dax, Lespéron (Landes) etc.
Solarium simplex? Bronn. .	miocène	Id.	Pond. mioc. de la colline de Turin.
Delphinula scobina? Brongn.	nummulitique	Poudingue du Dego	Terr. nummul. moyen du Vicentin.
Cypraea inflata Lam.	éocène	Poudingue des Carc.	Terr. éoc. de Grignon, Parnes etc.; argile de Londres; terr. nummul. infér. de Nice; nummul. moyen du Véronais.
— angystoma Desh. . .	éocène	Id.	Terr. éoc. de Chaumont; nummul. infér. de Nice.
— gibbosa Bors.	miocène	Poudingue du Dego	Pond. mioc. de la colline de Turin.
Ancillaria obsoleta Brocc. .	miocène	Marne des Carcare	Pond. mioc. de la colline de Turin; fal. mioc. de Dax etc.
— glandiformis Lam. .	miocène	Poudingue des Carc.	Pond. mioc. de la colline de Turin; marne mioc. de Tortone; Dax, St-Paul, Cassel (Hesse), Vienne.
Voluta harpula? Lam.	éocène	Marne des Carcare	Terr. éoc. du bassin de Paris; de l'Angleterre; de la Belgique.
— affinis Brocc.	miocène	Id.	Pond. mioc. de la colline de Turin.
— depauperata Sow. .	éocène	Id.	Terr. éoc. de Barton en Angleterre.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
Fusus reticulatus Bell. et M.	miocène	Marne des Carcare	Poud. mioc. de la colline de Turin.
— costarius Desh. . . .	éocène	Id.	Terr. éoc. de Retheuil, Cuise-Lamotte etc.
Pyrula condita Al. Brongn.	miocène	Poudingue des Carc.	Poud. mioc. de la colline de Turin; Dax, St-Paul, Bordeaux, Autriche.
Pleurotoma cataphracta Broc.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin; fal. mioc. de Dax; Autriche, Baden etc.
— ramosa Bast.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la coll. de Turin; marne mioc. de Tortone; Dax, Bordeaux.
— labiata Desh.	éocène	Id.	Terr. éoc. du bassin de Paris; nummul. moyen du Vicentin; de Faudon et St-Bonnet (haut.-Alpes).
Cassis calantica Desh.	éocène	Id.	Terr. éoc. de Valmondois.
— variabilis Bell. et M.	miocène	Marne des Carcare	Poud. mioc. de la colline de Turin; marne mioc. de Tortone.
Cassidaria fasciata Bell. . . (Pyr. fasc. Bors.)	mioc. et plioc.	Id.	Poud. et arén. mioc. de la coll. de Turin; sable plioc. de Masserano etc.
Cerithium margaritaceum Br.	miocène	Marne entre Dego et Carcare	Terr. mioc. de Weinheim près Mayence.
— plicatum Lam.	miocène	Id.	Terr. mioc. infér. de Montmorency, de Dax, d'Alzey près de Mayence; nummul. moyen de St-Bonnet et Faudon etc.
— cornucopiae Sow. .	éocène	Poudingue des Carc.	Terr. éoc. de Cottentin, France; argile de Londres; terr. nummul. inf. de Nice etc.
Dentalium grande Desh. . .	éocène	Id.	Terr. éoc. d'Assy-en-Multien, le Tomberay, la Chapelle-en-Serval (oise); nummul. infér. de Nice etc.
ACÉPHALES.			
Teredo tournali? Leym. . . .	éocène	Marne et Poudingue des Carcare	Terr. éoc. de Paris et de la Belgique; nummul. infér. des Corbières, de Nice; nummul. de l'Asie mineure.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
Panopea intermedia Sow. . .	nummulitique	Mollasse des Carcare	Argile éoc. de Londres; terr. nummul. infér. de Nice; nummul. moyen du Vicentin.
Pholadomya Puschi Goldf. .	nummulitique	Id.	Terr. nummul. infér. de Nice, de Biaritz etc.
Anatina rugosa Bell.	nummulitique	Id.	Terr. nummul. infér. de Nice.
Cytherea erycinoides? Lam.	mioc. et plioc.	Poudingue des Carc.	Marne plioc. de l'Astésan.
Venus proserpina Al. Brongn.	nummulitique	Poud. entre Dego et Carcare	Terr. nummul. moyen de Ronca, Vicentin.
— sulcata Nyst. . . .	miocène	Poudingue des Carc.	Terr. mioc. d'Anvers; crag d'Angleterre.
Crassatella scutellaria Desh.	éocène	Id.	Terr. éoc. du bassin de Paris; numm. d'Abbecourt, St-Martin-aux-bois (oise).
Cardita Arduini Al. Brong.	nummulitique	Mollasse des Carcare	Terr. nummul. moyen du Vicentin, Sangonini.
Cyrena convexa Héb. et Ren. (Cyth. Brongn.)	nummulitique	Poud. entre Dego et Carcare	Terr. nummul. moyen de Ronca, dans le Vicentin; de St-Bonnet en France, de Pernant et Entrevernes en Savoie etc.
Lucina grata Defr.	nummulitique	Marne des Carcare	Terr. nummul. de Bracheux, Abbecourt (oise); nummul. infér. de Nice.
Arca hyantula Desh.	éocène	Poudingue des Carc.	Terr. éoc. de Valmondois, Assy-en-Multien, Ermenonville etc.
Pectunculus deletus Sow. . .	éocène	Id.	Terr. éoc. de Barton, en Angleterre; nummul. inf. de Nice etc.
Chama substriata? Desh. . .	éocène	Mollasse des Carcare	Terr. éoc. de Seulis, le Tomberay, Villémetrie en France; nummul. inf. de Nice.
Janira burdigalensis? D'Orb. (Pecten Lam.)	miocène	Macign. près d'Acqui et moll. des Carcare	Terr. mioc. de Bordeaux; poud. mioc. de la colline de Turin.
— arcuata D'Orb. . . . (Pecten Brocc.)	miocène	Arén. de Cascinelle	Poud. mioc. de la colline de Turin.
Pecten laevigatus? Goldf. .	miocène	Poudingue des Carc.	Marne mioc. de la Westphalie.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
Pecten Thorenti D'Arch. . .	nummulitique	Poudingue des Carc.	Terr. nummul. inf. de Biaritz et de Nice; le Vit près Castellane (bass.-Alpes).
— varius Penn.	mioc. et plioc.	Marne des Carcaro	Poud. mioc. de la colline de Turin; marne et sable plioc. de l'Astésan.
Spondylus asperulus Munst.	nummulitique	Poudingue des Carc.	Terr. numm. inf. de Nice; Allemagne, Kressenberg.
— rarispina? Desu. . .	éocène	Poudingue du Dego	Terr. éoc. de Chaumont, le Vivray, en France; de la Belgique; nummul. infér. de Nice.
Ostrea d'Archiaci Bell. . . .	nummulitique	Poudingue des Carc.	Terr. nummul. infér. de Nice.
— gigantica Brand. . .	éocène	Macigno du vallon Verazza près d'Acqui	Terr. éoc. de Paris, de Londres, de la Belgique; nummul. infér. de Nice.
— melania D'Orb. . . . (O. orbicularis Sow.)	nummulitique	Poudingue des Carc.	Terr. nummul. infér. de Nice; nummul. des Indes etc.
BRACHIOPODES.			
Terebratula caput-serpentis? Lam.	miocène	Marne du Dego	Poud. mioc. de la colline de Turin.
— miocenica Micu. . .	miocène	Id.	Terr. mioc. de Serravalle de Scrivia en Piémont.
ÉCHINIDES.			
Clypeaster laganoides Ag. . .	nummulitique	Poudingue des Carc.	Plusieurs localités numm. moyen. de l'Apennin.
EchinolampasLaurillardiiAg.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin; Bordeaux.
CRINOIDES.			
Pentacrinus Gastaldii Mich. .	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin.
FORAMINIFÈRES.			
Nummulites intermedia D'A.	nummulitique	Arén. de Grognardo et poud. du Dego	Terr. numm. inf. de Nice; numm. moy. du Vicentin.
Operculina taurinensis Micu.	miocène	Mollasse de Bana	Arén. mioc. de la colline de Turin.

Genres et Espèces	Age géologique de l'Espèce	Localités apennines	Localités prises pour terme de comparaison
POLYPES.			
Trochocyathus latero-cristatus M-Edw. et Haime	miocène	Poudingue du Dego	Poud. mioc. de la colline de Turin.
Ceratotrochus exaratus M-Edw. et Haime	nummulitique	Mollasse des Carcare	Terr. nummul. infér. de Nice, la Palarea; Indes.
Flabellum costatum Bell. . .	nummulitique	Poudingue du Dego	Terr. nummul. infér. de Nice, foul. Jarrier, la Palarea.
Rhipidogyra lucasana M-Edw. et Haime	nummulitique	Poudingue du Dego et Carcare	Poud. nommul. sup. de Rivalba, Piémont.
Stylocaenia lobato-rotundata M-Edw. et Haime	miocène	Poudingue des Carc.	Poud. mioc. de la colline de Turin; nummul. moy. du Véronais etc.
Montlivaltia detrita M-Edw. et Haime	miocène	Poudingue du Dego	Poud. mioc. de la colline de Turin.
Dasyphyllia taurinensis M-Edw. et Haime	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin.
Oulophyllia profunda M-Edw. et Haime	nummulitique	Id.	Poud. nummul. sup. de Rivalba, Piémont.
Astrea Guettardi Defr.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin; Dax, Bordeaux etc.
Balanophyllia praelonga M-Edw. et Haime	miocène	Poudingue des Carc.	Poud. mioc. de la colline de Turin.
BRYOZOAIRES.			
Lunulites androsaces Micu.	miocène	Id.	Poud. mioc. de la colline de Turin.
PLANTES.			
Fucoides Targionii Ad. Brong.	nummulitique	Mollasse d'Acqui	Calc. marn. nummul. de l'Apennin toscan.

Dans cette note ne sont point comprises toutes les espèces, qui réellement existent dans les localités sus-mentionnées, et que le Musée de Turin possède; car j'ai omis les espèces nouvelles, parceque je désire de mieux les étudier avant de les citer et de les publier; j'ai pareillement omis la citation de plusieurs espèces déjà connues, mais dont à présent je ne possède que des individus d'une mauvaise conservation, et dont la détermination spécifique pourrait être contestée. Quoiqu'il en soit, en accordant aux espèces indiquées dans le catalogue, qui précède, la valeur géologique qu'elles méritent, on voit que les titres paléontologiques en faveur de la distinction de diverses assises dans le terrain nummulitique se trouvent en plus grand nombre au pied de l'Apennin ligurien, que dans les régions mêmes mentionnées par MM. Hébert et Renevier. Dans leur Mémoire ils décrivent 72 espèces entre Annélides, Gastéropodes, Acéphales, Bryozoaires, Echinodermes, Polypiers et Foraminifères, dont 49 proviennent de Saint Bonnet et Faudon dans les Alpes françaises, 11 de Pernant et Entrevernes dans les Alpes de la Savoie, et 43 des Diableretz et de Cordaz dans les Alpes suisses. Or parmi ces 72 espèces il y en a 18 seulement, qui se trouvent aussi dans les sédiments inférieurs du terrain tertiaire moyen ou miocène, tandis que parmi les 80 espèces de notre tableau, il y en a 37 vraiment miocéniques, et des 43, qui restent et qui sont ou éocéniques ou nummulitiques, on en voit quelques-unes, qui appartiennent en même temps aux couches éocènes et miocènes.

Les 38 espèces vraiment miocènes, qui se trouvent dans le terrain nummulitique de l'Apennin ligurien, sont: *Carcharodon megalodon – C. polygyrus – Oxyrhina Desorii – Turritella strangulata – Proto cathedralis – Natica crassatina – Solarium simplex – Cypraea gibbosa – Ancillaria obsoleta – A. glandiformis – Voluta affinis – Fusus reticulatus – Pyrula condita – Pleurotoma cataphracta – P. ramosa – Cassis variabilis – Cassidaria fasciata – Cerithium margaritaceum – C. plicatum – Cytherea erycinoides – Venus sulcata – Pecten laevigatus – P. varius – Janira arcuata – J. burdigalensis – Terebratula miocenica – T. caput-serpentis – Echinolampas Laurillardii – Pentacrinus Gastaldii – Operculina taurinensis – Trochocyathus latero-cristatus – Stylocaenia lobato-rotundata – Dasyphyllia taurinensis – Montlivaltia detrita – Astrea Guettardi – Balanophyllia praelonga – Lunulites androsaces.*

Et il est à remarquer que la plupart des espèces miocéniques susmentionnées se trouvent dans le nombre de celles plus caractéristiques

des arénaires et des poudingues miocènes de la colline de Superga: en effet dans presque toutes les localités fossilifères de cette colline on rencontre: *Turritella strangulata – Proto cathedralis – Solarium simplex – Cypraea gibbosa – Ancillaria obsoleta – A. glandiformis – Voluta affinis – Pyrula condita – Pleurotoma cataphracta – P. ramosa – Cassis variabilis – Cassidaria fasciata – Jouira burdigalensis – J. arcuata – Terebratula miocenica – Echinolampas Laurillardii – Pentacrinus Gastaldii – Operculina taurinensis – Dasyphyllia taurinensis – Oulophyllia profunda – Astrea Guettardi – Balanophyllia praelonga – Lumulites androsaces.*

De plus, quelques-unes des espèces qui se trouvent à la fois dans le terrain nummulitique du pied de l'Apennin ligurien, et dans les assises miocènes de la colline de Superga ont survécu à ces deux périodes, et elles paraissent encore dans les sédiments pliocéniques, et même dans les mers de l'époque actuelle; telles sont le *Pecten varius* et la *Cytherea erycinoides.*

MM. Hébert et Renevier placent dans la zone nummulitique, qu'ils appellent supérieure, S^{t}-Bonnet, Faudon, Pernant, Entrevernes, Diableretz et la Cordaz, sur la considération que dans ces différentes localités abondent les fossiles suivants: *Natica angustata – N. Studeri – Deshayesia cochlearia – Chemnitzia costellata – C. semidecussata – Cerithium plicatum – C. elegans – C. trochleare – C. Castellini – Cyrena convexa – Cytherea Villanovae – Cardium granulosum.* Or, pour démontrer davantage que le terrain nummulitique supérieur de ces savants Géologues n'est pas le même que le terrain nummulitique du pied de l'Apennin ligurien, j'ajouterai que dans la faune de celui-ci je n'ai, jusqu'à présent, trouvé que trois des espèces par eux indiquées, savoir la *Chemnitzia costellata*, le *Cerithium plicatum*, et la *Cyrena convexa.*

Les faits que je viens d'exposer, c'est-à-dire le nombre considérable d'espèces miocènes dans la formation nummulitique de l'Apennin ligurien, le petit nombre d'espèces miocènes et la prépondérance des espèces éocènes dans la formation nummulitique du Vicentin et des localités en France, Savoie et Suisse citées par MM. Hébert et Renevier, enfin la grande différence qu'il y a entre la faune de ces mêmes formations et celle du terrain nummulitique du comté de Nice, de Biaritz, des Corbières etc., m'autorisent, ce me semble, à en déduire les corollaires suivants:

1° Le terrain nummulitique en général appartient à la série des formations éocènes ou tertiaires inférieures.

2° Ce terrain se compose de trois zones, dont deux sont celles que tout récemment MM. Hébert et Renevier ont nommées terrain nummulitique *inférieur* et *supérieur;* mais le terrain nummulitique de l'Apennin ligurien étant plus récent que celui que ces auteurs appellent *supérieur*, il est évident que cette dénomination devra être réservée au terrain nummulitique ligurien et à ses contemporains.

3° Les fossiles de la zone plus ancienne ou inférieure sont représentés par un grand nombre d'espèces propres à ce terrain, ou espèces nummulitiques proprement dites, et par d'autres communes aussi aux sédiments éocènes.

A cette zone on doit rapporter le terrain nummulitique des Corbières, de Biaritz, de Nice sur mer etc.

4° Parmi les fossiles de la zone moyenne (qui correspond au terrain nummulitique supérieur de MM. Hébert et Renevier) il y a un moindre nombre d'espèces propres ou nummulitiques, une grande quantité d'espèces éocéniques et aussi quelques-unes miocènes.

A cette zone appartiennent les sédiments de S^t-Bonnet et Faudon en France, de Pernant et Entrevernes en Savoie, de Cordaz et Diableretz en Suisse, de Roncà, de Castel-Gomberto et de Montecchio maggiore dans le Vicentin etc.

5° Les fossiles enfin de la zone supérieure peuvent être partagés en trois catégories, c'est-à-dire 1° en espèces vraiment nummulitiques, dont les unes sont identiques à celles des deux zones nummulitiques plus anciennes, les autres gisent exclusivement dans cette formation nummulitique supérieure; 2° en espèces éocènes; 3° en une grande quantité d'espèces communes aussi au terrain tertiaire moyen ou miocène.

Dans cette zone supérieure on doit classer le terrain nummulitique d'Acqui, du Dego, des Carcare et des autres régions nummulitiques de l'Apennin ligurien.

La distinction du terrain nummulitique en trois zones n'est pas seulement l'exposition de faits géologiques réels, mais aussi l'expression logique du développement de l'organisation de tous les âges; car le terrain nummulitique ayant commencé l'ère tertiaire, il forme, d'abord, les plus anciennes assises de l'époque éocène; mais pendant cette période, qui fut sans doute assez longue, l'organisation se modifia, et par conséquent

après les couches caractérisées par une prépondérance de ces espèces, que l'on a dit nummulitiques, c'est-à-dire après les couches nummulitiques inférieures, vinrent les sédiments qui, seuls jusqu'à présent, portèrent le nom d'éocéniques, comme ceux du bassin de Paris, les argiles de Londres etc., et auxquels doivent, selon moi, être rapportés les sédiments de la zone nummulitique moyenne, dans lesquels, en effet, au lieu des espèces nummulitiques proprement dites, abondent les éocéniques; enfin la période éocène touche son terme, et aussitôt la faune commence à prendre le *facies* de l'époque miocène, et à en présenter les premières formes organiques; d'où il suit que, dans la zone nummulitique supérieure, au milieu d'un reste d'espèces éocènes et de quelques nummulitiques, on trouve un nombre considérable de miocènes.

En conclusion, le terrain nummulitique, à en juger d'après les données paléontologiques, ne saurait être que le terrain éocène, à partager en trois formations, inférieure, moyenne et supérieure, correspondantes aux trois zones nummulitiques, dont il a été question jusqu'ici.

MICROMYCETES ITALICI

NOVI

VEL MINUS COGNITI

AUCTORE

JOSEPHO DE NOTARIS

Exhib. 16 decembris 1855.

DECAS IX.

1. *Hypoxylon nummularium.*
2. *Melogramma vagans.*
3. *Sphaeria sordaria.*
4. *Sphaeria nuclearia.*
5. *Sphaeria umbrinella.*
6. *Sphaeria Unedonis.*
7. *Sphaeria doliolum conoidea.*
8. *Sphaeria herpotricha.*
9. *Sphaeria pleuronervia.*
10. *Dothidea etrusca.*

1. Hypoxylon nummularium.

Bull. tab. 468. fig. 4. Fries Summ. vegetab. Scandin. 3. p. 384.

Sphaeria nummularia DC. — Fries Syst. 2. p. 348 (excl. forte Syn. Todei). Duby Bot. gall. 2. p. 682. Wallr. Fl. crypt. germ. 2. p. 853. Montagn. in Merat. Fl. paris. ed. Bruxell. 1841. 1. p. 228. Berkel. Brit. fung. p. 240.

Sphaeria anthracina Schm. in Schm. et Kuns. Mycol. heft. 1. p. 55. tab. II. fig. 14. et II. tab. 1. fig. 16.

Sphaeria orbicularis Pers. ex Fries l. c.

Ad ramulos Fagi emortuos in sylvis Apennini bobbiensis, secundum specimen a cl. Vincentio Cesati. Rara hucusque avis apud nos.

Oculo inermi exhibet crustulas applanatas, plerumque orbiculatas, vel oblongatas, reniformes interdum, sine ordine in ramorum pancorum annorum superficie dispersas, coloris atro-picei, millimetrum crassitie vix excedentes, sex, octove millimetra diametro aequantes, vel longitudine, in oblongatis, centimetrum integrum metientes.

Corticis strata, cujus in superficie haec species evolvitur, inquinamento fuliginco amorpho compenetrantur, et ex eo originem ducunt lineolae illae fuscescentes, quae inter strata corticis ipsius flexuose excurrentes observantur, stromatis fructigeri radices, ut ita dicam, efficientes. Stroma initio epidermide tectum, mox nudum, discoideum, oblongatum, vel reniforme, super epidermidis ambientis limbum paullulum eminens, matrici arcte haerens, planum, vel ex ramorum forma lenissime arcuatum, ambitu obsolete marginulatum, disco fusco-atrum, ex ostiolis insculptorum pyreniorum protuberantibus, sub lente hic illico, minute elevato-punctatum, et insuper sub vitris acrioribus veluti furfura tenuissima, cinereo-fuscescente inspersum, intus saturate fuliginco-fuscum, loculisque innumeris pyrenia excipientibus excavatum. Stromatis compago densa, fragilis, fere carbonacea, praesertim in ejus superficie, e cellulis minutissimis arcte cohaerentibus, aegre sub vitris fortioribus conspicuis. Pyrenia fuscescentia, pleraque ovata, ovatove-rotundata breviter apiculata, ad latera plus minusve compressa, varia, ob varias quas patiuntur pressiones, humecta molliuscula, intus strato subceraceo pallido, tenui obducta ex quo asci, paraphysesque enascuntur, in collabescentia subchartacea. Pyreniorum apex attenuatus ad superficiem usque stromatis producitur, ex quo puncta prominentia disci stromatis oriuntur, poro exiguo pertusa, quae oscula pyreniorum sistunt. Asci ex tota interiore pyreniorum pariete oriundi, creberrimi, e basi attenuata cylindracei, obtusi, primum farcti nucleo lutescente fere oleaginoso, in quo sporidia evolvuntur, sporidiisque maturis, demum evanido. Sporidia in unoquoque asco normaliter octo, simplicia, ellipsoidea rotunda, vel subsphaeroidea, rarius pyriformia, maturitate badio-fusca, vix translucida, episporio chartaceo colorato instructa. Paraphyses filiformes, flaccidae, tenues, copiosissimae, invicem saepe cohaerentes, humore grumoso, lutescente foetae.

Pyreniorum nonnulla interdum obliterata observantur.

Sphaeria bullata (Micromyc. ital. dec. VIII. n. 2. tab. IV. fig. 2)

stromatis figura et colore huic quadantenus similis, spectat ad genus Diatrype celeb. Friesii et ab hac prae caeteris sporidiis minutis, cylindraceis, pallidis facillime distinguitur.

Synonymon Micheli; *lichen agaricus crustaceus niger et veluti deustus, sub soluta castanearum cute innascens et late se diffundens*, a cl. Friesio huc relatum, mihi Sphaeriam stigmam vel eius varietatem indigitare videtur.

Sphaeria macula Todei (Fung. mecklenburg. II. p. 33. fig. 106) a Friesio huc pariter citata, quae *maculas atras satis magnas nonnullarum unciarum mensura, figura varias, plerumque rotundatas e fissa ac revoluta epidermide emicantes*, reliquis omissis, speciem a Sphaeria nummularia alienam me judice sistit, quod celebr. Todei ipsius verbis, *Sphaeriam stigmam admodum cum Sphaeria macula congruere*, etiam confirmatur.

EXPLICATIO ICONIS I.

1. Fragmentum ramuli exhibens speciei nudo oculo inspectae figuram.
2. Sectio verticalis acervuli seu stromatis secundum ejus diametrum lentis ope auct.
3. Segmentum stromatis lente auct. exhibens ejus superficiem in qua ostiola pyreniorum protuberant.
4. Pars nuclei ad augm. 300 diametr.
5. Asci, *a.* junior, *b.* perfectus, ad augm. 700 diametr.
6. Pars asci cum sporidiis aliquot ad augm. 1000 diametr.

2. Melogramma vagans.

Melogramma . . . . . Fries Summ. vegetab. Scand. 2. p. 386.

Variolaria melogramma Bull. — Balb. Miscell. bot. p. 54. Pollin. Fl. veron. III. p. 763.

Sphaeria melogramma Pers. Syn. fung. p. 13. Fries Syst. 2. p. 240. Scleromyc. Suec. n. 441 ! Duby Bot. gall. 2. p. 692. Wallr. Fl. cryptog. germ. 2. p. 843. Montagn. l. c. p. 236. Berkel. Brit. fung. p. 255.

Sphaeria ocellata Pers. Dispos. p. 2.

Frequens in superiori Italia ad ramos arborum variarum emortuos. Ipse pluries legi in ramis Robiniae pseudacaciae circa Taurinum, ad ramos querneos in agro mediolanensi, alibique. Cl. De Berenger reperit in sylva *di S. Marco* in agro tarvisino ad Carpini Betuli ramos.

Quod ad adspectum comparari potest haec species cum Sphaeria fusca vel disciformi, vel ob crescendi modum, vel ob dimensionem et colorem acervulorum, qui per plagas saepe latissimas ramorum superficiem tenent.

Pyrenia parva, subrotunda, pleraque vertice papillata, vel obtusa, collabescendo umbilicata, poro, si quis adest, haud conspicuo pertusa, fuscescentia, opaca, sub lente rugulosa, in disco stromatis discoidei vel pulviniformis caespitantia, simulque, praeter summum verticem liberum, connata, cum stromate ipso fere suberoso, fusco, cortici adnato, acervos superficie granulatos sistentia. Acervuli isti primitus tecti, sparsim vel seriatim, epidermide laciniatim fracta, mox erumpunt, primum ex velo veluti farinoso, ut in sphaeria disciformi, griseo-canescentes, adulti fusco-nigricantes, cultroque ope ad perpendiculum secti, pyrenia in stromatis superficie insculpta conspiciuntur, ullo modo a stromate ipso, vel invicem separabilia, loculorum genuinarum Dothideārum ad instar, a quibus tamen differunt, ex eo quod loculi Dothideārum lacunas in stromatis substantia excavatas sistunt, nullis extantibus pyreniis. Nucleus gelatiniformis, pallide-fuscescens, ascis compluribus paraphysibusque compositus, e strato tenui subceraceo pyreniorum parietem obducente, oriundis. Asci juniores oblongati, substantia fere grumosa lutescente foeti, perfecti e basi plus minusve attenuata clavato-oblongi, octospori. Paraphyses filiformes, crassiusculae, flaccidae. Sporidia juniora plerumque teretiuscula, nucleos binos ut in icone 3 a lutcolos foventia, matura ex fusiformi-lunulata, distincte quadrilocularia, nucleis fuscescentibus, subsidendo varie sinuosis, lacunosisve.

Genus Melogramma a summo Friesio conditum ad typum hujus speciei admittendum esse nullus dubito, mihi vero adhuc latet quo nomine in Summa vegetab. l. c. haec species a Friesio distinguatur, quamobrem, ob cubilium varietatem, *vagantem* nuncupavi.

Specierum huicce generi ab ipso Friesio subscriptarum mihi tantum cognita est Sphaeria polita (Melogramma politum Fries), quae, ex particula speciminis Schubertiani a celeb. Kunzeo olim benevole misso, me judice, a typo Melogrammae vagantis valde recedit et ab hoc genere certo certius excludenda est. Sphaeria polita Schubertiana ascis caret, et sistit vel speciem nondum perfectam, vel individua, sensu Tulasnei, spermatifera alius speciei ex nucleo celluloso, corpuscula exigua, cylindraceo-oblonga, tremula, hyalina proferente.

EXPLICATIO ICONIS II.

1. Acervula duo ad perpendiculum secta decies circiter aucta.

2. Pars nuclei ad augment. 400 diametr.

3. Sporidia nonnulla ad augment. 700 diametr. quorum alter *a.* ex asco juniore depromtum.

3. Sphaeria sordaria.

Fries Syst. 2. p. 458. Sclerom. suec. n. 270! El. fung. 2. p. 94. Summ. vegetab. Scand. 2. p. 389. Berkel. Brit. fung. p. 265.

Ad palos semiputres in Horto Botanico taurinensi, toto anno.

Ut verbis utar celeberrimi speciei conditoris, *nudo oculo sordem nigram modo refert*, asperginem revera atramentosam super cubilia praebet.

Pyrenia exigua, atra, opaca, ligno denudato plerumque canescente adnata, superficialia, libera, per greges plus minusve numerosas, absque lege dispersas, conferta, subinde connascentia, rarius solitaria, ex vertice obsolete acutato, sphaeroideo-subconica, poro minutissimo, vix lentis ope conspicuo, in vertice ipso pertusa, sub acrioribus vitris tota superficie, papillis exiguis, fuscis, piliformibus hirtula, in sicco vix collabescentia, demum varie rupta, vel a basi circumscissa. Nucleus e strato tenui subceraceo pallescente parietem internam pyreniorum obvestiente oriundus, ascis paraphysibusque numerosis compositus, humectus gelatiniformis, leviter fuscescens, vel potius ex sporidiis minutissime fusco-punctulatus. Asci teretiusculi, octospori, obtusi ob sporidia uniserialia moniliformia, juniores nucleo lutescente grumoso farcti. Paraphyses copiosissimae, filiformes, implexae. Sporidia ovoidea, simplicia, laevia, episporio demum badio-fuscescente, subchartaceo instructa, ex nucleo homogeneo demum subsidente intus fere vacua.

Fructificatio in speciminibus Friesianis, superius citatis, omnino ut in nostris! quo charactere, ab affinibus, Sphaeria obducens, pulvis pyrius ejusque varietates, reliquis omissis tute distingnitur.

Species memorabilis praesertim ob characteres fructificationis, quo sub respectu, vel asecrum, vel sporidiorum nempe figura, colore et dimensionibus vix a Sphaeria nummularia distingnitur. Hac specie sat superque demonstratur, notas e sporidiis tantum depromptas, in pyreno-

mycetibus ascigeris, ad genera fulcienda impares esse, nam in praesenti, sub eodem genere colligendae essent Sphaeria nummularia et sordaria, quae tot characteribus naturalibus insigniter differunt, similitudinem, ne dicam identitatem, sporidiorum harum specierum perpendenti, statim animo quaestio occurrit, num in Sphaeriaceis, eadem species, pro diversitate vel cubilium, vel aetatis, vel momentorum quae horum fungillorum evolutionem patrantur, duplici sub adspectu se prodat. Cf. etiam observationem ad Sphaeriam Unedonis.

EXPLICATIO ICONIS III.

1. Frustulum matricis cum pyreniis aliquot viceties circiter auctis, quorum bina ad perpendiculum secta.
2. Pars nuclei ad augment. 400 diametr.
3. Ascus cum sporidiis perfectis ad augm. 700 diametr.

4. Sphaeria nuclearia.

In putaminibus putrescentibus fructuum Oleae, in olivetis *di S. Remo* in Liguria occidentali, legit cl. Pharmacopola Franciscus Panizzi.

Nudo oculo vix distinguenda a Sphaeria mastoidea et ab affinibus sectionis pertusarum celeberr. Friesii.

Pyrenia e basi applanata cubilibus nigrescentibus leviter insculpta, discreta vel in parvas greges conferta, e basi dimidium millimetrum diametro attingentia, hemisphaerico-conoidea, acuta, vel attenuato-apiculata, sub lente rugulosa, aterrima, apicem versus saepius nitidula, carbonacea, crassiuscula, fragilia, senio circumscissa, vel apice secedente perforata. Nucleus albido-fuscescens, subgelatiniformis, in sicco collabescens albidus. Asci copiosi, juniores oblongati, nucleo grumoso lutescente farcti, demum plerumque octospori, sed sporidiis maturescentibus cito evanidi, quapropter sporidia ipsa inter paraphyses dispersa ut plurimum inveniuntur. Paraphyses tennissimae, numerosissimae, filiformes, ascis longiores, muco coalescentes. Sporidia matura oblonga, rarius ovato-oblonga, vel nonnisi imperfecta, subreniformia, quadriloculuria, ad dissepimenta leniter saepe constricta. Articuli vel loculi eorundem polares intermediis demum badio-fuscis, prorsus opacis, breviores pallidioresve.

Materies stromatica ad cubilium superficiem effusa, cubilia ipsa etiam

subinde compenetrat. Apex pyreniorum sub vitris etiam fortioribus impervius videtur.

A Sphaeria mastoidea Friesiana (Syst. mycol. 2. p. 463) ex specimine a cl. Desmazierio editis (Pl. cryptog. de Franc. ed. II. n. 771) a nostra perbelle distinguitur sporidiorum structura, quae in mastoidea, ut in icone nostra IV. fig. 4, dimidio saltem minora, et insuper trilocularia tantum, nucleis hyalino-luteolis, ascisque creberrimis cylindraceis.

Specimina a clariss. Dubyo benevole missa sub nomine Sphaeriae mastoideae, sistunt speciem a Friesiana et a nuclearia nostra aeque alienam, praesertim sporidiis oblongo cylindraceis, leniter curvulis, quadriloculatibus, nucleis hyalinis margine diaphano limbatis, ut in tabula nostra IV. ic. 5. Est mihi Sphaeria Dubyi.

Cum memorabili denique Sphaeria putaminum Schweinitzii (Carol. 163. Fries Syst. 2. p. 461) cuius specimulum a clariss. reverendoque Berkeleyo accepi, Sphaeria nuclearia nullam affinitatem portendit. Sphaeria putaminum exhibet pyrenia grandia, hemisphaerico-papillata, fundo plana, ex quo oriuntur sporidia magna, nudo etiam oculo visibilia, ellipsoideo-lanceolata, utrinque nempe attenuato-acutata, fusca, opaca, episporio crustaceo fragili praedita, nucleos binos rotundatos, amplos, hyalinos, crasse corticatos foventia, facillime, ruptura episporii, e sporidiis eliciendas. Asci in hac specie deesse videntur. Mihi typus novi generis *Caryospora* ex sporidiorum figura nuculas ellipsoideo-fusiformes quadantenus aemulans, hisce notis distinguendum: pyrenia libere evoluta, fragilia, e basi applanata adnata, hemisphaerico-umbonata, apice ostiolo amplo hiantia. Asci nulli. Sporidia e pyrenii fundo oriunda maxima, ellipsoideo-fusiformia, episporio fusco, opaco, crasso, crustaceo, fragili praedita, nucleos binos rotundatos, endosporioque hyalino crasso corticatos foventia.

EXPLICATIO ICONIS IV.

1. Pyrenia aliquot, quorum alter ad perpendiculum secundum diametrum sectum, viceties circiter aucta.

2. Pars nuclei ad augment. 400 diametr.

3. Sporidia nonnulla ad augment. 700 diametr. quorum bina tinctura fuscescente colorata, qua exhibetur differentia in articulorum coloratione superius notata.

4. Apex asci cum binis sporidiis Sphaeriae mastoideae ex specimine Desmazieriano, ad augm. 700 diametr.

5. Apex asci cum binis sporidiis Sphaeriae Dubyi ad augm. idem.

5. Sphaeria umbrinella.

In cortice truncorum castanearum annosarum dealbato, in sylvis montanis ad Feritorem supra Genuam.

Facies Sphaeriae umbrinae Friesii, de qua confer. Micromycet. italicorum decadem II. n. 2. tab. I. fig. 2, sed pustulae nigrescentes, convexae, ostiolo erumpente mammillatae, numquam areolam depressam circa ostiolum exhibentes.

Pyrenia omnino cortici insculpta, sed collo eorundem cubilium orbem qua teguntur, in pustulas convexas fere clypeiformes, ob humorem fuligineum e pyreniorum vertice exsudantem cinereo-nigricantes, attollentia, plerumque distantia, sparsa, rarius per paria conjugata, sphaeroidea, diametro millimetrum fere aequantia, humecta submollia, atra, ambitu halone fuscescente cincta, vertice in collum conoideum, pyreniis ipsis multoties brevius producta. Ostiolum papillaeforme, poro exiguo hians, mammillae ad instar in pustularum nigricantium vertice eminens. Nucleus e strato tenui subcoriaceo, pallescente, parietem fere integram pyreniorum vestiente oriundus, ascis copiosis paraphysibusque filiformibus, flaccidis, guttulas oleagineas foventibus compositus. Sporidia juniora in ascorum sacco interiore humorem pallidum sublutescentem excipiente, sub forma bullarum oblongatarum se praebent, dein sensim sensimque ampliata, humore matricali ex integro fere resorpto ad maturitatem perducuntur, simulque colorem fusco-fuligineum inducunt. Sporidia matura ellipsoidea, diametro duplo longiora, utroque apice papilla hemisphaerica, exigua, diaphana, decolore appendiculata, episporio fragili fusco-fuligineo, parce translucido instructa. Nucleus homogeneus facile collabescens, ex quo nucleus ab episporio solutus vel lacunae forma variae saepius in sporidiorum cavitate observantur.

A Sphaeria umbrina differt pustulis in cubilium superficie protuberantibus, numquam vertice circa ostiolum circulari-impressis, et in primis sporidiis ellipsoideis, unilocularibus, utroque apice mammilla diaphana auctis. Sporidiis quoque a pulcherrima Sphaeria olearum clariss. Castagnei (cf. Micromyc. ital. dec. VI. n. 6. tab. I. fig. VI.) quammaxime differt.

EXPLICATIO ICONIS V.

1. Particula corticis exterioris Castaneae exhibens duo pyrenia secus axim secta, sexies circiter aucta.

2. Pars nuclei ad augm. 410 diametr.

3. Sporidia, quorum *a.* juniora ad augm. 700 diametr.

6. Sphaeria Unedonis.

In cortice truncorum Arbuti Unedonis in sylva *allo Scoglietto* Genuae.

Praecedenti adeo similis, ut, neglectis characteribus e Sporidiorum figura, vix ab ea distingui mereatur. Ratione crescendi, habitatione in corticis squamis superficialibus siccis, pyreniorum forma, ad unguem inter se conveniunt hae duae species. Adsunt tamen notae nonnullae, quae characteribus e fructificatione junctae, Sphaeriam Unedonis propriam autonomamque esse speciem significare videntur. Pyrenia illis prioris speciei paullulum minora, minus profunde in matrice demersa, at parcius protuberantia ex eorundem collo breviore, ambitu materiem stromaticam vix exsudantia. Asci in hac quoque specie e strato proligero tenui parietali exorti, elongati e basi breve attenuata cylindracei, obtusi, sed paraphysibus filiformibus, implexis, tenuissimis, guttulis perexiguis oleagineis foventibus, obvallati. Sporidia eodem modo evoluta, sed ad maturitatem ellipsoideo-oblongata, diametro triplo longiora, simplicia, exappendiculata, badio-fuscescentia, parce translucida, caeterum nucleo simplici, saepe collabescendo lacunoso, vel sublobato farcta.

Species ex clariss. Montagne (cf. Castagn. Suppl. catal. pl. marscill. p. 48) accedens ad Sphaeriam Oxyacanthae, Phillyreae, et syciospernam, ob sporidiorum simplicium colorem, sed ab hisce omnibus abunde diversa, pyreniis cubilibus insculptis, ostiolo papillaeformi exiguo tantum erumpente.

Sphaeria umbrina, Olearum, umbrinella, Unedonis, quibus in posterum et aliae accedant species, pugillum specierum sistunt magni ponderis, ni fallor, in aequa aestimatione characterum qui in novis exstruendis Sphaeriaceearum generibus eligendi sunt. Hae pulchrae species, numquam in systemate naturali divellendae, eosdem mores, eandem faciem, eandem pyreniorum figuram et structuram praebent, sporidiisque tantum, in

Sphaeria umbrina et Olearum bilocularibus, in umbrinella et Unedonis simplicibus discriminantur. Solis igitur sporidiis in hac etiam grege genera condi nequeunt, nisi artificialia naturalibus anteponere velimus.

Notae essentiales hisce speciebus communes sunt; pyrenia simplicia, stromate communi nentiquam innascentia, nucleus e strato proligero, sive hypothecio peripherico orinndus, ascis octosporis, paraphysibusque compositus, sporidiorum gradata evolutio in protoplasmate lutescente, ascos occupante, episporio subpapyraceo fuligineo-fusco instructa. Hisce perpensis, mihi iterum videtur, signa generica sphaeriacearum genuinarum, praecipue quaerenda esse in compage penitiori pyreniorum, in extensione stratus proligeri, qui nunc parietalis, nunc basalis tantum, in sporidiorum structura, quae episporio hyalino vel fuligineo instruuntur, itidemque nucleo decolore vel plus minusve colorato. Hisce neglectis pro sporidiorum loculamentis, figura, vel appendiculis, tot genera quot sunt innumerae sphaeriarum simplicium species, praeter propter condenda erunt. Huc pariter citandae Sphaeria mastoidea, nucleria et Dubyi.

EXPLICATIO ICONIS VI.

1. Pars nuclei ad augm. 400 diametr.

2. Sporidia nonnulla, quarum bina nondum perfecta ad augm. 700 diametr.

7. Sphaeria doliolum conoidea.

Sphaeria doliolum Desmaz. Pl. cryptog. de Franc. ed. II. n. 984.

In caulibus herbarum emortuarum, in sylvis agri Tarvisini legit clariss. De Berenger.

Minimarum Sphaeriarum simplicium, superficialium faciem portendit, punctiformis nempe et valde enitens.

Pyrenia superficialia, primitus epidermide tecta, sed statim liberata, nuda, aterrima, nitidula, sparsa, plus minusve per plagas numerosa, plerumque discreta, vel vario modo per paria, plurave coadunata, e basi applanata conoideo-hemisphaerica, dimidium millimetrum diametro vix aequantia, vertice ostiolo papillaeformi instructa, sulcis 2, 3, raro pluribus, plus minusve extantibus concentrice impressa, pulchreque veluti tomata, senio collabescendo depressa, scutiformi-umbonata. Pyrenia qua parte matrici haerent tenuia, caeterum compaginis sat firmae, coriacea,

e cellulis obscuris, vitris acrioribus vix percipiendis contexta, e fundo tantum fructigera. Nucleus madore gelatiniformis, fuscescens, subdisciformis, constat hypothecio subceraceo, pallido, concavinsculo, et exinde in ambitu eius a pyrenio fundo saepe discreto, facie superiore ascos paraphysesque edente. Asci creberrimi, verticales, recti, ascendentesve, e pede calli instar plerumque incrassato, attenuato-cylindracei, obtusi, juniores nucleo lutescente foeti, demum octospori. Paraphyses filiformes, tenuissimae, humore lutescente farctae, ascos excedentes saepius, superiori parte, vage ramosae. Sporidia subfusiformia, recta, vel leviter subinde curvula, diametro sextuplo saltem longiora, quadriloculuria, ad dissepimenta lenissime contracta, loculis polaribus conoideis, superiore quidquam ut plurimum robustiore, mediis aequalibus vel vulgo horum superior inferiore paullo major, matura fuligineo-lutescentia diaphana.

Sphaeria doliolum Persoonii (Icon. et descript. 2. p. 39. tab. 10. fig. 6) mihi obvia in caulibus siccis praesertim Urticae in agro Taurinensi, distinguitur ab hac pulchra varietate, pyreniis paullo maioribus et ut in Persoonii icone et descriptione adducta, subconico-teretes nec conoideo-hemisphaericis et insuper sporidiis paullo maioribus!

Huc, me judice, ducenda est, ex specimine a celeb. Kunzeo, olim misso, Sphaeria suffulta Neesii (Fries Syst. 2. p. 508), quae, ni fallor, a Sphaeria doliolo nulla nota essentiali differt.

EXPLICATIO ICONIS VII.

1. Pyrenia 20 circiter aucta.
2. Eadem verticaliter secta ad idem augm.
3. Pars nuclei ad augm. 400 diam.
4. Asci, junior et perfectus, ad augm. 700 diam.
5. Sporidia ad idem augm.

8. Sphaeria herpotricha.

Fries Syst. II. p. 504. Scleromyc. suec. n. 52! Summ. vegetab. Scandin. 2. p. 393. Wallr. Fl. cryptog. german. 2. p. 274. Montagn. l. c. 1. p. 244. Desmazièr. Cryptog. de Franc. ed. 2. n. 783!

Ad culmos triticeos putrescentes in tectis mapaliarum prope S. Siro ad Feritorem, supra Genuam.

Obvia in primis in culmorum partibus quae vicissitudinibus atmosphaericis expositae sunt. Exigua, primitus epidermide tenui culmorum obtecta, mox vero, hac perfossa, emergens, demum ex integro liberata, nuda, vel fortuiter frustulis epidermidis subinde inspersa. Pyrenia in cubilibus fuscescentibus numero varia, plus minusve nempe copiosa, pro more discreta, sed et geminata occurrunt, vel per paria simul intime concrescentia, e basi, filamenta fuscidula, tenuissima, super cubilia instrata, edente, sphaeroidea, diametro vix millimetri tertiam partem excedentia, vertice ostiolo conoideo, obtuso, minuto, glabro, papillari umbonata, caeterum tota superficie, villo brevi, denso, ferrugineo-fusco, subcrispulo hirsuta, quasi spongiosa, in sicco fragilia, senescendo varie collapsa, vel diffracta. Nucleus madore gelatiniformis, pallide fuscescens, ascis creberrimis, paraphysibusque e strato tenui subceraceo hemisphaerium inferiorem pyreniorum obvestiente enascentibus constans. Asci elongati, clavati, suboctospori. Paraphyses pertenues, filiformes, simplices, ascos longitudine excedentes, guttulas humoris lutescentis foventia. Sporidia filiformia, ascos longitudine fere aequantia, in fasciculum collecta, primitus guttulis humoris oleaginosi, discretis foeta, demum multilocularia, nucleis pallide lutescentibus, ascorumque membrana ab apice ad basim evanescente liberata.

Pyrenia in cubilium superficie variant perpendicularia vel obliqua, quod sane parvi momenti, et facile a matrice solvuntur.

Pyrenia sub graminum vaginis *quibus innata*, *libere vegetantia*, ut in Friesianis, in nostra, quae omni numero cum specie a cl. Desmazierio edita convenit, non observantur. Caeterum fructificatio omnino eadem ac in speciminibus Friesii, praeeunte clariss. Desmazierio specici characteres in pyreniorum sporidiorumque structuram quaerendos esse censeo.

Sphaeriae simplices pyreniis extus hirsutis vel quomodocumque villosis, gaudentes, quod ad species a me hucusque visas, praebent fere semper sporidia teretiuscula plus minusve elongata.

EXPLICATIO ICONIS VIII.

1. Pyrenia perfecta vicecies aucta.
2. Pyreniorum par ad perpendiculum sectorum ad idem augmentum.
3. Pars nuclei ad augm. 400 diametr.
4. Ascus ante sporidiorum maturitatem ad augm. 700 diametr.
5. Sporidia perfecta ex asci summitate erumpentia ad augm. 700 diametr.

9. Sphaeria pleuronervia.

In foliis Quercuum variarum deiectis in agro mediolanensi, et in sylvis collium genuensium frequens.

Praebet bullas convexas, punctiformes, fuscescentes, vel nigrescentes, cum vel absque nitore, secus foliorum nervulos dispersas, et in alterutram foliorum paginam plus minusve protuberantes.

Pyrenia exigua, globoso-depressa, vel lenticulari-rotundata, nigrescentia, astoma, sparsa, rarius per paria vel majori numero adproximata, in foliorum parenchymate insculpta, utrinque epidermide limitata, et cum ea iuxta pyreniorum ipsorum orbem, plus minusve nigrescente super alterutram vel in utraque simul foliorum superficie protuberantia. Pyrenia, quod ad compaginem, subcoriacea, struuntur cellulis perexiguis, valde irregularibus, fuscescentibus, parce translucidis. Nucleus albidus subpulveraceus, pyreniis quoquomodo ruptis, pulvisculi ad instar tenuissimi paullatim secedens, ascis numerosissimis, liberis, coacervatis, absque paraphysibus constans. Asci octospori plerumque, sed eorum membrana vix nisi apice distincta conspicua. Sporidia subfusiformia, recta vel plerumque curvula sublunulata, primum distincta quadrilocularia, nucleis hyalinis, demum bilocularia, nucleis polaribus cum intermediis fere confluentibus.

Ostiolum nullum in pyreniis deprehendere contigit. Sporidia episporio tenuissimo diaphano donantur, nisi sub quibusdam lucis inflexionibus perspicuum. Asci formantur, ut videtur, completa metamorphosi nuclei pyrenia primitus occupantis, nec ex pyreniorum parietibus enascuntur.

A Sphaeria punctiformi (Fries Scleromyc. succ. n. 50) et affinibus toto coelo diversa, tum mole, cum crescendi modo pyreniorum et nuclei forte structura, nam in punctiformi ascos hucusque non vidi.

EXPLICATIO ICONIS IX.

1. Particula folii perpendiculariter secta, pyrenii figuram exhibens viceties circiter aucti.

2. 3. Pyrenia cum cubilibus ad perpendicum et juxta diametrum secta ad idem augmentum.

4. Portiuncula parietis pyrenio ad augm. 700 diametr.

5. Asci et 6. sporidia ad idem augmentum ac praecedens.

10. Dothidea etrusca.

In ramulis emortuis vel languescentibus Loniceræ etruscæ, secus aquæductum genuensem prope *Molasana*.

Prima fronte Dothideárum genuinarum vix faciem præbet, nudoque oculo sistit pustulas atras, parvas, punctiformes, discretas, vel seriatim dispositas, in rimis corticis longitudinaliter fissi nidulantes.

E stromate hypophlæode, cellnloso, tenui, tincturæ fusco-fuligineæ instar, ligni superficiem ambiente, hic illic exseruntur conceptacula, primum tecta, cortice deinde rimis longitudinalibus fisso, vertice denudata, sed labia rimarum ipsarum vix excedentia. Conceptacula (stroma Fries) discoidea, vel a basi plus minusve angustata, obverse conoideo-truncata, atra, absque nllo nitore, dimidium millimetrum diametro vix æquantia, disco plana, depressa, vel ambitu interdum circum circa elevato, quasi margine prominente cincta, supatellaria, minutissime sub lente rugulosa, nullis vero ostiolorum vestigiis extantibus, solitaria, rotundata, vel 2, 3, 4 contigua in series longitudinales erumpentia, horumque intermedia ob mutuam pressionem subquadrata. A vertice ad basim secta, statim sub disco conspicias loculos fructigeros, in seriem simplicem horizontalem dispositos, rotundatos, parvos, albicantes, in gleba conceptaculorum excavatos, discretos vel per paria, pluresve simul confluentes, ex quo cum loculis normaliter rotundatis aliquot simul non raro deprehenduntur transverse elongati, cæteris multo ampliores. Gleba conceptaculorum ut in reliquis generis speciebus nigrescens, constat utriculis in ambitu ipsorum conceptaculorum fusco-atris, stipatis, vix perspicuis, in centro vero et circa loculos fructiferos, amplioribus, subrotundis, dilutioribus, præsertim si frustula tenuia glebæ sub vitris fortioribus lustrantur Loculi nucleum hyalinum, humiditate subgelatinosum fovent, ascis creberrimis e fundo loculorum exsilientibus compositum. Paraphyses nullæ. Asci e basi plus minusve attenuata, subinde filiformi, cylindracei, obtusi, erecti, vel adscendentes, juniores humore homogeneo pallide luteolo foeti, maturi plerumque octospori. Sporidia parva, oblongata, diametro triplo longiora, distincte bilocularia, apicibus obtusa, recta, vel latere altero convexiore lenissime curvula, nucleo homogeneo, pallide lutescente farcta.

Conceptaculorum structura, loculorum fructigerorum dispositione,

ascis, sporidiisque, crescendi modo, cum genuinis hujusce generis speciebus apprime congruit (cf. Micromycet. ital Dec. I. n. 8. 9, Dec. V. n. 7). Notis superficialioribus, nempe magnitudine conceptaculorum et forma, accedit ad Dothideam sphaeroidem, et pyrenophoram, sed structura conceptaculorum, characteribusque fructificationis ab hisce speciebus, ni fallor, valde differt. Loculi conceptaculorum in Dothidea pyrenophora (Scleromyc. succ. n. 129. 452) ampliores, saepe in unicum confluentes, glebamque integram explentes, in omnibus a me visis, scatent nucleo grumoso ex myriade corpusculorum ellipsoideorum constante. Dothidea sphaeroides (Scleromyc. succ. n. 434. Desmaz. Pl. sicc.) a pyrenophora vix differt.

EXPLICATIO ICONIS X.

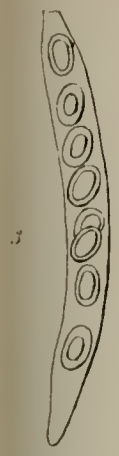
1. Receptacula bina verticaliter secta vicecies circiter aucta.

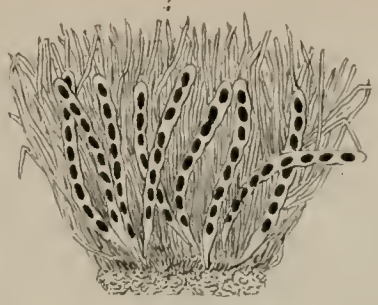
2. Segmentum receptaculi ad perpendiculum secti, ad augm. 100 diametr., quo structura cellulosa receptaculi ipsius demonstratur.

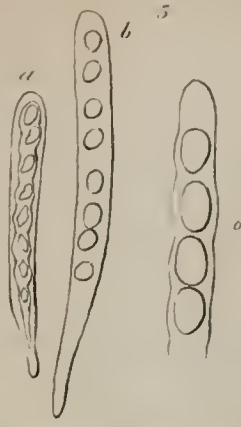
3. Pars nuclei ascos exhibens ad augm. 400 diametr.

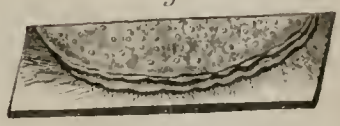
4. Sporidia ab ascis ejecta ad augm. 700 diametr.

I.a



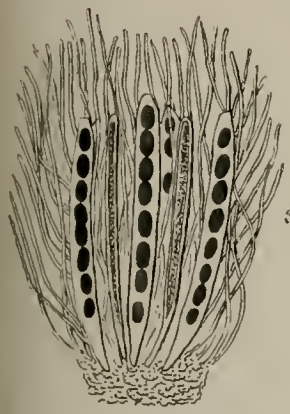


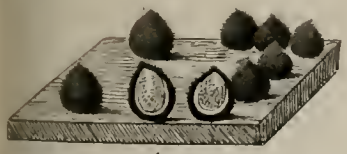




Hypoxylon nummularium

III.a



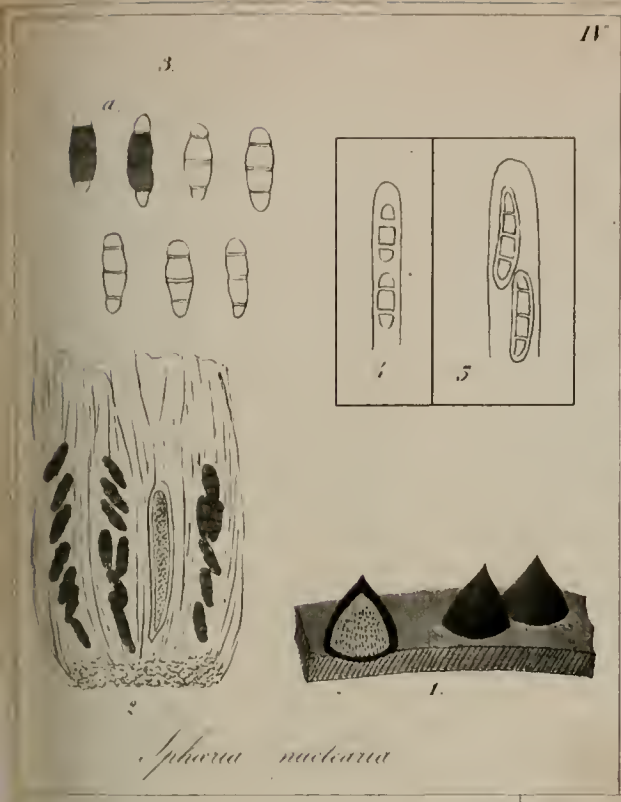


Sphæria scedana

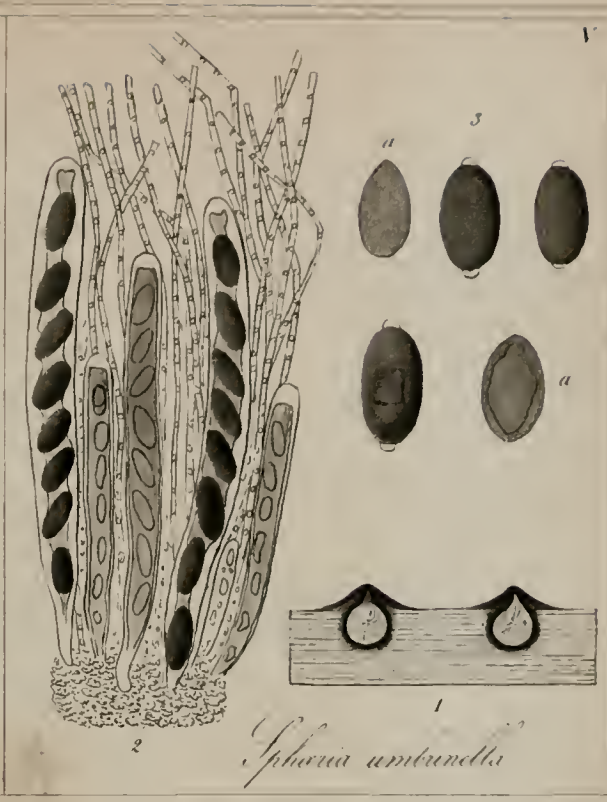
II.a

Melogramma vagans

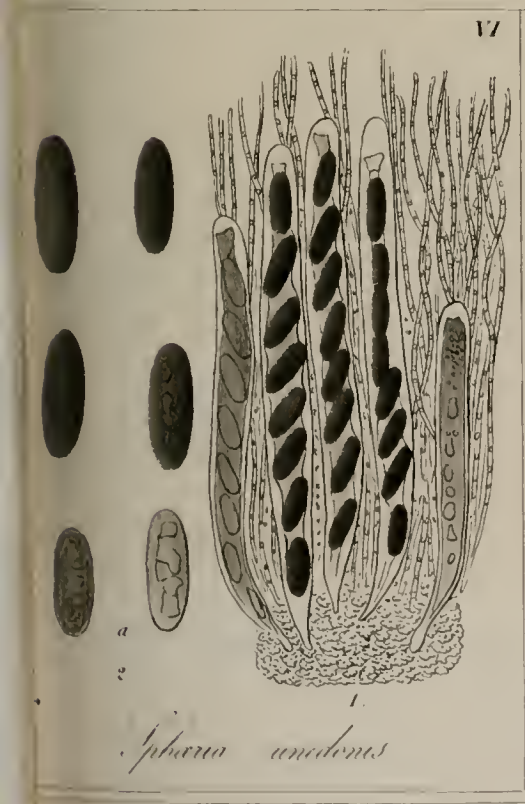
BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



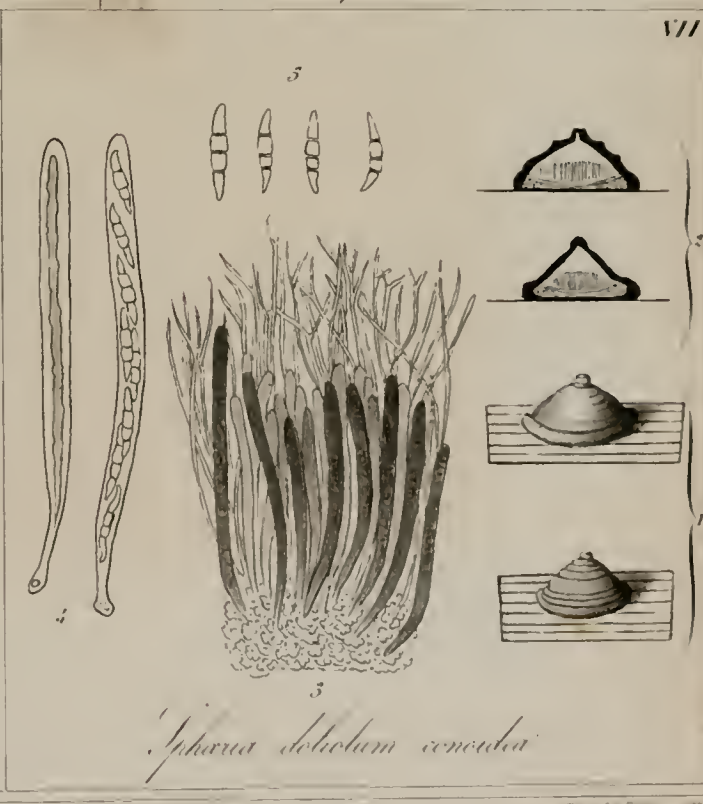
Sphæria nucicaria



Sphæria umbonella

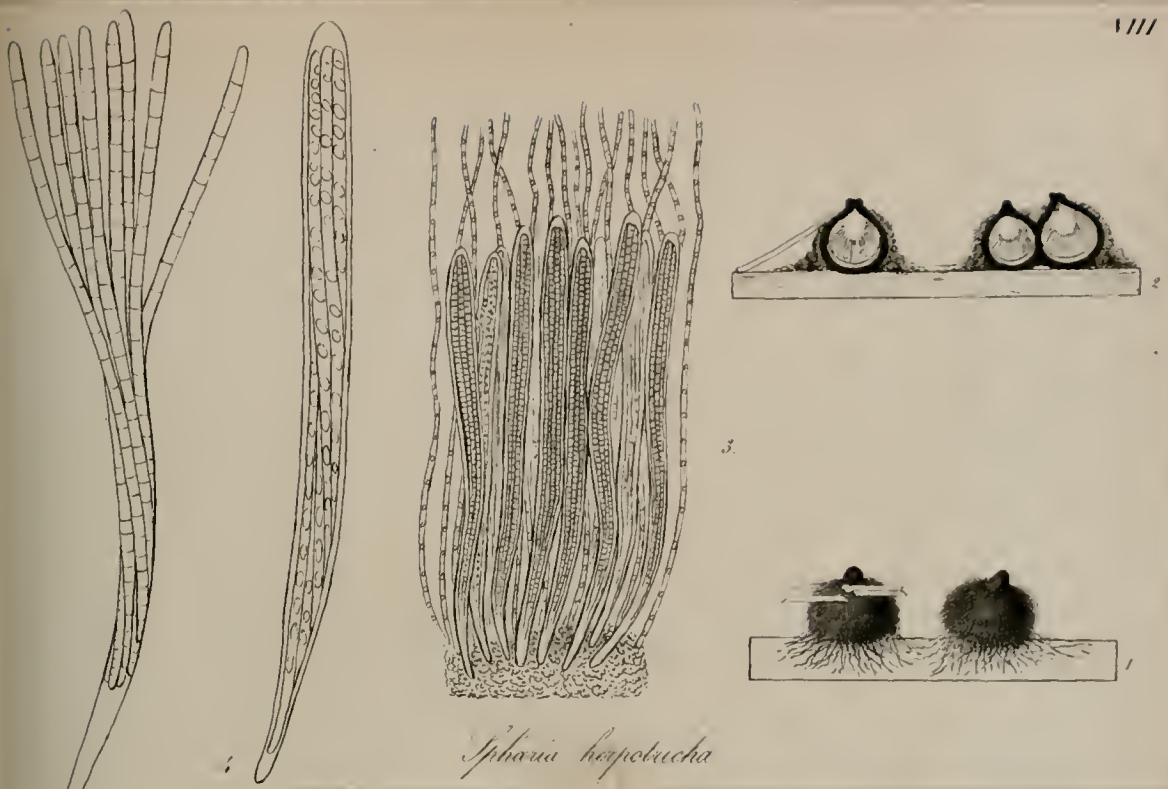


Sphæria anodonis



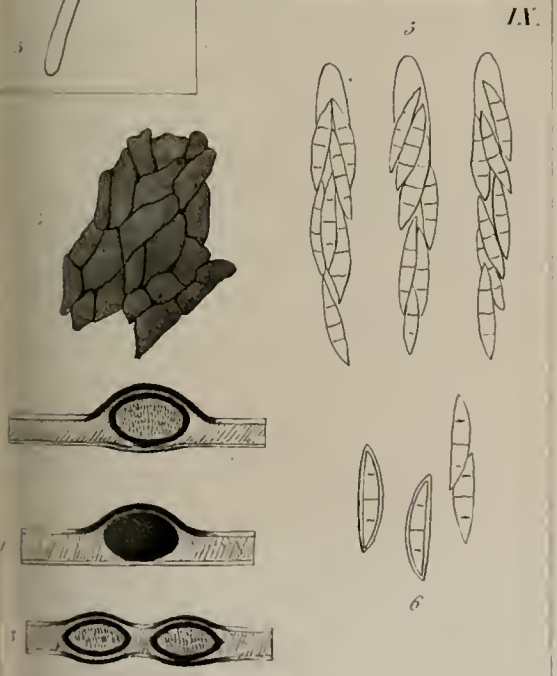
Sphæria dolioloum concatenata

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



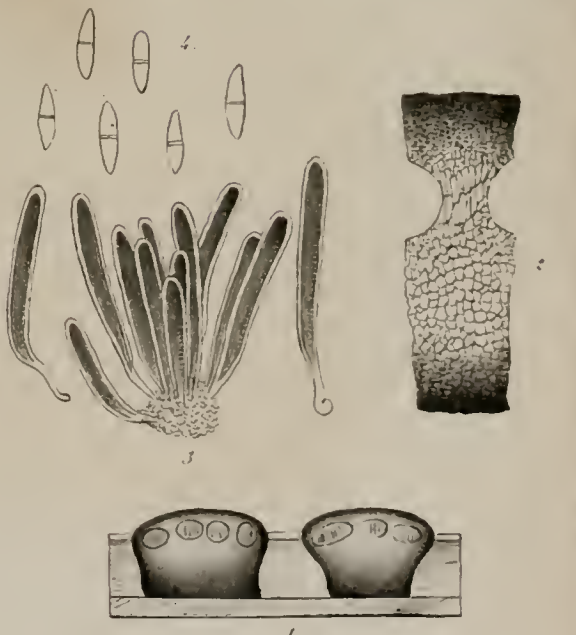
Sphæria hæpobtucha

IX.



Sphæria phaveneevia

X.



Dothidea druosa

NATURAL HISTORY.

SCIENZE

MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE II. — TOM. XVI.

SCIENZE MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

TORINO

STAMPERIA REALE

MDCCCLVII.

CONSIDERAZIONI

SULLA

DOTTRINA DI SOCRATE

DEL CAV. G. M. BERTINI

Approvate nell'adunanza del 21 dicembre 1854.

A descrivere compiutamente il carattere d'un gran personaggio storico converrebbe poterlo mostrare sotto quattro aspetti principali, cioè: 1.° quale egli fu nell'opinione del volgo de' suoi contemporanei; 2.° nella sua realità storica; 3.° quale egli fu a' suoi proprii occhi; 4.° quale egli fu nella sua verità ideale.

Questi quattro aspetti ci danno la norma per classificare le varie fonti da cui possiamo ricavare le notizie intorno al carattere di Socrate. Aristofane, che lo mise in scena nella sua commedia delle Nubi, ci rappresenta Socrate, quale egli era nell'opinione del volgo. Senofonte ed Aristotele ci mostrano il carattere morale e intellettuale di Socrate nella sua verità storica. Platone nella sua Apologia ci mostra quale opinione avesse Socrate di se stesso e della sua missione: negli altri dialoghi ci mostra un Socrate ideale, ossia il Socrate reale elevato alla sua suprema potenza.

Non è certo mia intenzione di trattare in tutta la ampiezza il tema che ho testè delineato. Mi restringerò a proporre alcune osservazioni le quali mi sembrano spargere qualche luce sulla dottrina e sulla vita di Socrate.

Nel concetto del popolo ateniese, Socrate era un sofista, e come tale fu rappresentato da Aristofane. Nella commedia delle Nuvole, un certo

Strepsiade, uomo affatto rozzo ed incolto, trovandosi aggravato di debiti a cagione delle pazze spese del figlio, e non vedendo modo di espedirsi dalle domestiche angustie, entra nella scuola di Socrate. – Socrate prende subito ad insegnargli che non esiste Giove, nè quegli Dei che il volgo adora; i fenomeni della natura, il tuono, il fulmine, i venti, le pioggie che si attribuiscono agli Dei, provengono dalla natura delle cose. Perciò in luogo degli Dei conviene adorare le nubi, cause principali di questi fenomeni. Il vecchio Strepsiade stupisce, e non potendo capir nulla di tutta quella lezione, prega Socrate, che, lasciate in disparte tali cose, gli insegni piuttosto il modo di frodare i suoi creditori. Socrate s'accinge ad insegnargli quest'arte: ma siccome il vecchio s'accorge di non fare alcun profitto, si parte dalla scuola, e vi manda in sua vece il figlio Fidippide, acciocchè questi impari l'arte di far prevalere la peggior causa sopra la migliore. Instrutto in quest'arte, il figlio la adopera contro i suoi creditori, e gli defrauda di ciò che loro è dovuto. Il padre ne esulta, e si chiama beato: ma ben presto prova anche in se stesso gli effetti dei perversi insegnamenti ricevuti dal figlio: poichè questi non temendo gli Dei, nè facendo alcun conto della giustizia, giunge a tal punto di scelleratezza, da battere il padre e la madre. Il Socrate di Aristofane è adunque un sofista, il quale tiene pubblica scuola di irreligione e di empietà; un maestro di retorica, il quale insegna l'arte di far prevalere il torto sul buon diritto: un corruttore della gioventù, che eccitava i giovani a ribellarsi all'autorità paterna. E non diversa era l'opinione che ne aveva il popolo ateniese. Di qui nasceva l'odio contro di lui. Il volgo incapace di discernere il filosofo dal sofista, involgeva l'uno e l'altro in una comune condanna. Di quest'odio del popolo contro i filosofi in generale abbiamo nel Fedone una testimonianza che mi sembra degna di essere riferita. Ivi Socrate avendo detto che i veri filosofi non attendono ad altro che a morire, e a rimanersi come se fossero morti, uno degli interlocutori di quel dialogo, fingendo, per celia, di prendere le parole di Socrate nel senso materiale, gli dice: io credo che gli uomini del volgo, udendoti dir questo contro i filosofi, ti approveranno, e di tutto cuore ti consentiranno che veramente i filosofi son gente che bada a procacciarsi la morte, e che ben se la merita (Phaed. x). A questa causa comune d'odio contro di lui s'aggiungevano alcuni motivi particolari. Socrate essendo stato dichiarato dall'oracolo delfico il più sapiente degli uomini, egli come consapevole della propria ignoranza aveva interpretato questo oracolo come

una missione impostagli dal Dio di Delfo, di esaminare coloro che si presumevano sapienti, di smascherarli, e di confermare in questa guisa la verità dell'oracolo che avea proclamato sapientissimo quel solo che conosceva almeno la propria ignoranza. Certamente non si potrebbe immaginare una missione più odiosa di questa, e più atta a rendere intollerabile colui che la esercita. Se a questi odii inveterati da lunga mano contro di lui, si aggiungano le tendenze oligarchiche, che il partito democratico, risurto in quel tempo, gli rimproverava (1), come pure le sue relazioni con Crizia, e con Alcibiade: se si aggiunga il non aver egli voluto nella sua difesa ricorrere ai mezzi che si usavano allora per eccitare la compassione dei giudici, si troverà meno inesplicabile il fatto della condanna a morte di un uomo sì giusto, d'un cittadino così buono quale veramente fu Socrate. E come tale appunto ci viene mostrato da Senofonte.

I Memorabili di Senofonte, più che la dottrina Socratica, ci fanno conoscere l'indole morale di Socrate. Sembra che Senofonte uomo pratico, buon soldato, ed ammiratore della costituzione spartana non avesse un chiaro concetto della filosofia, e che del pari che il volgo, non distinguesse i filosofi dai sofisti, e gli uni e gli altri involgesse in un comune disprezzo. Di questa confusione e di questo disprezzo abbiamo una prova nel seguente passo dei Memorabili (l. 1. c. 1.): « Egli non disputava sulla natura dell'universo, come sogliono gli altri, ricercando come stia quello che dai *sofisti* chiamasi Cosmo, e quali siano le cause necessarie dei sin-

---

(1) Fra le accuse fattegli, Senofonte menziona anche questa, che cioè Socrate citasse sovente quel passo di Omero, dove si racconta che Ulisse:

Quanti egli trova, o duci o re, li ferma
Con parlar lusinghiero, e, che fai, dice,
Valoroso campione? A te de' vili
Disconvien la paura. Or via, ti resta,
Pregoti, e gli altri fa restar. . . . .
. . . . . .
S'uom poi vedea del vulgo, e lo coglica
Vociferante, collo scettro il dosso
Batteagli; e, taci, gli garria severo,
Taci tu, tristo, e i più prestanti ascolta,
Tu codardo, tu imbelle, e nei consigli
Nullo e nell'armi.

« Questi versi, dicea l'accusatore, erano da lui interpretati come se il poeta lodasse che si battessero i popolani ed i poveri. » Senof. Mem. l. 1. c. 2. 58.

goli fenomeni celesti. » Senofonte dice questo coll'intento di provare l'insussistenza dell'accusa di empietà che si faceva contro di Socrate. Dal che risulta che Senofonte credeva col vulgo: 1.° che tali ricerche conducessero all'irreligione; 2.° che sofista e filosofo fosse un medesimo: 3.° che per conseguenza a discolpare Socrate dalla taccia di irreligioso bastasse dimostrare che egli non era filosofo.

Quando si leggono i *Memorabili*, non conviene dimenticare lo scopo particolare che il loro autore si era proposto scrivendoli. Gli accusatori di Socrate lo aveano rappresentato come un uomo irreligioso, come un cattivo cittadino che inspirava il disprezzo delle patrie leggi, come un uomo insomma, la cui conversazione e i cui esempi tendevano a corrompere i cittadini e a sovvertire ogni buon ordine. Senofonte, dal suo punto di vista, che non era filosofico, ma popolare, prese a dimostrare tutto il contrario di quelle accuse, e a provare che Socrate, anche giudicandolo secondo le idee comuni, e ricevute dal popolo, da' suoi giudici stessi, non meno che da' suoi accusatori, era un uomo religiosissimo, un buon cittadino, un buon soldato, un magistrato integerrimo, un uomo che co' suoi discorsi, co' suoi esempi, co' suoi consigli, esercitava una influenza altamente morale e benefica su quelli che lo ascoltavano, e si studiavano di imitarlo. Questo è ciò che Senofonte propone al principio del suo libro, esprimendo la sua maraviglia, come mai gli Ateniesi abbiano potuto condannare a morte un uomo che era tanto secondo il loro cuore, un cittadino tanto per ogni rispetto irreprensibile. Questo medesimo egli ripete come conclusione di quasi tutti i capitoli del suo libro, il quale finisce con queste parole (1): « ed a me sembra che tale essendo egli, quale io l'ho narrato, così pio, che non faceva mai nulla senza il consenso degli Dei, così giusto, che non avrebbe mai fatto ad alcuno il minimo danno, e faceva anzi tutto il bene possibile a quelli che seco lui usavano, così continente, che mai non avrebbe anteposto il piacere al bene, così savio, che mai non isbagliava nel giudicare del meglio e del peggio, nè d'altrui consiglio abbisognava, ma bastava egli solo a questo discernimento, e sapeva inoltre spiegare col discorso, e disaminar tali cose, e provare gli altri, e riprenderli dei loro errori, e rivolgerli alla virtù: sembra, dico, che egli fosse quale debb'essere un uomo ottimo e

(1) Mem. l. IV. in fine.

beatissimo. » Senofonte adunque ci descrive l'uomo pratico, l'uomo dotato di quella bontà e di quel valore, di cui può essere giudice ed apprezzatore anche il comune degli uomini, e non già di una virtù esimia, squisita, filosofica, quale sarebbe quella che gli stoici attribuivano al loro sapiente.

Premessi questi cenni sulla vita e sul carattere di Socrate, toccherò ora qualche punto della sua dottrina.

La filosofia avea messe in forse le basi della vita morale e sociale antica, ma nulla avea edificato: avea distrutto la fede, ma non avea messo in suo luogo la convinzione scientifica. I dissidii fra i filosofi erano un fatto che non isfuggiva all'occhio del popolo, un fatto da cui i sofisti deducevano lo scetticismo, l'impossibilità della scienza, la relatività del vero: deducevano che l'uomo è la misura delle cose, che tutto è opinione, e che la somma sapienza ed abilità consiste nel sapere padroneggiar l'opinione, e modificarla come più ne torna a conto. Questo essere il mezzo per conseguire una grande potenza, e soddisfare le proprie passioni, nel che consiste il bene supremo (1). Ma l'azion distruttiva eccita sempre nell'uomo una reazione conservatrice: lo sforzo a distruggere tutto ciò che costituisce la vita spirituale umana desta più vivo negli animi il sentimento e l'amore di ciò che vi è in essa di profondo, di inconcusso, di indestruttibile. Può dirsi che le società umane nel loro svolgimento intellettuale e morale procedono in modo analogo al metodo Cartesiano. Che cosa fece infatti Cartesio? Egli rivolse contro il complesso di dottrine e di opinioni che costituivano il patrimonio scientifico del suo secolo tutti gli argomenti dello scetticismo, e disse seco stesso: se in questo edifizio avvi qualche parte solida e ben fondata, essa reggerà inconcussa all'urto della mia batteria scettica; a questo modo io discernerò in quell'edifizio ciò che vi ha di saldo, e ciò che vi ha di cadueo, e su quei ruderi innalzerò un edifizio più fermo e più sicuro del primo. Ciò che Cartesio trovò di inconcusso fu la coscienza del proprio pensiero. Emanuele Kant fece lo stesso esperimento, e trovò che ciò che vi era di indestruttibile nell'anima umana era il sentimento del dovere, la fede nella virtù, nella libertà, nell'immortalità dell'anima, in Dio. Questo medesimo sentimento fu l'elemento che resistè all'azione distruttiva dello scetticismo e della so-

(1) V. il Teeteto, il Gorgia, il 1.° e 2.° lib. della Repubblica

fistica in sul finire del primo periodo della filosofia greca, e che si trovò elevato ad una suprema potenza nell'animo di Socrate. Da un passo di Senofonte, che abbiamo allegato più sopra, come da alcuni altri dello stesso autore (1), parrebbe potersi argomentare che Socrate non pregiasse la scienza per se stessa, ma solo in quanto essa può servire ad uno scopo pratico, e che perciò egli tenesse in poco conto le ricerche fisiche. Ma questa testimonianza è indebolita, se non distrutta da ciò che Socrate narra de' suoi studi giovanili nel *Fedone* (2). E certamente colui che riguardava l'intelligenza e il senno come il solo attributo che dia qualche valore all'uomo (3), colui che riponeva la virtù nella scienza, ed ogni vizio e colpa derivava dall'ignoranza, dovea considerare la tendenza al conoscere come il più sublime istinto della natura umana, e nel secondare questo istinto, nello svolgerlo, e coltivarlo dovea riporre il più alto grado di vita. Riprovava, è vero, le ricerche fisiche dei filosofi anteriori e contemporanei, ma perchè gli parevano trascendenti, o non ben condotte, in quanto che miravano a determinare la causa materiale e la causa efficiente della natura, e trasandavano affatto la causa finale. Tali ricerche inoltre gli parevano premature, e da rimandarsi ad un tempo, in cui si fossero meglio studiate le cose che appartengono all'umanità. « Egli domandava, dice Senofonte, se persuasi di già conoscere a sufficienza le cose umane, si applicassero a tali investigazioni, oppure se, col lasciar da banda le cose umane per considerare le divine (le naturali) pensassero di far cosa dicevole (4). » Riprovava adunque le ricerche fisiche, tanto in voga a' suoi tempi, per la stessa ragione, per cui nel Fedro dice non potersi occupare delle interpretazioni filosofiche dei miti: « Io non » sono ancor giunto, die'egli al giovane Fedro, come ordina la scritta » delfica, a conoscere me stesso, e mi sembra ridicolo, mentre ignoro » ancor questo, pensare ad altre cose. Ond'è che messi da banda simili » argomenti, ed attenendomi, intorno ad essi, a ciò che si crede gene- » ralmente, non penso a quelli, ma a me stesso, considerando se io mi » sia per avventura un mostro ancor più complicato e più furibondo di » Tifone, od un animale più benigno e più semplice, partecipe d'una

---

(1) Mem. i. 1. 13. 16.

(2) P. 96.

(3) Το ἄφρον ἄτιμόν ἐστι; *ciò che è privo d'intelligenza non ha alcun pregio.* Memor. l. i. c. 2 n. 55.

(4) Mem. i. 1

» sorte onesta e divina. » Conoscere se stesso; ecco ciò da cui si deve incominciare, e quando egli raccomandava questo precetto del Dio di Delfo, lo prendeva in un senso generale, e intendeva che il Dio ordinasse all'uomo di conoscersi non già solo sotto il rispetto morale, ma anche sotto il rispetto intellettuale, di discernere ciò che si sa da ciò che non si sa, e di acquistare coscienza della propria ignoranza, poichè, come narra Senofonte (1) « l'ignorare se stesso, e giudicare e credere di sapere » ciò che non si sa, gli pareva che fosse uno stato prossimo alla pazzia. » E certo, a quel modo che ogni sbaglio che si commette nella vita pratica presuppone una ignoranza di sè, o una falsa opinione intorno alla propria attitudine e capacità, così ogni errore speculativo intorno alla verità oggettiva delle cose presuppone un falso giudizio circa lo stato delle proprie conoscenze: in tanto si erra, in quanto si afferma il falso, e si afferma il falso perchè si crede di saperlo, e si crede così, perchè uno non si è reso ben conto del proprio stato intellettuale, e non sa ben discernere ciò che veramente conosce da ciò che ignora. Questa conoscenza di sè vien posta da Socrate come principio e come punto di partenza della filosofia (2). Ed in ciò egli si accorda con Cartesio: giacchè, come ho osservato, il metodo Cartesiano incomincia appunto dal discernere ciò che vi ha di inconcusso nel sapere umano da ciò che vi ha di labile ed erroneo. Tutta la differenza tra i due metodi sta nei mezzi per operare questo discernimento; poichè, laddove Socrate raccomanda come mezzo l'esame di se stesso, Cartesio adopera lo scetticismo come un dissolvente, mettendo in conto di cognizioni inconcusse e indubitabili quelle che ad un tale dissolvente resistono. E quando Socrate diceva che egli sovrastava agli altri in sapienza per questo solo, che egli conosceva la propria ignoranza, non si deve già intendere questa sua parola in un senso assolutamente scettico, poichè come mai avrebb'egli potuto mostrare la vanità della sapienza umana, e adempiere alla missione impostagli dal Dio di Delfo, se non avesse avuta l'idea della sapienza in sè? Chi dice agli uomini: voi non siete sapienti, viene a dire che gli uomini non realizzano in se medesimi l'ideale della sapienza, nè potrebbe recare questo giudizio chi non contemplasse un tale ideale. E Socrate era consapevole di posseder

(1) Mem. III. 9. n. 6.
(2) Plat. Phaedr. p 230

questa idea e di applicarla. Egli dimostra ad Entidemo nel quarto dei Mem. c. 6. n. 7. che la sapienza (σοφία) è una cosa stessa colla scienza (ἐπιστήμη). Quivi Socrate domanda ad Entidemo: « Che cosa diremo noi » che sia la sapienza? Dimmi, ti pare che i sapienti siano sapienti in » quelle cose di cui hanno scienza, oppure si trovano alcuni che siano » sapienti in quelle cose che non sanno?

» Eutid. È chiaro che i sapienti sono tali in quelle cose che sanno, » poichè come mai potrebbe uno essere sapiente in ciò che non sa?

» Socr. I sapienti adunque sono sapienti per iscienza.

» Eutid. E per che altro mai potrebbe uno essere sapiente, se non » per iscienza.

» Socr. E credi tu che la sapienza sia altro che ciò per cui i sapienti » sono tali?

» Eutid. Non io certamente.

» Socr. Dunque la sapienza è scienza. »

Egli certo non espresse la sua idea della sapienza in una definizione rigorosa e compiuta, ma la insinua e la sottintende in tutta quella ricerca del sapiente, che egli intraprese per ordine di Apollo, come racconta l'*Apologia Platonica*. Egli cercò la sapienza fra i politici, ma si accorse che questi più che della realtà si curano dell'apparenza e dell'opinione degli uomini. Cercò la sapienza fra' poeti, ma si accorse che questi non per sapienza, ma per naturale indole e per entusiasmo dicono ciò che dicono, come gli indovini e gli inspirati, poichè anche costoro dicono molte belle cose, ma non sanno nulla di ciò che dicono. Cercò finalmente la sapienza fra gli artefici, e trovò che ciascuno, per essere valente nella propria specialità, presumeva molto di se stesso e si reputava sapiente. Da tutto ciò, per la ragion de' contrari, si può arguire che la sapienza, quale Socrate la concepiva e la cercava fra gli uomini, avesse questi caratteri: 1.° di essere bastevole a se stessa, e non curare l'opinione degli uomini; 2.° di poter rendere ragione di sè e di tutto ciò che fa, ed assegnarne le ragioni ultime: perciò ella differisce dalla natura che si esplica in modo fatale e inconsapevole di sè: differisce dall'entusiasmo, per cui gli uomini operano belle e grandi cose senza saper darne ragione: differisce dall'abitudine, per cui gli uomini operano bene, senza neppur pensare a ciò che fanno: differisce finalmente dalla opinion retta, per cui gli uomini credono il vero senza saperlo e senza poterlo dimostrare.

Siccome la sapienza consiste nel conoscere le ragioni ultime delle cose,

e siccome queste ragioni ultime sono i concetti delle essenze delle cose, espressi in definizioni (1), ne segue che il metodo dialettico di Socrate dovea mirare unicamente a formare un giusto e chiaro concetto di ciascuna cosa, e a trovarne la definizione. Senofonte stesso ci dice quale importanza Socrate attribuisse a questo metodo. « Come egli rendesse i » suoi famigliari abili nel discorrere, anche questo mi studierò di dire. » Poichè Socrate credeva che coloro che sanno che sia ciascuna cosa (2) » siano anche capaci di spiegarlo agli altri. Coloro poi che nol sapessero, » non esser punto a stupire, se ed essi cadessero in errore, e vi traessero » gli altri. Per la qual cosa egli non si stancava mai d'investigare in com- » pagnia de' suoi famigliari che fosse ciascuna cosa (3). E diceva che il » discorrere conversando chiamasi διαλέγεσθαι per questo che i conversanti » consultano in comune, distribuendo (διαλέγοντας) per generi le cose (4).

Con questa sua ricerca di definizioni Socrate diede occasione alla teoria Platonica delle idee, e questo è il vincolo che congiunge la dottrina Socratica così popolare, così pratica, colla dottrina sottile e recondita del suo discepolo. Ed invero, la definizione intende a rilevare e contemplare in se stesso l'elemento universale. Questo elemento nella sua purezza ed universalità non esiste certamente nelle cose reali e individue. Dove e come esisterà esso adunque? Sarà un nulla? Sarà nient'altro che un vocabolo? Sarà un semplice pensiero, un atto della mia mente? Oppure sarà qualche cosa in sè? Tali sono le questioni a cui ci conduce il metodo Socratico in apparenza così semplice, e così lontano dalle astruserie metafisiche. E tali sono le questioni che Platone tentò di risolvere (5).

La definizione può ricercarsi in due modi, o partendo da un concetto universalissimo, e da questo discendendo per via di successive divisioni fino al concetto da definirsi, oppure prendendo ad esame un concetto analogo a quello che si vuol definire, cercandone le note caratteristiche, e poscia trasferendole a quello. In ciò consiste l'induzione. Adduciamone un esempio, tratto da Senofonte (6). Si tratta di determinare d'onde debba

(1) È notabile che nella lingua greca il vocabolo λόγος ha i due significati di ragione e di definizione.

(2) Τί ἕκαστον εἴη τῶν ὄντων.

(3) Mem. l. IV. c. 6.

(4) Ib. ib. c. 5. n. 12.

(5) V. Aristot. Metaph. I 6. p. 987.

(6) Mem. l. III. c. 6.

incominciarsi la cura della repubblica: certo è difficile rispondere a questa domanda, poichè la repubblica è un complesso di cose moltiplici e complicate. Che facciamo noi dunque? Noi osserviamo che la repubblica è simile alla casa: ora la prima cosa a cui deve pensare chi vuol migliorare la condizione della casa, sono le sostanze, l'accrescimento dell'entrata, la diminuzione della spesa. Dunque anche nella repubblica si dovrà pensare innanzi tutto alle finanze.

Quali erano i risultati da lui ottenuti con questo metodo? Quali erano i suoi insegnamenti sull'oggetto stesso della filosofia? In primo luogo ci dice Senofonte, che egli si studiava d'inspirare a' suoi famigliari dei sani pensieri intorno agli Dei (1), e ci riferisce il suo colloquio con un certo Aristodemo (2) che si professava ateo, ed un altro col giovane Eutidemo. Notabile è l'argomento con cui egli prova l'esistenza di una mente suprema. « Credi tu, domanda egli ad Aristodemo, di avere in te qualche cosa di intelligente, e che in nessun'altra parte dell'universo vi sia intelligenza? Tu sai pure che della gran quantità di terra che si trova nel mondo, solo una minima parte entra nella composizione del tuo corpo; lo stesso puoi dire dell'umido e degli altri elementi, che in natura si trovano in mole sterminata, e nel tuo essere in minima porzione. Or crederai di aver tutta in te l'intelligenza, e che questo gran tutto ne sia affatto privo, quantunque sia così bene ordinato? » Sotto l'apparente semplicità, e direi quasi, puerilità di questo argomento parmi di ravvisare una ragione profonda. Se non ci fosse un'intelligenza assoluta, se l'uomo, limitatissimo, com'egli è, in ogni parte del suo essere, pure fosse il solo essere intelligente, ne seguirebbe che egli sarebbe ente supremo, sarebbe il dio dell'universo, poichè l'intelligenza è la regina nata di tutte le cose. Perciò l'uomo sarebbe una contraddizione: sarebbe da meno dell'universo sotto tutti gli altri rispetti, e superiore ad esso per l'intelligenza; sarebbe un dio limitato e infelice. – Il resto di quel dialogo, come pure il colloquio con Eutidemo è interessante, in quanto che è il primo saggio che trovisi nella filosofia antica, di una dimostrazione dell'esistenza della divinità, mediante l'argomento che fu poi chiamato *fisico-teologico*. Ivi egli viene mostrando al suo giovane amico, con quanta cura gli Dei abbiano apprestate tutte le cose di cui gli uomini abbisognano; quale armonia

(1) Mem. l. IV. c. 3
(2) Ib. l. I. c. 4

regni fra i bisogni e le facoltà dell'uomo, e le cose esterne, e con quali prerogative l'uomo sia stato sollevato al di sopra di tutti gli altri viventi. Ma il titolo più evidente della sua superiorità consiste appunto nella conoscenza che egli ha degli Dei, e che si trova diffusa in tutto il genere umano. L'individuo può colla sua riflessione riconoscere la verità di una tale credenza, ma non deve certo pretendere di apprendere la divinità immediatamente, co' propri sensi. « Che io dica il vero, anche tu, o Eutidemo, il conoscerai, così parla Socrate in quel dialogo, se non ti aspetterai di vedere i sembianti degli Dei, ma ti basterà vedere le loro opere per venerarli e adorarli. E considera che gli Dei stessi ti accennano doverti a ciò star contento. Poichè tutti gli altri Dei, nell'atto che ciascun di loro ci largisce quei beni che da lui dipendono, non ci si mostrano alla vista: quel Dio poi che ordina e contiene l'intero mondo, ove trovansi tutte le cose belle e buone, e che ai nostri usi lo esibisce inconsunto, indefettibile, sempre giovane ed obbediente a' suoi cenni colla velocità del pensiero e senza alcun fallo, quegli è visibile bensì nelle sue grandissime opere, ma non in se stesso e nell'atto ch'egli ordina tutte queste cose (1). – Considera ancora che il sole, che pur sembra a tutti manifesto, non si lascia affisare dagli uomini, ma se alcuno temerariamente si attenti di mirarlo, gli toglie la vista. Anche i ministri degli Dei tu troverai che sono invisibili. Il fulmine, per esempio, si conosce che viene dall'alto, e che vince tutto ciò in che s'imbatta; ma non si vede nè quando viene, nè quando urta col suo impeto, nè quando se ne va via. Lo stesso è a dirsi dei venti. Essi non si vedono, ma i loro effetti sono visibili, e quando vengono, li sentiamo. Che anzi l'anima stessa dell'uomo,

(1) L'autenticità di questo periodo è sospetta a G. Dindorf, il quale nella sua edizione di Lipsia 1824 lo chiude fra parentesi, forse perchè conteneva un pensiero, a parer suo troppo recondito ed alieno dalla semplicità del Socrate Senofonteo, o perchè esprimeva in modo troppo decisivo la credenza in un Dio supremo ed universale, sì che potrebbe riguardarsi come una inserzione di qualche posteriore, fatta collo scopo di provare il monoteismo di Socrate. Per altro io credo autentico quel periodo, giacchè mi par necessario a connettere insieme il precedente e il susseguente. Ecco tutto l'andamento del pensiero: 1.° gli Dei sono invisibili o conoscibili solo dalle loro opere; 2.° gli Dei particolari presiedenti a ciascuna delle varie parti dell'universo, sono invisibili: invisibile è pur quello che presiede al tutto; 3.° uno di questi Dei particolari, il sole, parrebbe fare un'eccezione, ma esso, benchè visibile, pure non si lascia guardare dagli uomini, e punisce coll'acciecamento la temerità di chi lo vuole affisare; 4.° i ministri degli Dei sono anch'essi invisibili. - In questa serie di proposizioni il pensiero principale si viene gradatamente particolareggiando Senza la seconda, che corrisponde al periodo in questione, è chiaro che ci sarebbe un salto.

la quale, se alcun'altra delle cose umane, partecipa della divinità, si conosce bensì che ella signoreggia in noi, ma essa non si vede. Le quali cose osservando convien guardarsi dal disprezzare ciò che è invisibile, ma argomentandone la potenza dagli effetti, onorare la divinità. »

» Eutid. Io son certo, o Socrate, che io non commetterò mai la minima negligenza verso la divinità. Ma una cosa mi accora, ed è che nessuno mai fra gli uomini credo che potrà rendere un degno contracambio agli Dei pei loro benefizi. »

» Socr. Non accorarti di ciò, o Eutidemo, poichè tu sai che il Dio di Delfo, quando uno lo interroga in che modo potrebbe gratificarsi gli Dei, risponde: *secondo l'usanza della città*. Ora è usanza e credenza universale che gli Dei si rendano propizi co' sacrifizi, ognuno secondo le proprie facoltà: in che modo adunque si potrebbe meglio e più santamente onorare gli Dei, che in quello che essi stessi prescrivono? Conviene adunque, non rimanendo punto addietro dalle proprie facoltà nell'onorare gli Dei, star di buon'animo e sperare i massimi beni, poichè non sarebbe uomo assennato chi maggiori beni sperasse da altri che da quelli che hanno il potere di fare il massimo giovamento, e in altro modo li sperasse, che col piacere ad essi: e come potrebbe loro piacere se non coll'esser loro sommamente obediente (1)? »

Crederemo noi che Socrate avesse formolato, ed insegnasse dogmaticamente una teologia razionale, in cui si stabilisse con prove rigorose l'esistenza del Dio uno, e se ne deducessero gli attributi? Nulla di più contrario all'ingegno Socratico. Egli accettava la religione del popolo, escludendone solo ciò che con una breve riflessione si può riconoscere come evidentemente assurdo ed indegno della divinità. Nella religione del popolo si poteano distinguere quattro classi di credenze: 1.° credenze razionali, quali erano p. e. la fede in un Dio supremo onnipotente che tutto vede ed ode; la fede nella personalità di Dio, nella sua providenza, nella libertà umana, nella legge morale, nei premi e castighi della vita futura; 2.° credenze che si potrebbero chiamare intellettuali (prendendo la parola *intelletto* nel senso Kantiano) in quanto che derivano dalla falsa applicazione delle categorie dell'intelletto umano alla natura divina, la quale è al disopra delle categorie, e, per usare il linguaggio scola-

(1) Mem. l. IV. c. 3.

stico, è *extra omne genus*. Tali sono p. e. la credenza nella moltiplicità degli Dei, nella finitudine del loro essere, nella loro esistenza temporanea e locale, ed in altre simili determinazioni ripugnanti alla verità ontologica intorno a Dio; 3.° credenze fantastiche ed antropomorfiche, colle quali il popolo si rappresentava i suoi Dei come affatto simili agli uomini, composti d'anima e di corpo simile all'umano, senz'altra differenza fuorchè una più alta perfezione, una più grande potenza ed una vita immortale; 4.° credenze mitologiche ossia la fede nei racconti poetici dei fatti e delle vicende degli Dei e degli eroi.

Fra queste credenze, corrispondenti alle quattro facoltà fondamentali dell'anima umana, *ragione, intelletto, fantasia e memoria*, vi erano certamente delle ripugnanze e delle contradizioni: ma queste non impedivano al popolo di ritenerle e professarle tutte come vere. Il popolo non riflette, cioè non paragona fra loro le sue idee e le sue opinioni, e quando il suo pensiero è rivolto ad una cosa, dimentica quelle altre che egli pure ammette, e che alla prima ripugnano. Onde avviene che nel complesso di credenze che compongono la sua religione, e la sua *sapienza volgare*, per usare l'espressione del Vico, possono coesistere per lungo tempo credenze fra loro contradittorie. Ho detto *per lungo tempo*, giacchè quelle intime contradizioni sono il germe della decadenza e della rovina de' sistemi religiosi: la riflessione a lungo andare si risveglia, le ripugnanze si riconoscono universalmente, i tentativi di conciliazione falliscono, e la ragione e la verità finiscono per trionfare. Questo lavoro di distruzione incominciò coi primordi, può dirsi, della filosofia greca, e terminò colla caduta del paganesimo. Nè si potrebbe negare che Socrate, senza volerlo e senza saperlo, vi abbia cooperato. Egli certo ammetteva le due prime classi di credenze, ma adoprandole come un criterio per discernere il vero dal falso intorno alle cose divine, rigettava tutto ciò che ripugnava manifestamente a tale criterio. Che egli condannasse certi errori del volgo, si rileva da un passo di Senofonte. Dopo aver raccontato con quanto coraggio Socrate resistesse al popolo ateniese che volea giudicati e condannati in modo sommario quei nove generali che dopo la vittoria delle Arginuse, aveano trascurato di dar sepoltura agli uccisi in quella battaglia, Senofonte soggiunge: « Egli amò meglio osservare la santità del giuramento, che gratificarsi il popolo contro giustizia, e mettersi al sicuro dalle sue minacce. Poichè egli credeva che gli Dei avessero cura degli uomini non a quel modo che si crede dal volgo: il volgo pensa

che certe cose si sappiano dagli Dei, certe altre no. Ma Socrate credeva che gli Dei tutte le cose sapessero, e le dette e le operate e le meditate in silenzio, e fossero presenti in ogni dove, e dessero dei segni agli uomini intorno a tutte le cose umane (1). » Anche intorno alla preghiera ed ai sacrifizi le sue opinioni differivano da quelle del volgo, per testimonianza di Senofonte stesso, il quale dice che (2) « Egli pregava gli Dei semplicemente che gli dessero ciò che è bene, ben sapendo gli Dei che cosa sia bene. Le preghiere poi di quelli che domandano agli Dei oro od argento, o la tirannide, od altra cosa siffatta, gli sembravano non differir punto dalla preghiera di chi domandasse il giuoco, o la battaglia, od altra cosa il cui esito fosse manifestamente incerto. Facendo dal suo scarso avere piccoli sacrifizi, stimava di non essere da meno di quelli che dalle loro molte facoltà offrono molte e grandi vittime; poichè diceva non essere convenevole agli Dei il compiacersi più de' grandi che de' piccoli sacrifizi, perchè così bene spesso sarebbero riusciti loro più grati i sacrifizi de' malvagi che degli uomini dabbene, e non varrebbe più la pena di vivere, se le offerte de' malvagi fossero più gradite agli Iddii, che quelle degli uomini dabbene. Ma egli pensava che gli Dei tanto più si compiacessero degli onori che loro si rendono, quanto più fosse pio l'uomo che loro li rendeva. Era anche lodatore di quel verso di Esiodo

Giusta il poter, fa i sacrifizi a' Numi. »

Dalle cose fin qui allegate si vede che il suo criterio in materia di religione era il sentimento morale, piuttostochè un'idea metafisica che egli si fosse formata della divinità. Si vede ancora che cosa dobbiamo pensare del monoteismo che da molti venne attribuito a Socrate. Se per *monoteismo* s'intende quella dottrina che considera Dio come l'Essere assoluto, e lo ammette uno, come una è la sua idea, con cui s'immedesima, certo non può attribuirsi a Socrate. Ma se si vuol dare il nome di monoteismo a quella credenza, che ammette un Dio personale, supremo, a cui siano subordinati tutti gli altri Dei, come enti intermedii fra quello e l'uomo, non può dubitarsi che Socrate fosse monoteista, come lo era ogni pagano che credeva nella supremazia di Giove sugli altri Dei. Egli

(1) Mem. l. 1 c. 1.
(2) Ib. c. 3

che si studiava di allontanarsi dalla credenza comune il meno che fosse possibile, non rigettando se non quelle opinioni che erano evidentemente inconciliabili colla ragione, o col sentimento morale, egli che per altra parte era gran lodatore della dottrina di Anassagora che poneva la Mente come ordinatrice del tutto, ed anche della dottrina di Eraclito (1), che dava il nome di Giove al principio supremo; doveva certamente accogliere con tutta l'anima questa credenza in un Dio supremo, che presiedesse all'universo, come gli Dei inferiori ne governavano ciascuna parte (2).

Fra le credenze religiose che egli con piena convinzione accettava dal popolo, eravi anche quella della divinazione. La sua fede su questo punto si connetteva per una parte colla sua fede nella providenza, e per l'altra era il fondamento della convinzione ch'egli aveva, di ricevere rivelazioni immediate e particolari per mezzo di una voce misteriosa e divina. Providenza, rivelazione universale, rivelazione individuale sono tre punti che si trovano sempre accennati nei discorsi che Senofonte di lui riferisce intorno alle cose divine. Gli Dei sono ordinatori del tutto, datori d'ogni bene agli uomini, essi sono gli autori di quelle leggi non scritte (3) che universalmente si osservano; essi danno dei segni agli uomini intorno alle cose che loro importa di sapere, e che non si potrebbero sapere per altra via. Egli ammetteva perciò la necessità della divinazione. « Co' suoi famigliari, racconta Senofonte (4), egli teneva questo modo: quanto alle cose di prima necessità consigliava di farle in quella maniera che gli pareva la migliore. Ma circa le cose di cui è ignoto come abbiano a riuscire, li mandava a consultare gli Dei, se fossero da intraprendersi. E a quelli che vogliano ben governare le famiglie o le città diceva esser necessaria la divinazione..... Poichè quello che è il più importante in ciascuna delle faccende umane è un segreto che gli Dei riservarono a se soli. Così quegli che ha fatto una bella piantagione non sa chi ne raccoglierà i frutti: quegli che ha ben costrutta una casa non sa chi l'abiterà: nè il valente strategico sa se gli torni a conto di esser messo alla testa di un esercito, nè il politico sa se per sua buona o mala ventura egli

---

(1) Diog. l. II. 22.

(2) V. il dialogo con Eutidemo, riferito più sopra.

(3) Sen IV. 4. 19. ἐγὼ μὲν ..... θεοὺς οἶμαι τοὺς νόμους τούτους (τοὺς ἀγράφους) τοῖς ἀνθρώποις θεῖναι.

(4) L. I cap. I

sarà innalzato al potere: come neppure chi prende una bella moglie per aver seco lei una lieta vita, può sapere se per essa non avrà grandi dispiaceri: nè chi s'imparenta con una famiglia potente nella città può esser certo che per questo parentado non gli tocchi forse un giorno di andare in esiglio. Quelli che non credono che alcuna di queste cose dipenda dalla divinità, ma tutte dal senno umano, li diceva forsennati. Ma non meno forsennati ei chiamava coloro che consultano gli Dei su quelle cose che gli Dei rimisero allo studio ed al discernimento umano. » Posto che ci fosse un ordine di cose necessarie a sapersi dall'uomo per ben condursi nella vita, e non conoscibili colle sue facoltà naturali, non si poteva, senza negare la providenza, ammettere che per questo lato l'assistenza degli Dei fosse venuta meno al genere umano. Perciò Socrate credeva sinceramente alla divinazione, e specialmente all'oracolo delfico, che egli considerava come una rivelazione universale.

Ma oltre a questa egli ammetteva una rivelazione individuale, di cui si credeva specialmente favorito dagli Dei. Tale è il senso in cui si deve intendere il suo δαιμόνιον; ad esso ei credeva per le stesse ragioni per cui credeva alla providenza ed alla divinazione. Ciò si raccoglie da un luogo molto notabile di Senofonte (1). « Erasi divulgato per tutto, come Socrate dicesse che la divinità (τὸ δαιμόνιον) gli dava dei segni, e di qui specialmente io credo sia nata l'accusa che egli introducesse delle novità circa le cose divine. Ma egli non era in ciò novatore più di quel che lo siano tutti gli altri, i quali, avendo fede nella divinazione, badano agli uccelli, alle voci, agli incontri, ai sacrifizi. Costoro pensano che non già gli uccelli, nè le persone incontrate sappiano quello che è spediente a coloro che ricorrono per consiglio alla divinazione, ma che gli Dei, per mezzo di tali indizi loro il significhino: ed anche Socrate la pensava così. Ma, laddove gli altri quasi tutti sogliono esprimersi in guisa come se fossero li uccelli stessi e le persone incontrate quelle che li spingono a far tale o tal altra cosa, o ne li distolgono, Socrate al contrario parlava così per l'appunto come l'intendeva, e diceva che la divinità (τὸ δαιμόνιον) gli significava le cose. » La sola differenza adunque, che, secondo Senofonte, passava fra Socrate e il popolo in punto di divinazione, consisteva in questo, che Socrate si esprimeva con maggiore esat-

(1) Mem. l. 1. c. 1

lezza, e riferiva ogni rivelazione alla divinità, come a suo vero principio, senza passare pei mezzi, laddove il popolo, benchè nel pensiero s'accordasse con lui, nelle espressioni che usava, pareva arrestarsi ai mezzi, ed a questi attribuire gli indizi e gli avvisi divinatorii. Di qui si vede che pel genio, o δαιμόνιον di Socrate non si deve intendere un ente individuo e personale, che fosse in comunicazione con lui, e gli discoprisse arcane verità filosofiche. Era un segno divinatorio, come tutti gli altri, ai quali il popolo superstizioso attendeva, ed in cui credeva di poter leggere l'avvenire. Questo segno indicava a Socrate la convenienza o sconvenienza, l'esito felice od infelice delle imprese a cui egli, o alcuno de' suoi amici, od anche la città si accingesse (1). Se il segno gli si facea sentire, volea dire che l'impresa non potea riuscire a bene: se no, il suo silenzio era indizio di approvazione (2). « E molti de' suoi famigliari egli premoniva di fare tal cosa, di non fare tal altra, allegando il cenno fattogliene dal Nume. Chi non lo ubbidiva aveva poscia a pentirsene (3). » Questa rivelazione però differiva dalle comuni per due rispetti: 1.° perchè era un privilegio, un particolare favore concesso a Socrate dagli Dei. Tale era l'opinion sua, de' suoi famigliari (4), ed anche de' suoi giudici, i quali, come narra Senofonte nella sua Apologia, mormoravano contro di lui, per invidia, all'udirlo parlare di questo singolar favore divino; 2.° presupponeva la pietà e la moralità di colui che la riceveva (5). Onorando gli Dei, diviene più vivo il sentimento della loro presenza, della nostra dipendenza da loro, della sapienza e potenza con cui reggono ogni cosa, e se ne ottengono delle rivelazioni particolari. La sincera convinzione di Socrate a questo riguardo era in lui una naturale conseguenza della esaltazione del suo sentimento religioso, che gli facea considerare certi fatti naturali, come cenni della divinità.

Ma in che consisteva questo *segno*, per mezzo di cui egli riceveva le sue rivelazioni individuali? Era esso qualche fenomeno esterno e sensibile, oppure era un fatto interno, un fenomeno psicologico? Presso Platone

(1) Plutarco (de Genio Socrat. p. 58.) dice che Socrate avea predetto a molti la distruzione dell'esercito ateniese in Sicilia. Cicerone (de Divin. I. 54.) narra che Antipatro avea fatto una raccolta delle predizioni di Socrate, che si erano avverate.

(2) Plat. Apolog. p. 31. Phaedr. p. 242. Euthydem. p 272.

(3) Mem. l. I. c. I.

(4) Mem. l. IV. c. 3. n. 12.

(5) Mem. l. I. c. 4. n. 18.

è detto *una cotal voce* (1), come anche presso Senofonte (2) nell'Apologia, dove, per provare che Socrate non introduceva alcuna novità in fatto di divinazione, questa *voce* è messa nella stessa categoria colle voci degli uccelli, degli uomini, della Pitia, col tuono, ed altri simili suoni da cui si traevano augurii, come se ne traevano, e se ne traggono ancora presso il volgo da quel certo tinnito, che talvolta per qualche causa interna, si prova negli orecchi. Crederemo noi che il *segno* di Socrate fosse alcun che di simile, una sensazione reale ed oggettiva, od una sensazione reale bensì, ma senza oggetto, come quel tinnito, oppure una sensazione immaginaria? Una sensazione reale non poteva essere certamente: per altra parte non pare verosimile che un uomo così serio, così riflessivo, così chiaroveggente come Socrate potesse essere per tutta la sua vita, il zimbello di una allucinazione. Io trovo perciò più probabile l'ipotesi che il *segno* fosse un fatto psicologico, che egli rappresentava simbolicamente come una voce, perchè fra tutti i segni divinatorii, le voci, essendo invisibili, sono i segni più acconci a simboleggiare cose spirituali. Ma in che consisteva questo fatto psicologico? Secondo l'opinione del signor Cousin (3) questo fatto non sarebbe stato altro che *la voce intima della coscienza, organo immediato e incorruttibile della divinità, il quale ci dispensa dal ricorrere alla mediazione ufficiale della religione stabilita e de' suoi ministri.* Ma in 1.° luogo io osservo, che la voce della coscienza non risponde se non alle questioni morali, e queste non trascendono le facoltà conoscitive dell'uomo, epperciò non sono oggetto della divinazione, nè intorno ad esse è necessario consultare gli Dei, nè aspettarne i consigli. La virtù è scienza, e le questioni relative ad essa essendo questioni scientifiche si risolvono collo studio, e non già aspettando un'inspirazione divina. 2.° Gli avvertimenti che Socrate diceva di ricevere mediante quel *segno divino* non si riferivano a doveri morali, ma all'esito felice od infelice delle imprese. Per queste ragioni non pare che si possa ammettere la spiegazione del signor Cousin, come neppure si può con lui attribuire a Socrate una tendenza ad *esimersi dal ricorrere alla mediazione ufficiale della religione stabilita.* Socrate riteneva e praticava la religione comune.

---

(1) Apol. p. 31. φωνή τις ..... ἡ, ὅταν γένηται, ἀεὶ ἀποτρέπει με τούτου, ὃ ἂν μέλλω πράττειν κ. τ. λ. Theag. p. 128.

(2) Apologia, n. 12.

(3) Nouveaux fragments, p. 153.

« Era cosa notoria, dice Senofonte (1), che egli sovente faceva sacrifizi in casa, sovente anche sui publici altari della città. » Che se egli credeva ad una rivelazione individuale, non avea però meno fede nella divinazione comune, e nell'oracolo di Delfo, ed avea consigliato Senofonte a consultar questo oracolo prima della sua spedizione in Asia. – Se si considera che il *segno* di cui si tratta era sempre negativo (2), si troverà verosimile che il fatto psicologico ad esso corrispondente, consistesse in una cotale ripugnanza a fare od approvare certe imprese, proveniente da un presentimento confuso della loro mala riuscita, e forse anche un poco da quella irresolutezza che è frequente negli uomini molto riflessivi, com'era Socrate, la quale fa sì, che uno s'appigli al partito di non fare, come al più sicuro. Questa ripugnanza, questo presentimento, che mai non l'ingannava, era un fatto naturale e facile a spiegarsi, se si considera la perspicacia della sua mente, il suo retto senso, la conoscenza che egli possedeva degli uomini e delle cose; ma non potendo egli, ne' singoli casi, rendersene una ben chiara ragione, nella sua pia e quasi mistica disposizione d'animo, lo riferiva immediatamente alla divinità, persuaso, com'era, che oltre alla providenza universale, vi fosse una providenza individuale per ciascun uomo, e che questa non potesse in miglior modo assisterci ed aiutarci, che col farci conoscere le cose necessarie a sapersi, ed impossibili a scoprirsi colle nostre facoltà naturali.

Se è vero che gli Dei si pigliano pensiero degli uomini, e si compiaciono della pietà e giustizia umana: se è vero che l'uomo in grazia della conoscenza ch'egli ha degli Dei è immensamente esaltato al disopra dei bruti, ne segue che l'anima umana è immortale. Se, come diceva Socrate, *non varrebbe la pena di vivere*, se gli Dei fossero più propizi ai ricchi malvagi, che ai poveri dabbene, quanto meno varrebbe la pena di vivere, se ogni differenza fra buoni e malvagi, fra virtù e vizio, fra pietà ed empietà, dovesse in ultimo pareggiarsi nel nulla! Sembra perciò probabile che Socrate ammettesse ed insegnasse l'immortalità dell'anima. Addurrò in primo luogo ciò che egli dice nell'*Apologia* di Platone, perchè parmi di veder quivi ritratta al vivo la disposizione d'animo in cui un uomo morale e ragionevole dell'antichità dovea trovarsi, relativamente a

(1) L. I. c. 1.

(2) καὶ ἀποτρέπει με (ἡ φωνὴ) τοῦτου, ὃ ἂν μέλλω πράττειν, προτρέπει δὲ οὐποτε. Apol. p. 31.

tale questione. Ecco come egli parla ai giudici che aveano votato in suo favore. « Restate, ve ne prego, o Ateniesi, in questi pochi momenti che mi rimangono: nulla vieta che ragioniamo un poco insieme. Io voglio mostrare a voi, come ad amici che mi siete, la vera significazione di ciò che ora mi è accaduto. M'è avvenuto una cosa singolare, o giudici (chiamandovi giudici, vi do un nome che voi ben meritate). Il solito cenno divino per tutto il tempo passato fu sempre frequentissimo, e mi si opponeva in cose di poco momento, quando io fossi sul punto di fare qualche sbaglio. Ma ora che mi è sopravvenuto, come ben vedete, quello che ognuno potrebbe considerare, e generalmente si ritiene come il massimo de' mali, il segno divino non mi si è opposto, nè quando in sul mattino uscii di casa, nè quando venni al tribunale, nè in alcuna cosa ch'io stessi per dire nella mia arringa. Eppure già in molti altri discorsi soleva spesse volte troncarmi a mezzo la parola: ma ora in tutto questo processo, nè ad alcun mio atto, nè ad alcun mio discorso si oppose. Quale debb'io supporre che sia la causa di ciò? Io ve la dirò. Probabilmente ciò che ora mi è toccato è un bene, e noi tutti, che crediamo la morte essere un male, siamo in errore. Ed io ne ho una gran prova, poichè non è possibile che non mi si opponesse il solito cenno, se quello a che io andava incontro non fosse un bene. Consideriamo ancora la cosa da un altro lato, per vedere quanto fondata sia la speranza che ciò sia un bene. L'uno de' due è il morire: o come un non più esistere, un non aver più sentimento di cosa alcuna, o, secondo quel che si dice, è un mutarsi e trapassar che fa l'anima da questo ad altro luogo. Se la morte si riduce ad una privazione d'ogni senso, ad uno stato simile ad un sonno affatto sgombro di sogni, ella sarebbe un maraviglioso guadagno. Imperocchè se un uomo qualunque, posti a rincontro d'una sola notte dormita in sonno profondo e senza sogni, tutti i giorni e le notti di sua vita, e fatto il suo conto dovesse dire quanti giorni e quante notti passò meglio e più felicemente di quella, io stimo che, non che ad un privato, al gran re stesso, ne verrebbe facilmente trovato il novero. Se adunque la morte è un sonno così fatto, essa è un guadagno, poichè in tal caso tutto il tempo è come se fosse una sola notte. Se poi la morte è come una trasmigrazione da questo luogo ad un altro, se è vero ciò che se ne dice, trovarsi colà accolti tutti i morti, qual vi sarebbe maggior bene di questo, o giudici? Imperciocchè se discendendo uno all'inferno, liberatosi una volta da questi giudici solo di nome, ritrovasse colà i veri giudici, quali si

dice che quivi tengano ragione, Minosse, Radamanto, Eaco e Trittolemo e quant'altri semidei vissero giusti nella loro vita terrena, sarebbe ella questa una svantaggiosa trasmigrazione? Quanto pagherebbe qualunque di voi, di poter conversare con Orfeo, con Museo, con Esiodo, con Omero? Io, per me, voglio morir mille volte se questi racconti sono veri. Oltrechè nella mia condizione particolare, la dimora colaggiù avrebbe per me un piacere indicibile: io converserei con Palamede, con Aiace il Telamonio, e con altri antichi che morirono per una ingiusta condanna. Non senza diletto paragonerei coi loro i miei casi. E quel che più importa, mi tratterrei ad esaminare e ad investigare quei morti, come ho fatto sempre coi vivi, cercando chi di loro sia sapiente, e chi nol sia e creda d'esserlo. Che gusto ci avrei di esaminare a tu per tu colui che *condusse a Troia l'esercito molto*, od Ulisse, o Sisifo e mille altri uomini e donne, con cui discorrendo, conversando familiarmente, e facendo esami, si godrebbe una incomparabile felicità. E notate che ivi non si avrà più a temere di essere ucciso per questo. Poichè ed in ogni altra cosa quei di laggiù sono più felici dei vivi, ed in questa, che eglino, se vero è quello che se ne dice, per tutto il resto del tempo già sono immortali. Anche voi, o giudici, quanto alla morte, dovete nutrir buone speranze, e aver la mente solo a questa gran verità, che per l'uomo dabbene e in vita e in morte non vi è alcun male, e i fatti suoi non sono trascurati dagli Dei. Nè già il presente avvenimento è opera del caso, ma io veggo chiaro che il morire, e l'uscir dai travagli era il meglio per me. Perciò il solito segno divino in questa occasione non mi rattenne mai, nè io mi adiro punto con quelli che mi condannarono, nè con quelli che mi accusarono, sebbene non l'abbiano fatto coll'intenzione di farmi un bene, ma piuttosto di nuocermi. Per questo essi sono degni di biasimo. Pure voglio pregarli d'una sola cosa. O voi che mi avete accusato, e voi che mi avete condannato: quando i miei figli siano cresciuti in età, puniteli col medesimo flagello che io adoprava con voi, se mai vi accorgerete che essi attendano alle ricchezze, o ad altra cosa qualsiasi prima che alla virtù. E se eglino si tenessero da qualche cosa, e fossero uomini da nulla, fate loro la stessa rampogna che io usava con voi, cioè che essi trascurano il dovere, e si credono un gran che, mentre non hanno alcun valore. Se questo farete, voi renderete giustizia a me ed a' miei figli. Ma egli è omai tempo d'andarcene, io per morire, voi per restare in vita. Chi di noi vada a miglior sorte, lo sa Dio solo. » In questo passo, in cui sono raccolti

i pensieri con cui un uomo giusto, un filosofo dell'antichità pagana, poteva tranquillarsi lo spirito sul problema della morte e della vita futura, possiamo notare due cose: una cotale ironica condiscendenza con cui Socrate accettava le credenze e le immaginazioni del popolo sul futuro destino dell'anima, ed una fede sincera e profonda nell'assistenza degli Dei estendentesi non solo a questa fasi della vita terrestre, ma a tutta l'esistenza umana. Questi due elementi, scetticismo per le forme e le determinazioni dell'immaginazione, e fede assoluta nell'idea si trovano distinte nella seguente dichiarazione di Socrate nel Fedone (1). « Sappiate, dice Socrate a' suoi amici, che io spero di trovarmi colaggiù fra uomini dabbene; e questo non oserei asseverarlo; ma quanto al dovermivi trovare sotto il potere di Dei affatto buoni, sappiate che se alcun'altra cosa, questa io son pronto ad asseverare (2). »

La questione dell'immortalità dell'anima si connette con quella della destinazione dell'uomo. Questa destinazione non può consistere in altro che nel conseguire quello che per l'uomo è il sommo bene. Le azioni umane sono buone in quanto sono conformi a questo sommo bene; sono cattive quando non vi si confomano. Quindi è che il concetto del sommo bene è il principio della morale. Ora in che consisteva, secondo Socrate, il sommo bene umano? Non certamente in uno stato meramente passivo dell'animo, ma bensì nella attività. Senofonte ci narra (3), che interrogato Socrate quale gli paresse la miglior cosa a cui l'uomo potesse attendere, rispose essere l'εὐπραξία, vale a dire il *far bene, il ben condursi nella vita*. Interrogato di nuovo se credesse che l'aver buona fortuna (εὐτυχία)

---

(1) VIII.

(2) Il signor Cousin vede in queste parole l'espressione di un dubbio sulla permanenza dell'individualità e personalità umana dopo la morte, e ci rappresenta Socrate come inclinato ad accettare l'opinione panteistica che l'Io umano, destinato solo ad una esistenza fenomenale ed efimera, rimanga assorto nell'Ente infinito. Ma questa interpretazione non mi sembra fondata: 1.° perchè Socrate nel Fedone stabilisce il dogma dell'immortalità sopra argomenti morali, o ne deduce conseguenze morali: argomenti e conseguenze che perderebbero ogni valore se fosse vera l'interpretazione del signor Cousin, poichè certo, in tanto ha un'importanza morale e pratica il dogma dell'immortalità, in quanto si ammette che dopo la morte l'Io continui ad esistere come individuo, come persona, come consapevole di sè, del suo passato, del suo presente; 2.° perchè Socrate accettava le credenze popolari quando non erano troppo evidentemente ripugnanti alle idee razionali: ora il popolo credeva nell'immortalità in quanto ammetteva premi e pene in un'altra vita: una tale immortalità è ben altra cosa che l'immortalità panteistica.

(3) Mem. III 9 14.

fosse anche una occupazione a cui l'uomo potesse attendere, rispose: io credo che la fortuna e l'azione siano due cose affatto contrarie; poichè l'imbattersi, senza cercarla, in una cosa che ci conviene, io lo chiamo buona fortuna, il ben riuscire in una cosa, mediante istruzione e studio, lo chiamo *eupraxia*. Il sommo bene umano consiste adunque nell'attività razionale, nel disporre se stesso e tutte le cose che da se dipendono in un modo razionale e conforme al loro fine, come Iddio nell'universo dispone ogni cosa razionalmente, e la conduce al suo fine. Di qui segue che la condizione fondamentale della virtù e della perfezione umana è la scienza. E siccome non si può operare contro quello che si sa (1), ne segue che sapienza, scienza, virtù, felicità dell'uomo sono una medesima cosa. Questa dottrina gli viene espressamente attribuita da Senofonte (2). « Egli diceva che la giustizia ed ogni altra virtù (ἀρετὴ) è sapienza. Imperocchè le cose giuste, e tutte le altre che sono il prodotto della virtù, sono belle e buone: nè quelli che sanno farle, presceglierebbero altro invece di esse, nè quelli che non sanno, potrebbero farle, ma se vi si accingessero, sbaglierebbero, come accade appunto rispetto a tutte le cose belle e buone, che cioè, gli intelligenti le fanno, i non intelligenti non le possono, e se ci si mettono, le sbagliano. Posto adunque che le cose giuste e tutte l'altre belle e buone siano il prodotto della virtù, egli è chiaro che la giustizia ed ogni altra virtù è intendimento e sapienza. » L'argomentazione si potrebbe esprimere in questa forma: la virtù, la bontà, consiste nel far cose buone e belle: essa è quella qualità, senza di cui non si possono fare cose buone, e posta la quale, si fanno immancabilmente. Ma la scienza è appunto una tale qualità; dunque la virtù s'immedesima colla scienza, o per dir meglio il concetto astratto di virtù si concreta in quello più determinato di scienza. Onde Socrate (3) diceva essere impossibile che trovandosi la scienza nell'uomo, *qualche altro principio potesse dominarlo, e trascinarlo come uno schiavo*, e riguardava la scienza, come invincibile dominatrice di tutto l'uomo: negava la possibilità dell'intemperanza, del vedere il meglio ed attenersi al peggio. « Non distingueva, dice Senofonte (4), la sapienza dalla temperanza, dicendo che

(1) Senof. III 9. 4.
(2) Mem. III. 9. 5.
(3) Arist. Eth. Nic. VII. 3.
(4) III. 9. 4. ed anche IV. 6. 6. εἰδότας ὅτι ἃ δεῖ ποιεῖν οὐκ ἄν τινας οἴεσθαι δεῖν μὴ ποιεῖν ταῦτα,

chi conosce il buono e il bello, lo mette pure in pratica. » La stessa dottrina gli è attribuita da Aristotele (1): « Il vecchio Socrate diceva non essere possibile l'intemperanza, per la ragione che nessuno che conosca il male come male, potrebbe mai eleggerlo. » – Ma, se la virtù è scienza, di che cosa sarà ella scienza? quale ne sarà l'oggetto? forse il bene umano? Ma il bene umano è la virtù, onde seguirebbe che la scienza in cui consiste la virtù è scienza senza oggetto; è *scienza vana;* e questa è appunto l'obbiezione che fa Aristotele alla dottrina Socratica (2). La sola risposta possibile ad una tale obbiezione, era di ammettere il Bene assoluto, sussistente in se stesso, come oggetto della più sublime fra le scienze umane, di quella, il cui possesso rende l'uomo virtuoso e beato. Questa dottrina, di cui già si trovano i germi nell'insegnamento Socratico, fu poi sviluppata nelle scuole di Megara, di Elide e di Eretria.

Se il sommo bene umano consiste nella scienza, e se tutti gli uomini tendono al sommo bene, ne segue che tutti tendono alla scienza, e che ogni ignoranza, ogni errore, e quindi ogni malvagità è involontaria. Tutti vogliono il bene, ma solo quelli che sanno, lo effettuano: coloro che non sanno, fanno il contrario di ciò che vogliono: i primi sono veramente liberi; gli altri soggiaciono alla più grave d'ogni schiavitù. Dalla identità della virtù colla scienza conseguiva ancora che tutte le virtù si riducono ad una. « Diceva che la giustizia ed ogni altra virtù è sapienza (3). » Sapienza è pure la religiosità. « Dimmi, o Eutidemo, qual cosa credi tu che sia la religiosità? – Eut. Una cosa bellissima, per Giove. – Socr. Sapresti dire chi sia l'uomo religioso? – Eut. Quegli, mi sembra, il quale onora gli Dei. – Socr. Ma è egli lecito onorare gli Dei ciascuno a suo modo? – Eut. No, ma vi sono leggi a cui dobbiamo in ciò conformarci. – Socr. Adunque colui che sapesse queste leggi, saprebbe in che modo onorare gli Dei? – Eut. Così credo. – Socr. E colui che sa onorare gli Dei, non giudicherà mai che convenga ciò fare in altro modo da quello che egli sa? – Eut. No certamente. – Socr. Ora è egli possibile che alcuno onori gli Dei in modo diverso da quello che egli giudica conveniente? – Eut. Nol credo. – Socr. Quegli adunque che conosce ciò che è legit-

(1) Mor. magn. II. 6.

(2) Moralia magna, I. 1. *οὐκ ὀρθῶς ὅτι ὁ Σ. ἐπιστήμας ἐποίει τὰς ἀρετάς· ἐκεῖνος γὰρ οὐδὲν ὤετο δεῖν μάτην εἶναι· ἐκ δὲ τοῦ τὰς ἀρετὰς ἐπιστήμας εἶναι συνέβαινεν αὐτῷ τὰς ἀρετὰς μάτην εἶναι*

(3) Senof. Mem. III. 9. 5.

timo verso agli Dei, presterà loro un culto legittimo? - Eut. Certamente. - Socr. E culto legittimo vuol dire un culto quale si conviene? - Eut. E come no? - Socr. E chi presta agli Dei quel culto che si conviene è uomo religioso? - Eut. Certamente. - Socr. Adunque l'uomo religioso si potrebbe rettamente definire per quello che sa ciò che è legittimo verso gli Dei? - Eut. Così almeno pare a me (1). » Egli adunque riduceva tutte le virtù alla scienza, ammettendo una connessione necessaria fra il sapere, il giudicare sul da farsi (giudizio pratico) e l'operazione. Come è impossibile l'operare in modo diverso da quello che si giudica conveniente, così è impossibile il giudicare diversamente da quello che si sa. Per la stessa ragione immedesimava colla sapienza (2) la temperanza, raccomandando questa virtù, come condizione necessaria per una vita indipendente, occupata in nobili studi ed utili azioni. « L'aver bisogno di niente è proprio della divinità: l'aver bisogno di pochissime cose si accosta assaissimo alla divinità: ora la divinità è sommo bene, e chi si approssima ad essa, si approssima al sommo bene (3). » - « Se avendo noi guerra, diceva egli (4), volessimo eleggere il più capace di salvar noi, e di sottomettere i nemici, sceglieremmo noi un uomo che sapessimo esser solito a lasciarsi vincere o dalla gola, o dal vino, o dalle voluttà, o dalla fatica, o dal sonno? E come credere che un uomo tale valga a salvar noi, e a superare i nemici? Se poi venuti in fin di morte volessimo affidare ad alcuno o i figli maschii per educarli, o le figlie nubili per custodirle, o le sostanze per conservarle, stimeremmo noi degno della nostra fiducia in tali cose un intemperante? Ad un servo intemperante commetteremmo noi o il bestiame, o la dispensa, o la sorveglianza dei lavori? Vorremmo noi anche gratuitamente prendere per mastro di casa, o per ispenditore un tal uomo? Che se neppure un servo intemperante accetteremmo, quanto più dovremo guardarci di divenir tali noi stessi! Imperocchè non come l'avaro, che rubando altrui, crede arricchire se stesso, così l'intemperante, mentre nuoce agli altri, avviene che giovi a se stesso; che anzi, dannoso agli altri, molto più è dannoso a se stesso, se pure è un danno

(1) Senof. Mem. IV. 6. 2. et seq.

(2) Senof. Mem. III. 9. 4. σοφίαν δὲ καὶ σωφροσύνην οὐ διώριζεν, ἀλλὰ τὸν τὰ μὲν καλὰ καὶ ἀγαθὰ γιγνώσκοντα χρῆσθαι αὐτοῖς κ. τ. λ.

(3) Senof. Mem. I. 6. 10.

(4) Ib. c. 5.

gravissimo il mandare a male non solo la propria casa, ma il corpo e l'anima ancora. E nel conversare chi si piacerà con un uomo, del quale sappia che egli si diletta più delle squisite vivande e del vino, che degli amici, e sta più volentieri colle cortigiane che co' suoi famigliari? Non è adunque conveniente, che ogni uomo, riconoscendo la temperanza come base della virtù, questa primieramente si studi di gettarsi ben salda nell'anima? Poichè senza di essa chi potrebbe imparare alcuna cosa buona, ed occuparsi in essa con lode e con frutto? E chi potrebbe, servendo ai piaceri, non trovarsi in una turpe condizione e del corpo e dell'anima? Io per me credo, per Giunone, che un uomo libero debba augurarsi di non imbattersi mai in un servo di tal fatta, e chi è schiavo di tali piaceri debba supplicare gli Dei che lo facciano capitare sotto qualche buon padrone, essendo questa per lui l'unica via di salvarsi. »

Recherò ancora, a questo proposito il suo dialogo con Antifonte sofista, perchè esso ci ritrae il modo di vivere di Socrate e de' suoi famigliari. « Volendo Antifonte distogliere dalla conversazione di Socrate quelli che la frequentavano, una volta, alla loro presenza, gli parlò in questo modo: O Socrate, io pensava che gli uomini che attendono alla filosofia dovessero diventar più felici; ma parmi che tu raccolga dalla filosofia tutto il contrario. Quel che è certo è che tu vivi in modo, che neppure un servo ci starebbe sotto un padrone che lo trattasse così. I tuoi cibi e le tue bevande sono dell'infima qualità; il tuo vestire non solo è povero, ma sempre lo stesso, estate ed inverno, e tu vai sempre scalzo e senza tonaca (1). Oltre di che tu non ricevi denaro, il cui acquisto ci rallegra tanto, e il cui possesso ci rende più libera e più gioconda la vita. Se adunque, come i maestri nelle altre professioni rendono i discepoli imitatori di sè, così tu farai co' tuoi seguaci, fa conto di essere il maestro della miseria. E Socrate gli rispose: a quanto pare, o Antifonte, tu credi che io viva sì miseramente, che, ne son certo, preferiresti la morte ad una vita simile alla mia. Orsù adunque ricerchiamo che cosa tu abbia osservato di sì gravoso nella mia maniera di vivere. Forse questo, che laddove coloro che pigliano denaro sono costretti a far quello per cui sono pagati, io che non ne prendo, non mi trovo nella necessità di trattenermi con chi non vorrei? O trovi tu sì cattivo il mio vitto, perchè

(1) Cioè col solo pallio, come ad imitazione di lui usarono poscia i Cinici.

sia meno sano del tuo o meno atto a mantenermi in vigore? O forse perchè le mie vettovaglie siano più difficili a provvedersi che le tue, perchè più rare e più care? O perchè riescano a te più soavi le vivande che ti fai servire in tavola, che a me le mie? E non sai che chi mangia di buona voglia non ha bisogno di companatico, e chi beve di buona voglia non cerca altra bevanda che quella che ha in pronto? E quanto al vestire, sai bene che quelli che ne mutano, il fanno a cagione del caldo e del freddo, e le scarpe si portano per non essere impediti di camminare da ciò che può offenderne i piedi. Or bene, m'hai tu già veduto a cagione del freddo rimanere in casa più che altri, o negli ardori estivi contendere con alcuno per l'ombra, o per male ai piedi tralasciare di andare dove volessi? E non sai che uomini per natura debolissimi di corpo, coll'esercizio divengono, più dei robusti che si trascurano, valenti in quelle prove a cui si esercitano, e più facilmente le sostengono? E non pensi tu adunque che studiandomi coll'esercizio di indurare il mio corpo a qualsivoglia accidente, io sopporti ogni cosa più facilmente di te che non ti eserciti? »

« E se io non sono schiavo del ventre, del sonno e della lussuria, qual altra credi tu che ne sia la causa, se non che io conosco altri piaceri più soavi di quelli, piaceri che non solo mi rallegrano nell'atto del godimento, ma mi danno speranza di esserne vantaggiato in perpetuo. Tu sai pure che gli uomini che s'accorgono di non riuscir bene in nulla, non sono di buon umore; per contrario quelli che si credono di attendere con buon successo o all'agricoltura, od alla navigazione, o ad altri traffichi, come gente che fa bene i fatti suoi, hanno il cuor lieto e contento. Ma da tutte queste buone fortune credi tu che provenga un piacere tanto grande, quanto dalla coscienza di diventar migliore, rendendo anche migliori gli amici? Or bene io vivo sempre in questa coscienza. Che se si tratti di giovare agli amici od alla città, quale dei due ne avrà più grande agio e ne troverà più facilmente il tempo, quegli che vive al modo mio, oppure quegli che vive in quel modo che tu predichi beato? Chi dei due durerà più facilmente alle fatiche della milizia, quegli che non può stare senza un vitto dispendioso, o quegli che si contenta di ciò che può avere? Chi sosterrà più a lungo un assedio, colui che abbisogna di cose che a stento si possono procacciare, o colui che si appaga di cose facilissime a provvedersi? A quel che pare, o Antifonte, tu riponi la felicità nelle delizie e nel lusso; io al contrario giudico che il non avere alcun bisogno

sia cosa divina, e l'averne il meno possibile sia cosa prossima alla divinità: ora ciò che è divino è ottimo, e ciò che s'approssima al divino s'approssima all'ottimo. » – In un altro colloquio gli diceva: « Anch'io, o Antifonte, come altri si diletta d'un buon cavallo, d'un buon cane, d'un buono uccello, altrettanto, e più ancora mi diletto de' buoni amici, e se io so qualche cosa di buono, loro la insegno, e ad altri li raccomando dai quali io creda poter essi ricevere qualche aiuto a progredire nella virtù. E svolgendo in compagnia degli amici i libri degli antichi, ricerchiamo i tesori di sapienza che essi vi deposero, e se troviamo alcun che di buono, lo mettiamo da parte, e reputiamo a grande guadagno se possiamo giovarci a vicenda. »

Dalle cose dette apparisce quanto fosse privo di fondamento il rimprovero, che, come attesta Senofonte, alcuni scrittori contemporanei facevano a Socrate, che cioè egli fosse bensì valentissimo ad eccitare gli uomini alla virtù, ma incapace di segnar loro precisamente la via, e non avesse, nè sapesse indicare agli altri un ideale positivo e chiaro, e i mezzi per effettuarlo. Il suo ideale era positivo e concreto: il concetto che egli avea del sommo bene umano constava di tre elementi: 1.° l'attività razionale ossia la partecipazione al bene in sè per via della scienza; 2.° l'indipendenza dell'animo, la sua sufficienza a se stesso, e come mezzo per conseguirla, la temperanza e la limitazione dei bisogni; 3.° la soddisfazione intima, il piacere, che egli cercava non già negli stati passivi dell'anima (ἐν εὐπαθείαις), ma nell'eupraxia, nell'attività ordinata, razionale e benefica, nel sentirsi divenire di giorno in giorno migliore. Le scuole che sorsero dalla conversazione Socratica si differenziarono l'una dall'altra, in quanto alla dottrina morale, secondochè diedero il predominio all'uno o all'altro di questi tre elementi. La scuola Megarica pose in rilievo il concetto del bene in sè, nel quale volle riconoscere determinato e concreto l'Ente uno degli Eleati. La scuola Cinica diede la prevalenza al secondo elemento, riponendo il sommo bene nell'assoluta indipendenza dalle cose esterne e dagli eventi di fortuna, e come mezzo per giungervi proponendo la soppressione d'ogni bisogno non naturale e necessario. La scuola Cirenaica restrinse il suo ideale nel terzo elemento riponendo il sommo bene nel sentimento piacevole.

E qui viene opportuna una osservazione sulla differenza fra l'etica moderna e quella degli antichi. I moralisti moderni si affannano in cerca di quello che essi chiamano supremo principio della morale, di quel

principio da cui derivano tutti i doveri, e da cui questi ricavano la loro forza obbligatoria. Chi lo ripone nella ragione, chi nel sentimento, chi in una idea, chi in una autorità estrinseca. Gli antichi ponevano la questione in modo più semplice, e, siccome parmi, più giusto. Essi cercavano quale sia il sommo bene per l'uomo, quale sia l'ideale a cui egli deve aspirare, e nella cui progressiva attuazione consiste la perfezione morale e la beatitudine. La morale era certo anche per essi la scienza della virtù umana, ma la parola *virtù* (ἀρετὴ) avea per loro un significato più ampio che pei moderni; essa significava *bontà* nel senso generale ed etimologico della parola: la virtù umana è *bontà*, perfezione di tutto l'uomo, e non solo dello spirito, nè di una sola facoltà dello spirito: i vocaboli esprimenti l'atto virtuoso (officium, καθῆκον, κατόρθωμα) non involgono il concetto di un debito da pagarsi, di un obbligo da compiersi, come la moderna parola *dovere*, ma piuttosto il concetto di cosa ben fatta, cosa convenevole, azione retta, cioè conforme all'ideale: la *doverosità* (mi si perdoni il nuovo vocabolo) di tali atti tutta consiste nella loro bellezza morale, nella loro onestà, nella loro lodevolezza intrinseca ed assoluta: ogni azione bella è un dovere, come ogni dovere è un'azione bella: ond'io credo che un moralista antico, un Platonico, uno Stoico non avrebbe potuto ammettere le distinzioni fra l'obbligatorio e il supererogatorio, fra il precetto e il consiglio. Ma si domanda: che cosa avvi di obbligatorio e di imperativo in un ideale? L'aspirarvi può forse essere un dovere assoluto, una necessità morale? Un ideale può esser bello, ammirabile, attraente, inspiratore di azioni sublimi, ma il sentimento che ha il soggetto, di questa potenza attrattiva, e inspiratrice è un fatto psicologico ben diverso dal sentimento dell'obbligazione. Come poteva spiegarsi questo secondo fatto, nel punto di vista dell'etica antica? – Per rispondere a questa domanda dobbiamo fare alcune osservazioni sulla assolutezza del dovere morale.

Le scienze pratiche e le arti, in quanto che danno dei precetti sul da farsi, impongono certi doveri (1), ma l'obbligo di seguire quei precetti, di compiere quei doveri non è assoluto, ma condizionato, eccetto che in quella scienza pratica che chiamasi etica. Così p. e. la scienza igienica dice all'uomo: tu *devi* osservare tale o tal altra regola di vita

(1) V. Idea di una filosofia della vita, vol. I. p. 123

se vuoi conservare la salute. Ma l'obbligo di conservare la salute non è l'igiene che lo imponga, ma un'altra scienza superiore. Così pure l'agricoltura dice: tu *devi* coltivare il tuo campo in tale o tal altro modo *se* vuoi raccoglierne il massimo prodotto. Ma essa non c'impone il dovere di proporci questo scopo; la scienza morale è la sola che ci imponga doveri assoluti. Essa dice a ciascuno: opera e vivi in questo modo, se vuoi essere in atto quello che sei per essenza, uomo ragionevole; se vuoi effettuare il tuo ideale; ma questo stesso ideale essa lo impone come un dovere da adempiersi non già soltanto sotto una certa condizione, ma assolutamente. Tutti i suoi precetti si possono restringere in questa formola: sii uomo, che è quanto dire: sii ragionevole, esprimendo la verità che tu conosci, in ogni tua parola, in ogni tua azione, e realizzando l'ideale che virtualmente è insito nel tuo essere: od in altri termini: coopera co' tuoi sforzi alla azione divina che ti crea uomo, e ti spinge verso la perfezione. Questo precetto è assoluto, valido per se stesso, non bisognoso di alcuna ragione estrinseca. E invero, cosa rispondere a chi domandasse per qual *ragione* si debba essere ragionevole come ne' pensieri, così pure nelle parole e nelle opere? Chi fa una tale questione non ammette già forse implicitamente che ogni nostra determinazione debba avere una ragione, cioè essere ragionevole?

Un profondo sentimento di questo dovere di sforzarsi alla effettuazione del proprio ideale, di essere ragionevole, giusto, obediente alla divinità, è la base del carattere morale di Socrate. Più che nei discorsi egli esprimeva questo sentimento nelle sue azioni e in tutta la sua vita: non faceva professione d'insegnare la virtù, come i Sofisti, ma la predicava coll'esempio. « Non si professò mai maestro di virtù, ma coll'esempio suo dava speranza a quelli che seco usavano, di pervenire, imitandolo, allo stesso grado di perfezione (1). » Questo sentimento del pregio assoluto della giustizia, gli diede il coraggio di resistere, con pericolo della propria vita alle ingiuste esigenze del popolo che voleva la condanna dei nove generali vincitori alle Arginuse, ed in altra occasione, all'ingiusto comando dei trenta tiranni di eseguire l'arresto di Leone da Salamina, che essi volcano mettere a morte (2). Questo stesso amore della giustizia,

(1) Senof. Mem. 1. 2. 3.
(2) Plat. Apol. p. 32.

che per lui s'immedesimava coll'amor della sapienza e della verità, congiunto all'amor della patria, e alla persuasione di dovere ubbidire a qualunque costo ai cenni della divinità, gli diede la forza e la costanza per compiere la missione impostagli dal Dio di Delfo, di smascherare la falsa e presuntuosa sapienza, di riscuotere gli uomini dalle loro illusioni, di richiamarli dalle vane cure intorno ai beni esterni, alla cura ed alla educazione dell'animo. E finalmente, per amore della giustizia egli incontrò la morte; poichè probabilmente sarebbe sfuggito alla condanna, se avesse voluto difendersi con quelli artifizi, che erano in uso, supplicando i giudici, e conducendo loro innanzi la moglie ed i figli. Ma egli non volle fare una cosa che stimava contraria alla sua dignità, all'onore della repubblica ed alla giustizia, « imperocchè, diceva egli, il giudice non siede a dispensare la giustizia quasi fosse un favore: egli anzi ha giurato di non far grazia a chicchessia, ma di conformarsi alla legge nel dare la sua sentenza. Non conviene adunque nè che noi vi avvezziamo a spergiurare, nè che voi vi ci avvezziate (1). » Dopo la condanna poi, avrebbe potuto fuggire di carcere, coll'aiuto degli amici, ma non volle, perchè il rendere irrita una sentenza pronunciata gli pareva un atto sovversivo dell'autorità delle leggi (Critone). Quando si considera tutta la vita di quest'uomo, *il più eccellente*, *il più giusto*, *il più savio*, *il più beato* che mai fosse vissuto (2), non si può a meno di credere alla verità storica, se non di tutti, almeno di una gran parte degli ammirabili discorsi intorno alla giustizia, che Platone gli attribuisce nel Critone, nel Gorgia e nella Repubblica. Solo un uomo come Socrate poteva parlare in tal maniera, od almeno inspirare chi scrisse quei dialoghi. Solo un uomo come Socrate poteva esercitare quella singolare influenza che gli si attribuisce sopra quelli che conversavano con lui. Fare la conoscenza di Socrate, arrivare a comprendere quest'uomo era come un rinascere ad una vita nuova. « Non sono ancor tre anni, dice Apollodoro nel Convito (3) di Platone, da che io converso con Socrate, e mi fo uno studio di sapere in ciascun giorno che cosa egli dica, che cosa egli faccia: prima d'allora io correva qua e là alla ventura, ed immaginandomi di far qualche cosa, ero infelice più di chichesia: non meno infelice di te

(1) Apolog. XXIV.
(2) Plat. Phaed. in fine. Senof. Mem. l. IV. in fine.
(3) Pag. 173.

che credi doversi fare tutt'altro che filosofare. » Fedone, nel dialogo che da esso si intitola, dice: « il ricordarmi di Socrate, o parlandone io stesso, o udendone altri a parlare è sempre per me la cosa più piacevole del mondo. » La potenza della parola Socratica viene descritta da Alcibiade nel Convito (1). « Quando ascolto i suoi discorsi il cuore mi palpita più fortemente che ai Coribantisti, e mi cadono dagli occhi le lagrime. E vedo che lo stesso accade a molti altri. All'udir Pericle, ed altri buoni oratori, io trovava certo che essi parlavano bene, ma non sentiva in me nulla di somigliante, nè si turbava l'anima mia, nè si sdegnava contro di sè riconoscendosi in uno stato degno d'uno schiavo. Ma da questo Marsia (2) fui spesse volte ridotto a tal punto, che la vita non mi pareva più tolerabile in quello stato in cui sono..... Questi mi costringe a confessare che manchevole io stesso e di molto, pur mi trascuro, e fo gli affari degli Ateniesi..... Dinanzi a lui solo fra gli uomini io provo quello di cui nessuno mi crederebbe capace, la vergogna: perchè sono conscio di non potere contradire e negargli che si debba fare quello a che egli mi eccita, e di non poter resistere, appena partitomi da lui, alla brama di essere onorato dalla moltitudine. » È impossibile che un uomo eserciti sugli altri una tale potenza, se non è dominato da una grande idea. E questa era per Socrate l'idea della filosofia, considerata come la perfezione di tutto l'uomo, come l'esercizio assoluto della ragione. La filosofia era per lui speculazione e pratica ad un tempo, la virtù era scienza, il supremo dovere morale era per lui il dovere di cercare la verità, di consultare la ragione, e seguirla come unica guida (3). Il sentimento morale s'immedesimava coll'istinto speculativo, col sentimento della propria natura razionale, e come tale partecipante al divino, e fornita di una dignità assoluta. Da questa idea, colla quale armonizzava tutta la vita di Socrate, nasceva la singolare efficacia della sua conversazione, la sua potenza di sollevare ad una nuova vita quelli che lo comprendevano; poichè ben può dirsi che la rigenerazione dell'uomo, il suo rinascimento ad una vita superiore incomincia da quel punto, in cui sollevandosi sopra le vane cure

(1) Pag. 215. et seqq.

(2) Poco prima Alcibiade avea paragonato Socrate al satiro Marsia per la somiglianza del volto, e per la sua potenza di cattivarsi gli animi coi discorsi, come quel satiro col suono del flauto

(3) Nel Critone p. 46. egli si professa τοιοῦτος οἷος τῶν ἐμῶν μηδενὶ ἄλλῳ πείθεσθαι ἢ τῷ λόγῳ, ὃς ἂν μοι λογιζομένῳ βέλτιστος φαίνηται.

ed opinioni del volgo, acchetato ogni timore, ogni speranza, ogni passione, ogni agitazione dell'animo che si riferisca a beni o mali immaginarii, si risolve una volta per sempre a ricercare la verità colla propria ragione, e nella verità la sua beatitudine. Felice chi possiede vigor d'animo, potenza di mente, costanza di volontà sufficiente alla esecuzione di tale proponimento! Poichè, non conviene dissimularselo, gravi sono le difficoltà che vi si attraversano, ardua è la battaglia che avrà sovente a sostenere con se stesso chi imprende a filosofare. La filosofia è il prodotto della ragione umana, è la stessa ragione umana attuata e perfetta. Ma nell'uomo qual è in realtà non vi è soltanto la ragione: vi è la fantasia, vi è il senso, vi è la facoltà di credere, vi è l'affetto. L'educazione inoltre ha prodotto in lui una seconda natura, e le instituzioni religiose e sociali sotto cui egli è cresciuto vi hanno lasciata un'impronta profonda e indelebile. Quindi è che colui che incomincia a filosofare, si trova da principio in lotta inevitabile con se stesso: in lui l'uomo nuovo, l'uomo-ragione sorge contro l'uomo vecchio, contro l'uomo della educazione e dell'abitudine, e lo chiama a giudizio: il cittadino del mondo sorge contro il cittadino di un dato stato, dominato dai pregiudizi e dai sentimenti esclusivi ed egoistici della sua nazione. Ma questa lotta non può durare a lungo se non negli animi deboli: negli animi forti, ma poco veggenti, essa finisce colla condanna e colla reiezione assoluta di tutto ciò che non è puramente e prettamente razionale. Al contrario gli animi forti, chiaroveggenti, e capaci di comprendere, di tolerare, di abbracciar con amore tutto ciò che vi ha nella natura umana, gli animi che sanno dire col Terenziano Cremete: *homo sum, humani nihil a me alienum puto*, non tardano a sollevarsi al disopra di tutte le contradizioni, in una regione dove tutto è pace, tutto è conciliazione ed amore. Essi riconoscono che tutto ciò che esiste, ha la sua ragione di esistere: essi sanno che la forma più o meno fantastica in cui s'involge l'idea non nuoce alla efficacia di questa: essi sanno comprendere le esigenze della natura umana, e senza abbandonare il punto di vista a cui si sono elevati, sanno collocarsi mentalmente in quello degli uomini del popolo. E Socrate viveva in questa disposizione d'animo. Egli, come filosofo, esortava i concittadini ad educare in se stessi la natura umana, a voler esser uomini prima che Greci ed Ateniesi: che anzi, dalla stessa grandezza e celebrità della sua patria ricavava una ragione per esortare al culto dell'umanità. « O valent'uomo, diceva egli nelle sue

esortazioni (1), tu cittadino d'Atene, d'una città sì grande, sì cospicua per sapere e potenza, non ti vergogni di mettere tanto studio nel procacciarti ricchezze, riputazione ed onori, e intanto non darti verun pensiero nè della sapienza, nè della verità, nè del miglioramento dell'anima? » Ma nel tempo stesso, come uomo fornito di gran senno pratico, sapeva riconoscere tutto ciò che vi era di salutare e di eccellente nella educazione greca, quale la prescriveano i prischi instituti degli avi. Come filosofo egli inclinava certo ad ammettere l'Intelligenza una e suprema, ordinatrice dell'universo, ed approvava il gran concetto di Anassagora: ma alla perspicace sua mente non poteva sfuggire ciò che vi era di profondo, di vitale, di benefico nella antica religione del popolo. Come filosofo egli avea intraveduto una rivelazione immediata della divinità alla mente umana, senza intermedio d'augurii, senza bisogno di consultare il volo degli uccelli, o le viscere palpitanti delle vittime: ma nello stesso tempo vedeva quale importanza avesse nella Grecia l'oracolo delfico, e la divinazione quale era stabilita, e al Dio di Delfo egli inviava i suoi amici bisognosi di consiglio. Sarebbe erroneo ed ingiusto il ravvisare in ciò una ipocrita e timida condiscendenza ai pregiudizi del volgo: Socrate credeva sinceramente alla divinazione tradizionale e ordinaria; la sua fede nella providenza divina era tanto sincera e profonda, che lo induceva a credere che gli Dei assistessero e dirigessero gli uomini con tutti i mezzi possibili, anche coi segni della divinazione ordinaria. Come filosofo egli sapeva che il miglior culto che si possa rendere alla divinità consiste nella osservanza della giustizia, e diceva che gli Dei si compiacciono delle piccole offerte degli uomini giusti più che delle opime dei malvagi: ciò era lo stesso che dire che le pratiche per se stesse non hanno valore nè merito, nè efficacia alcuna a propiziare la divinità, quando siano disgiunte da buona disposizione dell'animo. Ma ciò non gli toglieva di vedere che un culto esterno e comune era necessario allo stato, e quando i suoi amici gli domandavano in qual modo si dovesse onorare la divinità, rispondeva colla Pitia *νόμῳ πόλεως*, *secondo l'usanza della città*. Egli finalmente, vedeva, come filosofo, i difetti delle instituzioni del suo tempo, vedeva l'ingiustizia della condanna che lo colpiva, ma intanto riconosceva la necessità di rispettare queste instituzioni, di astenersi da ciò che poteva

(1) Apolog. p. 23.

diminuire l'autorità delle leggi, e invece di salvarsi colla fuga, come avrebbe potuto, come lo esortavano i suoi amici, e come forse si aspettavano quelli stessi che l'avevano condannato con tanta leggerezza, e se ne pentirono così presto (1), anzi meglio rendere testimonianza colla morte a quei precetti di giustizia e di sommissione alle leggi, che egli avea sempre predicati colle parole e coi fatti. In lui adunque si riunivano e si accordavano in modo mirabile il filosofo e l'uomo pratico, il cittadino del mondo e il cittadino d'Atene, l'uomo investito d'una grande missione, e privilegiato dalla divinità di comunicazioni immediate, e l'Ateniese obediente alle leggi e osservantissimo della religion dello stato; esempio ben raro di quella felice armonia fra il pensiero e l'azione, fra le diverse facoltà e tendenze, nella quale consiste la perfezione e il più alto grado di vita.

---

(1) Diog. l. II 43.

DELLE DOTTRINE

DELL'ANTICA SCUOLA PITAGORICA

CONTENUTE

NEI

VERSI D'ORO

DEL CAV.

DOMENICO CAPELLINA

Memoria approvata nell'adunanza del 7 febbraio 1856.

DEI VERSI D'ORO

A PITAGORA ATTRIBUITI.

Volendo io ragionare de' *Versi d'oro*, di cui gli antichi fecero autore Pitagora, non è necessario che pigli ad esporre tutte le dottrine pitagoriche, di cui in que' versi è toccata soltanto una piccolissima parte, quale si è quella, che riguarda i doveri religiosi e morali de' seguaci di tale setta, secondo la duplice natura di lei mistica od ascetica nello stesso tempo, e pratica o perfezionatrice dell'uomo anche per quel che spetta alla vita mortale e alla social convivenza. Mi è d'uopo tuttavia per riuscire a ben determinare l'indole di quei versi e il tempo, in cui probabilmente furono composti, tener dietro storicamente allo svolgersi dell'idea pitagorica, ed accennare le forme, ch'ella andò di mano in mano pigliando finchè giunse a quell'ultima sembianza, sotto cui ce l'hanno tramandata coloro, che ultimi tra i Greci scrissero la vita del fondatore di quella celebre scuola.

Che Pitagora sia realmente esistito la è cosa, che non si può ragionevolmente mettere in dubbio; nè il nome di coloro, che gli si danno a maestri, e di quegli altri, coi quali visse, le vicende dell'Italia meridionale, tra le quali egli passò la sua vita e di cui fu parte egli stesso, e

il computo delle generazioni de' suoi discepoli finchè non furono per violenza dispersi, ci permettono di errare nella ricerca del tempo, in cui visse, che è il sesto secolo avanti l'era volgare, ponendosi la nascita di lui verso il 584. Tempi erano quelli, in cui le dottrine mistiche dell'Oriente ripigliavano la via della Grecia, loro dischiusa dal commercio, che gli uomini dell'Asia minore avevano coi grandi regni dell'Asia e coll'Egitto, commercio reso più facile dalla comune signoria de' Persiani dopo la caduta del regno di Lidia, e dopo le grandi conquiste di Ciro e di Cambise; e si compieva una reazione contra le dottrine materialistiche introdotte dai poeti epici della Ionia, reazione richiesta eziandio dal progredire delle greche intelligenze, che invano cercavano in quelli la soluzione de' misteri più grandi e più importanti per l'uomo, che è entrato nella via della riflessione, quali son quelli, che riguardano Dio, l'anima e la vita futura. Già un qualche indizio di questo misticismo noi troviamo in Esiodo, che da taluni è appunto considerato quale iniziatore delle mistiche dottrine, e in alcuni de' poeti ciclici, i quali insegnarono le purificazioni per ritornare alle anime la perduta purezza e renderle nuovamente degne di communicare cogli Dei, e dipinsero i premii e i castighi serbati alle anime dopo il loro dipartirsi dai corpi, che ebbero compagni nella vita terrena. Noi le vediam quindi progredire per opera di quei molti taumaturgi, che percorrevano le città della Grecia purificandole dopo le uccisioni avvenute nelle lotte civili e riconciliandole coi numi; e pigliare stabile fondamento nelle orgie e ne' misteri, che in quell'età appunto si vennero nella Grecia introducendo, e la cui istituzione è specialmente attribuita ad Orfeo (1). Ma quest'opera, per cui si risuscitavano forse nello stesso tempo le dottrine antiche de' Pelasgi, più pure e semplici delle posteriori, e si derivavano nuove correnti di principii ideali da quella grande ed inesauribile fonte, che è l'Oriente, era nuovamente impedita dallo spirito ionico, il quale, deposta la forma poetica, si faceva banditore del materialismo col linguaggio della filosofia. Chi avesse quindi voluto convenientemente promoverla, avrebbe dovuto non solo ricorrere a riti e pratiche religiose, ma ancora a principii dottrinali, ed istituire insieme una società mistica ed una scuola filosofica: e questo fece appunto Pitagora appena egli giunse nella Magna Grecia,

(1) V. per quanto riguarda le dottrine mistiche ed orfiche l'*Aglaophamus* del Lobeck, lib. II.

e in Crotone col doppio prestigio della bellezza e della eloquenza ebbe a sè d'intorno attirato il fiore dell'Italia meridionale, e uomini e donne egualmente reputando capaci de' suoi novelli insegnamenti. Vide egli che le nuove dottrine non si possono diffondere facilmente, se non da persone, che ne siano profondamente convinte, e da rigida disciplina legate tutte pensino ad un modo ed operino concordi per ottenere il medesimo scopo: e i membri della sua scuola strettamente congiunse al maestro col silenzio, colle iniziazioni, coll'autorità grandissima, che aveva saputo acquistare sopra di loro, talchè l'affermare che una cosa era stata detta dal maestro egli era come l'affermare ch'era una verità; e l'uno all'altro li avvinse con fraterna amicizia, che anche lontani esercitavano aiutandosi ne' loro bisogni e ponendo le sostanze loro in comune. Intanto meno aperto nelle sue lezioni essoteriche, più chiaramente nelle acroamatiche, parlava loro di Dio, che l'universo governa, quest'universo, che tutto era per lui musica ed armonia; parlava loro dell'anima umana, e la scienza de' numeri e quella delle figure, cioè la geometria, adoperava come simbolo de' suoi insegnamenti; e della musica, scoperti gl'intervalli de' toni, servivasi per ispiegare l'armonia del mondo e delle sfere e per placare i disordinati movimenti dell'anima e ridonarle quella calma, di cui abbisogna per le celesti contemplazioni. Tutto in quel fratellevole istituto era ordinato e regolarmente disposto, avvicendandosi l'insegnamento e i corporali esercizi, le passeggiate per luoghi ameni, i giuochi, le ginnastiche prove e le mense frugali in modo che i corpi non più del dovere nodriti e sufficientemente esercitati non fossero di peso all'anima o d'impedimento, ed ella potesse tendere costantemente al suo fine, che era quello di giungere alla cognizione di Dio. Quindi una grandissima forza comunicavasi alle menti loro, la quale unita a quella mirabile potenza, che è nella disciplina e nell'ordine, li faceva di molto superiori agli altri uomini di quelle città, in cui essi fiorivano, ed induceva questi a mettere nelle loro mani la somma delle cose, finchè una siffatta morale aristocrazia divenuta odiosa alle moltitudini fu cagione della rovina dell'intero istituto e dello sbandimento degli ultimi seguaci di quella nobilissima scuola.

Ma qual era la culla di questa santa dottrina ideale, che Pitagora era venuto ad insegnare fra i Greci d'Italia? Tre opinioni a questo riguardo vediam sostenute dai dotti, due delle quali ho già superiormente indicate. La dottrina pitagorica è di natura orientale. La provano tale la patria stessa di Pitagora, l'isola di Samo vicina all'Asia minore e, come questa,

a contatto delle grandi civiltà orientali, la tradizione, che attribuisce a Pitagora lunghi viaggi in Egitto e fra i Caldei ed i Magi, la testimonianza di Erodoto, il quale nota la somiglianza grandissima che era tra le istituzioni pitagoriche e quelle de' Geti non lontani dai confini dell'Asia, e le egizie, e tra le orgie pitagoriche e le orfiche e le bacchiche, la cui origine orientale era dagli antichi Greci concordemente riconosciuta (1), e l'indole simbolica di essa dottrina, così conforme a quella delle dottrine asiatiche e specialmente delle egiziane.

La dottrina pitagorica è d'indole greca ed ha le sue radici nelle antiche istituzioni pelasgiche e specialmente nelle tradizioni conservate presso la razza dorica più tenace, che le altre, di quanto era antico, e presso gli oracoli e i sacerdoti. A corroborare questa opinione giova pure il racconto de' viaggi di Pitagora in Creta ed a Sparta, che erano appunto i due più nobili focolari della dorica sapienza, e a Delfo ove si vuole che da Temistoclea apprendesse le sue dottrine morali, e quel suo farsi iniziare a tutti quanti i misteri, che in Grecia si conoscevano a que' tempi: ed è di grandissimo peso l'osservazione, che molti de' principii pitagorici già si trovavano qua e là sparsi nelle varie parti della Grecia, come le iniziazioni, le purificazioni, l'indole aristocratica del governo ed altre simili usanze.

La dottrina pitagorica è d'indole italica. Il primo argomento, che si arreca a sostegno di questa opinione, è la testimonianza del peripatetico Aristosseno, autorevole come d'uomo che nacque probabilmente di padre pitagorico e in quella parte d'Italia dove siffatta scuola filosofica ebbe nascita e svolgimento, e molto famigliarmente usò con Senofilo, Fantone ed Echecrate, ultimi fra i pitagorici de' tempi suoi. Ora afferma questo scrittore, secondo quel che ne riferisce Clemente Alessandrino, che Pitagora figliuol di Mnesarco fu Tirreno, e con lui si accordano nell'affermarlo tale Aristarco e Teopompo (2). La medesima opinione di Aristosseno trovasi riferita da Diogene Laerzio, il quale, dopo aver detto ch'egli lo ha per Tirreno, aggiunge, che ciò deve intendersi in questo senso, che Pitagora traesse l'origine sua da una di quelle isole, cui pos-

(1) V. Diog. Laerzio, Pythagoras, c. III. — Erodoto, l. II c. 81.

(2) Clemente Alessandrino nel lib. I degli Stromati, pag. 129: Πυθαγόραν μὲν οὖν Μνησάρχου, Σάμιον, ὡς φησιν Ἱππόβοτος, ὡς δὲ Ἀριστόξενος ἐν τῷ Πυθαγόρου βίῳ, καὶ Ἀρίσταρχος, καὶ Θεόπομπος, Τυρρηνὸν ὄν.

sedevano gli Ateniesi da poi che ai Tirreni le avevano tolte (1). E Suida chiamandolo Samio secondo il comune uso, avverte che per natura, ossia di nascimento, era Tirreno, e giovinetto ancora dalla Tirrenia venuto era a Samo in compagnia del padre (2). Un secondo argomento si deriva dalle *Quistioni convivali* di Plutarco, dove l'etrusco Lucio, discepolo del pitagorico Moderato, cogliendo un'opportuna occasione di parlar di Pitagora, sostiene lui essere stato non solo di origine, ma ancor di natali, Tirreno e in seu dell'Etruria cresciuto ed educato; e il prova col dimostrare come alcuni dei divieti contenuti ne' *simboli* pitagorici erano religiosamente dagli Etruschi osservati (3). A ciò si aggiunge l'affermazione di Placidio Lutazio, che le dottrine *tagetiche*, ossia le dottrine religiose dell'Etruria, erano affini alle pitagoriche, e la comune credenza degli antichi, che le istituzioni date ai Romani da Numa, che pur visse prima di Pitagora, avessero indole pitagorica sì che paressero da quella scuola desunte (4).

Quale di queste tre opinioni dobbiamo noi abbracciare per buona? Lusinghiera certamente per noi Italiani si è l'ultima, e l'orgoglio nazionale ci dovrebbe indurre ad accettarla senz'altro esame, se io non credessi che ce lo impedisca la convinzione, che le somiglianze, che passano fra le dottrine pitagoriche e le etrusche, non siano punto maggiori di quelle, che si notano fra loro, le orientali, e le istituzioni di Creta e di Sparta. Di una sola cosa si può essere sicuri, ed è che la fonte comune di esse dottrine è l'oriente e che fra tutti i sistemi filosofici della Grecia antica non vi ha alcuno che serbi tante tracce delle dottrine orientali ed asiatiche, quante ne serba quello della scuola del figliuol di Mnesarco. Se poi queste dottrine attingesse Pitagora direttamente dalle orientali regioni o fossero arrivate insino a lui passando prima pei principali focolari della civiltà dorica e dell'etrusca, mi pare quistione a sciogliere la quale non bastano gli scarsi documenti, che noi oggidì possediamo.

Toccata rapidamente questa intricata materia, egli è d'uopo che a ben determinare qual sia la dottrina pitagorica contenuta ne' versi d'oro

---

(1) Diogone Laer., Pythagoras, l. 1. Τυῤῥηνὸς ἀπὸ μιᾶς τῶν νήσων, ἃς κατέσχον Ἀθηναῖοι Τυῤῥηνοὺς ἐκβαλόντες.

(2) Πυθαγόρας Σάμιος φύσει δὲ Τυῤῥηνός ... σὺν τῷ πατρὶ ἐκ Τυῤῥηνίας ὡκησεν εἰς Σάμον.

(3) Questioni convivali, VII. 1.

(4) Questa tradizione accolta da Ovidio nel XV delle Metamorfosi è rigettata come falsa da Cicerone, de Rep. II. p. 38. 39, da T. Livio, lib. I. c. XVIII, da Dionigi d'Alicarnasso, II. 59, da Plutarco, in Numa 1, da A. Gellio, XVII 21.

da me si pigli a considerare per quali vicende la dottrina generale di quella scuola è passata e in qual modo la più antica sua forma possa essere da noi conosciuta. Egli è cosa certa e già affermata da Diogene Laerzio, che Pitagora e i suoi primi discepoli nulla rivelarono cogli scritti di quel che apparteneva alle dottrine della loro setta, e i libri loro attribuiti eran tenuti in conto di riconosciute imposture (1). Nè l'istituto, nel cui seno avrebbero potuto conservarsi incorrotte, ebbe lunga durata; poichè lo stesso Pitagora pel tumulto concitatogli contro da Cilone fu costretto a fuggire in Metaponto, ove dicono ch'egli terminasse la sua vita, e i seguaci di lui, perseguitati sempre in appresso dalla medesima fazione popolare, finalmente dovettero cercare salvezza colla fuga, più non condussero vita comune, e però gli uni dagli altri disgiunti forse perdettero in parte l'arcano significato delle loro dottrine e v'introdussero nuovi elementi (2). La più antica allusione alle dottrine pitagoriche noi l'abbiamo in alcuni versi di Senofane, il fondatore della scuola eleatica od italica, il quale scherza intorno alla dottrina della metempsicosi, forse esagerandola oltre i limiti, in cui l'aveva Pitagora intesa (3). Primo Filolao espose colle sue scritture le dottrine della scuola, ed è quello, su cui si fondarono specialmente coloro, che ne parlarono in appresso; ma egli era lontano di quasi un secolo dall'istituzione del sodalizio pitagorico in Crotone, e non potè forse in tutta la loro indole primitiva conoscere i principii del fondatore di quello, che già avevano dovuto ricevere da' suoi successori un molto maggiore esplicamento e numerose applicazioni. Giova ancora il notare come in questo spazio di tempo, che corse fra Pitagora e Filolao, molti de' pitagorici, che si erano per la Grecia diffusi, o perduto il vero significato de' simboli primitivi, o lasciato troppo libero il freno alle mistiche loro tendenze, o spinti anche da amore di lucro a fomentare le popolari superstizioni, avevano falsato il carattere della dottrina introducendo superstiziose pratiche nelle loro orgie e confondendole colle bacchiche ed orfiche (4): alcune eziandio delle opinioni di filosofi di altre scuole, e specialmente dell'eleatica, si erano confuse colle pitagoriche, come la condanna di ogni vivanda animale, che fu pronunziata da Empedocle assai più assoluta che

(1) In Pythagora, v. 7. xv. 15. — In Empedocle, n. 55.
(2) Giamblico, Vita di Pitagora, c. xxxv.
(3) Son tali versi citati da Diogene Laerzio, Pythagoras, c. xx. 36.
(4) Erodoto, nel luogo sopra citato.

non da Pitagora, secondo che afferma il peripatetico Aristosseno (1), e fors'anche la notizia dell'abborrimento di lui dalle fave, che, se dobbiam credere ad A. Gellio, era nata dalla falsa interpretazione d'un precetto simbolico del medesimo Empedocle, il quale usando quel nome in metaforico significato biasimava l'abuso de' venerei diletti (2). E ben presto lo scadimento di que' falsi pitagorici o pitagoristi era giunto a tal segno, che gli scrittori dell'antica commedia li ponevano sulla scena e i comici posteriori li rappresentavano come uomini dimentichi d'ogni dignità, e ignoranti seguaci di certe pratiche esagerate e degne di riso (3). Questo ho creduto conveniente di avvertire perchè non si scambino le stranezze di costoro colle sole sicure notizie, che noi abbiamo di quella scuola, registrate nei libri di Platone e di Aristotele sulla testimonianza di Filolao, di Eurito e di Archita, le quali notizie debbono perciò servire come di regolo e pietra di paragone a chi voglia conoscere l'autenticità di dottrine agli antichi pitagorici attribuite. E a Platone e ad Aristotele vuolsi ancora aggiungere il già nominato Aristosseno, de' cui scritti noi dobbiamo gravemente lamentare la perdita, sopratutto di quelli, in cui trattava di cose appartenenti a quella scuola, quali erano le vite di Pitagora e di Archita e il libro delle pitagoriche sentenze, di cui solo ci restano alcuni pochi frammenti (4).

Spenta la setta, i principii pitagorici si andarono sempre più abbuiando, mescolandosi con loro le dottrine di Platone, che, pur seguendo i pitagorici in alcuni de' suoi dialoghi, era venuto a conclusioni e a sistemi affatto diversi (5); poi colle mistiche esagerazioni de' neo-pitagorici e neoplatonici, che fecero di Pitagora un operatore di miracoli e un semidio, e molte delle cose gli attribuirono, che nelle dottrine orfiche ed eleusiche erano contenute. Si raccontò allora che Pitagora era lo stesso dio Apolline, il quale era venuto dal paese degl'Iperborei, e che mutatosi una volta aveva lasciato scorgere una delle sue cosce, che era d'oro schietto: allora, oltre all'educazione di Zamolsehi, adorato come Dio dai Geti, gli si at-

(1) Diogene Laerzio, Pitagora, XVIII. 20. — Ateneo, l. VII. pag. 308.

(2) A. Gellio, lib. IV. c. 11.

(3) Diogene Laerzio, ibid. c. XX. 37. 38. — Ateneo, III. 108. IV. 161.

(4) I frammenti di Aristosseno furono raccolti da Guglielmo Leon. Mahac nella sua *Diatribe de Aristoxeno philosopho peripatetico*, che fu ristampata nel *Thesaurus criticus novus* di G. H. Schaeffer Lipsia, 1817.

(5) V. Berlini, Saggio storico sui primordii della filosofia greca, p. 98.

tribuirono colloquii con Abari, sacerdote d'Apolline iperboreo, il quale con lui abboccatosi il riconobbe pel suo Dio e gli diede una sua saetta, portato dalla quale egli era passato per luoghi inaccessibili e visitato aveva molte città purificandole e liberandole dai mali, ond'erano travagliate: il perchè Pitagora, mostratagli in segno di divinità la sua coscia d'oro, confessò di esser Dio e di aver preso umana forma per meglio beneficare gli uomini con loro communicando. E molte altre cose di lui si narravano egualmente maravigliose e dalla superstizione derivate (1).

Ora che io ho cercato di mettere in chiaro come poche siano le notizie degne di fede che noi possediamo intorno a Pitagora e ai pitagorici, e indicate le modificazioni e i corrompimenti, cui andarono le dottrine loro soggette col tempo, egli è d'nopo investigare, se i versi d'oro, che a Pitagora furono attribuiti, nulla abbiano di contrario a quelle dottrine della scuola di lui, le quali noi crediamo poste fuori di ogni dubitazione; ovvero mostrino in sè qualche segno di platonesimo, o delle mistiche opinioni de' neo-pitagorici e de' neo-platonici, di cui si è fatto cenno superiormente. Cotale investigazione io ho procurato di fare e mi sembra di potere con sicurezza conchiudere, che nulla trovasi in tali versi, che si opponga a quanto intorno alle dottrine pitagoriche abbiamo in Aristotele ed Aristosseno, e spero che ciò si porrà in piena luce per l'esposizione ch'io verrò facendo di quei precetti, che in loro sono contenuti. Il discepolo, a cui ammaestramento i versi d'oro sono indirizzati, onori prima di tutto gli Dei immortali, rispetti il giuramento, veneri gli eroi e i demoni con quella stessa gradazione che gli Dei immortali, cioè avuto riguardo all'ordine, che una legge superiore ha in essi introdotto. Rispetti il padre e la madre sua, e i parenti secondo i diversi gradi della parentela, e, scelti fra i migliori, i suoi amici, ben corrisponda all'amore, ch'ei gli dimostrano, nè a cagione di piccoli falli dell'amico, finchè gli torna possibile, infranga il vincolo dell'antica amicizia. S'avvezzi a vincere quattro vizii principali, la gola, il sonno o l'accidia, la lussuria e l'ira, nè compia mai cosa turpe, sia ch'egli trovisi in presenza altrui, sia che non abbia altro testimone, che se stesso; poichè più che ad ogni altro egli deve aver rispetto a se medesimo. Segua giustizia e nei discorsi e nei fatti, nè operi mai senza prima chiamare a consiglio la sua ragione,

(1) Giamblico, Vita di Pit. c. XXVII — Porfirio, Vita di Pit. 23-30.

e sapendo, come per tutti è destinato il morire, non curi punto i beni della terra, ma ora egli stesso ami di possederli, ora di perderli pel suo migliore. Molti essendo i travagli, cui per volontà degli Dei vanno soggetti gli uomini, egli si porti in pace quella sorte, che gli è toccata, non se ne cruci; ma pur cerchi, quanto può, di farla migliore, consolandosi intanto col pensiero, ch'egli si è pur meritato i mali, che lo travagliano, e che gli Dei a quelli che son buoni intieramente, non sogliono mandarne in gran copia. I discorsi degli uomini essendo ora veri ora falsi, secondo la inferma natura di chi li pronunzia, non si stupisca della falsità loro, essendo essa natural cosa, nè rifugga dall'udirli, chè pur qualche utile può da quelli ritrarre, nè s'adiri quando gli vien fatto di scoprire in essi menzogna, ma alla stessa infermità dell'umana natura la riferisca.

Dovendo sempre operare ragionevolmente, non si lasci mai indurre da altri nè con parole, nè con opere a dire o a far cosa, della cui bontà egli non sia persuaso. Ponderi le ragioni dell'opera prima di compierla, sicchè non abbia ad esser tenuto per pazzo o imbecille, non faccia se non quello, di cui è certo non doversi in seguito pentire, se non quello, ch'egli sa come vuol esser fatto e per cui si è procacciato quanto gli può tornar di bisogno. Non trascuri la sanità del corpo, vada misurato nei cibi, nelle bevande, negli esercizi ginnastici, e tal misura tenda ad impedire che il corpo sovrasti all'anima e sia d'impedimento alle operazioni di lei. Puro sia il suo vitto, ma senza dilicature, sfugga il fasto, come quello che può attirargli l'invidia altrui, non isprechi il suo fuor di tempo, ma nemmeno si mostri misero ed avaro. Perchè quello ch'egli fa non gli torni di danno, esamini prima bene ogni cosa, e per avvezzarsi a tale esamina consideri ogni sera prima di chiudere gli occhi tutte le opere del giorno: in quali errori è caduto, che cosa ha fatto, che cosa ha intralasciato di quello che doveva fare, e del male operato si turbi, del bene si allegri. Così facendo, egli camminerà sulle orme di Dio e si farà simile a lui, il che è appunto il fine cui l'umana virtù deve tendere. A confermargli la verità di questa promessa pronunzia l'autore di questi versi il gran giuramento della sua scuola, fatto per colui, che diede o comunicò all'anima de' suoi discepoli la *tetracti*, cioè per Pitagora stesso, ch'ei non solevano esplicitamente nominare, e lo invita a porsi all'opera di eseguire i precetti esposti anteriormente, supplicando prima gli Dei affinchè vogliano quell'opera condurre a buon fine. Ove ciò gli sia concesso, egli conoscerà allora quale sia nel mondo la condizione degli Dei e degli

uomini e per quali relazioni siano tra loro congiunti, conoscerà come ogni cosa a comuni leggi è soggetta, e non gli avverrà più di sperar cosa, che non sia sperabile, poichè l'errore torna impossibile a colui, che conosce ogni cosa. Vedrà allora, come gli uomini si lagnano di mali, di cui sono cagione eglino stessi: chè non vedono il bene, che pur sta loro dappresso, non ne ascoltan la voce, e pochi son quelli, che sappiano dai mali disciorsi. Un cotale destino travaglia le intelligenze de' mortali, i quali come cilindri non hanno mai posa e sempre van rotolando in balía d'interminabili angosce, chè la tendenza che portano con sè nascendo verso del male li perseguita senza che se ne accorgano, ed essi le servono di scorta invece di fuggirla e rivolgerle il tergo. Felice l'uomo se potesse conoscere se stesso e l'anima sua! Onde il poeta prega Giove a concedere agli uomini questa conoscenza e a liberarli per essa da molti mali. Tuttavia non perdasi d'animo il discepolo, imperocchè tra gli uomini ve ne sono di quelli, che serbano la loro parentela cogli Dei, e da una natura divina ricevono la cognizione di ciascuna cosa, ai quali se egli punto somiglia, potrà osservare i dati ammaestramenti, risanar se medesimo e condurre in salvo l'anima sua fuori da questi mali terreni. Ma per questo è d'uopo ch'egli s'astenga da quei cibi, che alla medesima anima possano recar turbamento, ricorra alle convenienti purificazioni, e dia le briglie dell'anima sua in mano al senno, che è il miglior auriga, che per lei desiderare si possa. Così operando, allora che si scioglierà dai vincoli del corpo, ei volerà nel libero etere convertito in un incorruttibile iddio.

In tutti questi precetti non vi ha cosa, che punto contrasti colla testimonianza di Aristotele e del peripatetico Aristosseno intorno alla dottrina dell'antica scuola pitagorica, o colle reliquie d'indole antica, che a noi ne serbarono lo Stobeo e i varii biografi del maestro e fondatore di lei. Il culto, che i pitagorici tributavano agli Dei, agli eroi ed ai demoni è apertamente indicato da Aristosseno (1), Diogene Laerzio (2), Suida (3) e Giamblico (4). Oltre al Dio supremo, mente ed anima dell'universo, pari ed impari, monade e numero primitivo, ammettevano essi altri Dei,

(1) Presso lo Stobeo, p. 457.
(2) Vita di Pitagora.
(3) Alla voce Πυθαγόρας.
(4) Vita di Pitagora, c. VIII.

i quali erano il sole, la luna, i pianeti e le stelle, immortali a cagione della loro vicinanza a quel fuoco, che dal fuoco centrale derivando, tutto avvolge l'universo e lo compenetra col suo vivificante calore (1). Gli eroi, che Diogene Laerzio e Suida, più seguendo l'opinione de' platonici che quella de' pitagorici, collocano dopo i demoni, tengono invece nei versi aurei il primo luogo dopo gli Dei, ed occupano, al dir di Ierocle, il secondo grado delle sostanze razionali, come quelli che collocati nell'alto e puro etere sono vicini agli Dei e sovrastanno al sito abitato dai demoni e dagli uomini, inferiori, giusta la dottrina aritmetica de' pitagorici, agli Dei, i quali più s'accostano al principio o alla monade, superiori ai demoni e agli uomini, che più sono da quella lontani. Li chiama eziandio Ierocle genii buoni ed angeli, nel che mi sembra ch'egli faccia di loro quel medesimo conto, che i platonici facevano dei loro demoni, e paragona la loro derivazione dall'uniforme e comune loro causa, che è Dio, allo splendore che esce dal fuoco, e al figliuolo che dal padre ha suo nascimento. I demoni compongono il terzo ordine delle sostanze razionali, abitano l'aere, che inferiore all'etere circonda la terra, e sono le più eccellenti ed intelligenti fra le anime umane, già uscite dai corpi, ma che in questi, secondo la dottrina della scuola, possono esser chiuse di nuovo (2), oppure, secondo l'opinione del Ritter, anime erranti per l'aria prima che ai corpi siano unite o ricongiunte, rappresentate da' pitagorici, al dire di Aristotele, come atomi luminosi o come una forza, da cui tali atomi son posti in movimento (3), e viventi di una specie di vita propria ed individuale, per cui mandavano agli uomini sogni e presagi di malattia o di salute, e talvolta apparivano loro vestiti di corporee sembianze (4). Sacro era il giuramento ai pitagorici e per riverenza si astenevano da esso con molta cura, sottoponendosi a gravi danni, anche quando fossero certi ch'essi avrebbero chiamati gli Dei a testimoni del vero (5). E ad un altro maggiore giuramento che non è quello che si usa tra gli uomini, pare da Ierocle, che alluda il precetto dei versi aurei, cioè a quello, che l'anima, libera del corpo ed intelligente della divina eccellenza, ha fatto di con-

(1) Diogeno Laer. c. XXIX. 27.

(2) Ierocle, pag. 39. 40. — Salmasio, prelaz. alla Tavola di Cebete

(3) De anima, I 2.

(4) Diogene Laerzio. — Apuleio, De Deo Socratis.

(5) Giamblico, V. di Pit. c. XXXVIII. p. 144. pag. 150 — S. Basilio, Oraz. *Ad adolescentes Quomodo ex gentilium doctrinis proficiant.*

servare la somiglianza con quella, ed è tenuta a mantenere, quando in umano corpo ella è nuovamente discesa (1) non guastando l'ordine da Dio stabilito; onde questo piglia il nome di giuramento divino.

Come Dio si trova collocato nel centro di questi tre ordini di sostanze razionali, che sono gli Dei immortali, gli eroi e i demoni, così l'uomo sulla terra è come centro di tre ordini diversi d'altri uomini che hanno verso di lui una gradnata relazione, e sono i genitori, i congiunti e gli amici. Dopo gli Dei adunque, gli eroi e i demoni, come avverte Aristosseno, vogliono essere onorati i genitori non fintamente ma con forte proposito in ogni cosa loro obbedendo (2), come a quelli, che ci arrecarono il più grande fra i benefizi dandoci la vita, la facoltà di vedere e d'intendere la mirabile armonia delle cose, onde dobbiamo loro esser grati in quello stesso modo che sarebbe grato un morto a chi l'avesse richiamato alla vita, secondo l'espressione che Giamblico a Pitagora attribuisce (3). Quindi onorati debbono essere qualunque sia lo stato e i costumi loro, e a chi li dispregia è serbato l'odio degli uomini in vita e dopo morte la punizione, che agli empii è data dagli Dei infernali, come afferma un brano attribuito dallo Stobeo alla pitagorica Perictione (4). A questo circolo, che contiene i genitori, succedono, al dire di Ierocle (5), altri circoli, in cui si trovano disposti i parenti, secondochè ci sono più o meno vicini, e su di loro, fatta ragione di detta vicinanza, si deve pur diffondere l'amore dell'uomo. Dell'amicizia grandissimo conto facevano i pitagorici, chè anzi ella era uno dei più potenti vincoli, che legassero fra loro i membri di quel sodalizio; quindi l'aforismo, che tutti i beni degli amici sono comuni, e le storie commoventi del pitagorico, il quale riconosciuto il segno della setta risarcì con molta liberalità l'ostiere che aveva ospitato un suo confratello e gli era stato prodigo di cure nella sua ultima infermità, di Clinia, che, vendute le sue sostanze, corse in aiuto di Proro, che in Cirene trovavasi ridotto a mal partito, e di Testore da Posidonia, che navigò a Paro per sollevare dalle sue sventure il pitagorico Timarida (6), e la mirabile gara di Damone e di Fintia o Pitia, che noi

(1) Ierocle, pag. 29.
(2) Aristosseno, presso lo Stobeo C.
(3) Giamblico, V. di Pit. c. VIII. — Protreptico, c. VIII.
(4) Libro, *De mulieris armonia*. — Stob. tit. 79. n.° 50.
(5) Presso lo Stobeo, tit. 84. n.° 23.
(6) Giamblico, V. di Pit. c. XXXIII.

conosciamo per la bella narrazione, che ne fece Aristosseno (1). Nè la sola communione dei beni della terra aveva di mira quest'amicizia dei pitagorici, ma ancora quella dei beni divini, esortandosi essi a vicenda a perseverare nella virtù, e a non dilacerare il Dio, che era in loro, ed a communicare insieme colla mente e coll'anima divina (2). A questa communione delle menti avevano essi riguardo specialmente nella scelta dei nuovi membri della società loro, nè tutti accoglievano quelli, che domandavano di esservi aggregati; onde molta inimicizia si attirarono e più fatale di tutte quella di Cilone, che fu causa della rovina loro, di cui il medesimo Aristosseno ci lasciò scritta la storia, che noi per cura di Giamblico ancora possediamo (3). I precetti intorno alla necessità di resistere agli stimoli del ventre, del sonno, della lussuria e dell'ira sono accennati in tutte le tradizioni di quella scuola, e hanno lor fondamento nella riverenza che il maestro inculcava di continuo verso l'anima umana desiderando ch'ella sempre tenesse nell'uomo il suo principato, nè mai fosse dal corpo soverchiata o impedita nel suo operare. Quanto al ventre son note abbastanza le ragioni del vitto pitagorico, e perciò non è necessario che io qui mi trattenga ad esporle. Il sonno fuggivano i pitagorici, come quello che impediva all'anima le ardue e profonde speculazioni, cui essa era obbligata di attendere secondo lo spirito del loro istituto. Dalla lussuria cercavano con ogni cura di tener lontani i giovani ed ogni sesso ed età, ben avvisando essere la continenza la migliore conservatrice della sanità, aiutatrice nello studio delle cose migliori e al perfezionamento morale dell'uomo più convenienti (4). Gl'irosi segregavano dal consorzio degli altri compagni, e gli animi commossi riducevano a tranquillità ed armonia per mezzo della musica e di acconce canzoni: onde si assuefacevano a superare da se stessi quegl'incomposti movimenti, nè mai consigliati dall'ira alcuna cosa operavano, come si prova pel fatto di Archita da Taranto, di cui molti scrittori antichi ci hanno serbato memoria (5). Quantunque poco di sicuro noi possiamo conoscere intorno all'etica de' pitagorici, sappiamo tuttavia da Aristotele (6) ch'essi chia-

(1) Giamblico, Vita di Pitag. — Mahac, Diatribe de Aristox. p. 35.
(2) Giamblico, ibid.
(3) Vita di Pit. c. xxxv. p. 248.
(4) Giambl. ibid. c. viii.
(5) Ibid.
(6) Eth magn. i. 31. Eth Nicom. v 5.

mavano la giustizia il numero ugualmente uguale, nè della prudenza facevano poca stima; chè anzi erano da quella informati i precetti risguardanti il loro silenzio e il segreto che dovevano serbare intorno all'insegnamento che ricevevano nel loro istituto. Quello poi che dicono i versi aurei della non curanza dei beni della terra e della pazienza con cui deve ciascun uomo accettare quella sorte che gli è toccata, dipende dal concetto che essi avevano della vita mortale, considerata da Filolao, come un imprigionamento dell'anima nel corpo, quasi in una tomba in pena delle anteriori sue colpe (1). Onde il pensiero, che per la comune mortalità degli uomini ella ha pur un giorno da uscire da questa prigione, deve far l'anima meno desiderosa dei beni della terra, e la sicurezza, che i travagli ch'essa prova in questa vita sono un'espiazione da lei dovuta alla divinità, deve indurla a sopportarli senza punto sdegnarsi come di cosa non meritata. La qual dottrina della morte vuol essere intesa soltanto per rispetto alle continue trasformazioni, cui la materia è soggetta: poichè il mondo, giusta la dottrina di Filolao, è eterno al pari di Dio, e solo sottoposto a continua vicenda (2). Nulla dirò di quel che riguarda la poca importanza, in cui vogliono essere tenuti i discorsi degli uomini, e la necessità di ben prevedere le conseguenze delle azioni, cui stiamo per accingerci, essendo questi precetti uno svolgimento di quelli dati superiormente intorno alla fuga de' vizii e alla pratica delle virtù; nè mi arresterò a dimostrare la natura pitagorica dell'esamina, cui si debbono chiamare ogni sera le operazioni del giorno, essendo la cosa a sufficienza provata dall'autorità degli antichi.

Quantunque i pitagorici considerassero la vita dell'anima unita al corpo come uno stato di pena e di travaglio, credevano pur tuttavia, che il corpo fosse utile stromento all'anima, poichè essa non altrimenti che pei sensi poteva acquistare la cognizione delle cose, com'è affermato da Filolao (3) e da Plutarco (4). Quindi si prendevano essi molta cura del corpo e ne procuravano la sanità e l'energia per mezzo della temperanza, della scelta e misura dei cibi e degli esercizi ginnastici, usando di questi soltanto sino a quel punto, che non potevano degenerare in danno del

(1) Presso Clemente Aless. Strom. III. p. 433
(2) Stobeo, Eclog. phys. I c. 27.
(3) Presso lo Stobeo, Eclog. I p. 8
(4) Quaest Rom 10

medesimo corpo. E giustamente i versi aurei pongono per iscopo di questa cura del corpo e di questa temperanza il giungere alla somiglianza con Dio e il camminare sulle orme di lui; chè non altrimente l'anima può conservare il divino giuramento, di cui sopra è discorso, cioè serbarsi uguale all'anima divina, da cui è derivata, che col provvedersi di quei mezzi che più le giovano alla cognizione e alla sapienza, la quale è la massima prerogativa di Dio. Perciò a ricordare la necessità di serbare quel divino giuramento, l'autore dei versi aurei aggiunge subito in appresso la formola del giuramento dai pitagorici adoperata, per cui invocavano la testimonianza del loro maestro e la cognizione della *tetracti*, o quaderna, ch'egli a' suoi discepoli aveva communicata. La decade era pei pitagorici lo stesso che la monade, cioè, al dire di Filolao, il supremo legame dell'eterna durata delle cose mondiali, legame, che da nessuno è creato, ma crea se stesso (1). L'unità e la diecina contengono entrambe il principio dell'unità e della moltiplicità, del pari e del dispari, e sono perciò simbolo del principio di tutte le cose; onde il medesimo Filolao diceva, che le operazioni e l'essenza del numero debbono essere contemplate secondo la potenza che è nella decade, poichè essa è grande, tutto compie, tutto fa ed è principio e duce della divina e celeste ed umana vita (2). Ma di questa decade trovavano essi i componenti nei quattro primi numeri, poichè chi aggiunga all'uno il due, poi il tre, poi il quattro, viene appunto ad ottenere il dieci, epperciò alla *tetracti* o quaderna attribuivano essi quella medesima virtù che alla monade e al dieci, e la chiamavano sorgente e radice della natura fornita di eterna durata. Nè punto si allontana l'autore dei versi aurei dal carattere delle dottrine pitagoriche quando afferma, che il discepolo, il quale osservando gli accennati precetti cammina sulle divine orme, giungerà a conoscere la condizione degli Dei e degli uomini, o le relazioni che passano fra di loro, e il mutabile e l'eterno, che è nella natura delle cose; poichè questa si è appunto una conseguenza della contemplazione del numero e della *tetracti*, senza la quale, al dire di Filolao, non si potrebbe avere cognizione di cosa alcuna, e per lei sola è posta l'anima in communicazione con tutto ciò che esiste ed è fatta capace di comprenderlo; tale essendo

(1) Giamblico, ad Nic. arithm. p. 11. — Collezione di Boeckh, n.° 19.
(2) Stob. Ecl. 1. p. 8. — Boeckh, n.° 18

la natura del numero, che non solo nelle cose demoniache e divine, ma ancora nelle opere e nei discorsi degli uomini, nella musica e nel magisterio di tutte le arti si fa manifesta (1), anzi essendo egli medesimo la verità, come quello in cui non entra mai nulla di falso; chè il falso è a lui per natura avversario e nemico, domestica invece la verità e natagli insieme (2). Conoscerà adunque il discepolo come gli Dei immortali e gli uomini mortali, l'eterno cioè e il mutabile, possano insieme trovarsi nel mondo, e vedrà che le mutazioni, cui questo è soggetto, non sono altro che un'apparenza, dovendo pur esse durare eterne e derivando dall'azione immutabile e continua delle cose superiori di esso sopra delle inferiori, il che già notai sopra con Filolao e qui confermo colla testimonianza del pitagorico Ocello, il quale asserisce, che la natura considerata nel suo tutto ritrae la sua perennità da quei corpi che sono primi e più orrevoli (cioè dai corpi celesti), guastandosi essa secondo una determinata ragione e communicando a tutte le cose mortali anche il continuo mutamento della sua propria costituzione, che da quelli deriva (3): vedrà come eguale è la natura di tutte le cose procedendo tutte egualmente dall'uno, che essendo insieme il pari e il dispari forma quel legame, che chiamasi armonia, il quale toglie di mezzo ogni discordanza delle cose e tutte ad unità le riduce. Da questo concetto della cognizione del giusto essere delle cose, che l'uomo colla pratica della virtù può ottenere, ne nasce di conseguenza quell'altro della facoltà che è in lui di sciogliersi dai mali, che lo travagliano nella sua vita mortale, mali, che derivano dalla natura stessa di tutto ciò che contiensi nello spazio che è tra la luna e la terra, indeterminato e imperfetto epperciò rappresentato per mezzo della *diade* o dualità, che è in opposizion colla monade o unità principio di determinazione e di perfezione (4), ovvero dalla natura dell'anima stessa, che sembra i pitagorici dividessero in due parti, l'una ragionevole, l'altra irragionevole e sede de' torbidi movimenti dell'ira, della cupidità, movimenti contrarii e nemici della ragione (5). I rimedii poi per liberarsi da questi mali sono la conoscenza dell'anima propria, della

(1) Boeckh, n.° 18.
(2) Ibid.
(3) Cap. I § 12. pag. 157 ediz di Mullach.
(4) Plutarco, de Plac. phil.
(5) Cic. Tusc. IV 5.

sua divina origine, l'osservanza dei precetti pitagorici della temperanza nei cibi e delle purificazioni, del porre il freno di tutta l'anima in mano della ragione, la quale riduca ad unità le varie potenze di lei; il che aiuta l'anima a ricuperare la sua libertà e la sua somiglianza con Dio, e dopo la morte del corpo la conduce a vita incorruttibile e divina. Questa conclusione, la quale ad alcuno potrebbe parere contraria alla dottrina della metempsicosi professata dagli antichi pitagorici, non apparirà più tale quando si avverta, ch'essi non ammettevano tale dottrina in un senso assoluto; ma insegnavano che l'anima può sottrarsi alla medesima e raggiungere uno stato di quiete. Perciò troviamo in Plutarco, che l'anima, secondo Pitagora, era incorruttibile e dopo la morte andava a congiungersi coll'anima universale, della cui natura partecipa (1), e coll'anima degli altri buoni, della cui conversazione ella gode (2). Il che vuolsi intendere solamente delle anime de' buoni e che son giunti a raggiungere la somiglianza con Dio, essendo affermato da Giamblico e da Diogene Laerzio, che le anime pure e migliori sono condotte ne' luoghi più alti ad abitare cogli Dei, e le impure e malvage sono tenute nel Tartaro le une dalle altre disgiunte e punite sotto la custodia delle Furie.

In questa rapida corsa, che io feci per mezzo le reliquie delle dottrine pitagoriche, non ebbi già in animo, come dissi da principio, di tutte esporre le notizie, che a noi sono giunte intorno agl'insegnamenti di quella nobilissima scuola, ma solo di provare l'indole pitagorica ed antica di quelli, che furono insieme raccolti dall'autore dei versi d'oro. Spero anche di avere insieme dimostrato, come le varie parti di questo, che noi diremo poemetto, siano convenientemente fra loro congiunte in modo da formare una graduata esposizione ed un tutto con giusta proporzione ed armonia, il che ci porge argomento di rigettare l'opinione del Tiedemann, il quale pensava, che si dovesse in questi versi ravvisare una raccolta di sentenze tratte dalle opere di autori diversi (3). Ma non potrebbero esser vere le sentenze di coloro, i quali credono, che essi siano opera di pitagorici posteriori, od il frutto di un'avida speculazione ai tempi, che il re Giuba di Mauritania faceva incetta di libri pitagorici, od una delle molte frodi,

(1) De Plac. phil. VII.
(2) Non posse suav. vivi sec. Epic. XXVIII.
(3) Princ. Gr. phil. p. 190.

che commisero i pagani nella loro lotta col crescente cristianesimo, per provare la bontà delle dottrine teologiche e morali della loro religione? Alla prima di queste sentenze io credo che si opponga la semplicità veramente antica di questi versi. Egli è proprio delle società invecchiate e degeneri il tenere maggior conto degli accessorii che della sostanza, delle pratiche esteriori che dei principii, sui quali il loro istituto si fonda. E che questo fatto, il quale, come l'esperienza ci dimostra, succede in tutte le società, fosse pure avvenuto nella pitagorica poco dopo la sua dispersione, ben lo provano le testimonianze degli autori della commedia di mezzo, di cui sopra ho fatto cenno, e lo spregio in cui eran venuti i seguaci di essa nell'opinione dei Greci. Quanto più poi ci allontaniamo dal tempo di quella dispersione, più vediam progredire nei neo-pitagorici la credenza nei miracoli, nella magia, nel soprannaturale, cui senza dubbio avrebbero fatto allusione in questi versi, s'ei fossero veramente opera loro. Leggiamo le vite di Pitagora scritte da Giamblico, da Porfirio, dall'anonimo e dallo stesso Diogene Laerzio, e vedremo quanta parte vi tenga la narrazione dei prodigi e dei miracoli, e la trattazione delle scrupolose pratiche alla sua scuola attribuite. E vorremo noi credere, che uomini, i quali in siffatti prodigi e in tali pratiche facevano consistere il principal pregio e la gloria maggiore di essa, avrebbero potuto astenersi dal farne cenno in un poemetto, che doveva appunto contenere il sugo e la quintessenza delle sue mistiche e morali dottrine? Quelle ragioni, che io ho qui arrecate, mi pare che valgano eziandio a distruggere la seconda sentenza, la quale potrebbe avere qualche fondamento di verità nella tradizione di fatti analoghi accaduti in quel tempo, che la smania delle biblioteche e la gara nel raccogliere i libri antichi era sorta nei principi greci e barbari grecizzanti. Sappiamo infatti da quello stesso luogo dello Scoliaste di Aristotele, il quale accenna all'invenzione di libri pitagorici nel tempo che il re Giuba raccoglieva quante reliquie poteva trovare degli scritti antichi di quella scuola, che molte opere pure falsamente ad Aristotele si attribuirono, quando le scritture di quel principe de' peripatetici si comperavano a caro prezzo da Tolomeo Filadelfo per la sua biblioteca. Ma si può egli a ragione supporre che la frode si sarebbe contentata di un piccol numero di versi, quali sono quelli, di cui discorriamo, e di un cenno così rapido e appena delineato dei principii di quella scuola, quanto alle cose mistiche e morali, e non avrebbe piuttosto creato un intero sistema e rappresentato Pitagora secondo l'ideale.

che allora esisteva nella comune credenza? Non avrebbe anzi cercato anche un antico pitagorico, al quale attribuirli, come fece, di quei molti libri suppositizii, onde sono copiosi i frammenti nel Florilegio e nelle Ecloghe dello Stobeo? Meno poi delle due già discusse può sostenersi la terza opinione, poichè a chiunque abbia esaminato attentamente quelle opere, che si attribuirono agli antichi nella lotta col cristianesimo, è noto abbastanza come in queste abbondino gli sforzi per ridurre ad unità e ad un principio monoteistico le dottrine religiose del paganesimo antico. Questo appare da molti dei frammenti degli Orfici, dal poema ammonitorio del falso Focilide, e in generale da tutte le opere dei neo-platonici, che per mezzo delle allegorie e colla testimonianza degli antichi scrittori cercavano di purgare la loro dottrina dalle accuse di contradizione e d'immoralità, che le erano mosse. Ora qual è la traccia di siffatti sforzi, nei versi aurei, qual parte ritrovasi in essi di quel colorito orientale, che si ravvisa nei citati libri suppositizii e che pure avrebbe avuto il suo fondamento nelle molte tradizioni, che allora esistevano intorno ai viaggi di Pitagora e all'origine orientale delle sue dottrine? Ma a questi argomenti derivati dall'indole stessa dei versi, di cui io ragiono, e dai soli dettami del buon senso e della critica, viene pure in aiuto l'autorità, la quale ci mostra, com'essi fossero già noti fra i Greci nel terzo secolo avanti l'era volgare. E quest'autorità l'abbiamo in A. Gellio, il quale n'ha conservato un brano di Crisippo, uno de' più celebri fra gli antichi stoici, in cui uno di questi versi è citato e ai pitagorici attribuito. Dalla quale testimonianza mi pare che si possa francamente dedurre, che tali versi già nel terzo secolo erano tenuti, senza dubitazione alcuna, per opera dei pitagorici, cioè dell'antica e primitiva scuola di Pitagora; poichè usanza dei discepoli di essa era il non apporre mai il loro nome agli scritti che ne contenevano le dottrine, ma tutti attribuirli al maestro; onde ne veniva che dai meno lontani dal tempo in cui essi vissero, e non ignoranti di quest'uso, erano siffatti scritti denominati cose pitagoriche o di pitagorici; e a Pitagora e ai primi suoi seguaci non si attribuirono libri se non in tempi di molto posteriori, nei quali l'antica tradizione si era perduta.

Ma sarà egli possibile lo scoprire qual fosse il vero autore di questi versi? Molti hanno tentato questa scoperta ed io procurerò di esporre brevemente le loro conclusioni. Il Glandorf dopo averne provata con molti argomenti l'indole antica, li vuole anteriori a Pitagora e ne crede pro-

babile l'origine dai misterii eleusini (1). Sotto il nome di Pitagora noi li troviamo citati da Epitteto (2), da Clemente Alessandrino (3), da S. Girolamo contra Rufino e da Calcidio (4); Galeno poi (5) e Suida riferiscono come vigente ai loro tempi l'opinione, che di questi versi credeva Pitagora autore. Lo scrittore dei Teologumeni aritmetici li ha per cosa di Empedocle, e in questo gli vien compagno il Fabricio, il quale vorrebbe considerarli come un frammento del poema di Empedocle intorno alle purgazioni, avvertendo come il dialetto, lo stile, la materia mirabilmente a lui si confacciano, e la chiusa concordi con altri luoghi del medesimo poeta, dove l'immortalità e la divinità sono promesse dopo la morte agli osservatori delle sue prescrizioni (6). Iacopo Windet (7), veduto che Eustrazio ne' suoi commenti all'Etiche Nicomachiane di Aristotele attribuisce a Focilide uno de' versi aurei, credette che tutto quanto il poemetto per opera di Focilide volesse pur essere tenuto. Lo Stanley (8) avuto riguardo che delle dottrine pitagoriche, molte sono le tracce nelle opere di Epicarmo, crede che si debbano a questo poeta riferire. Altri, notando come Filolao, secondo la testimonianza di Diogene Laerzio, fu primo a pubblicare cogli scritti le dottrine della scuola, li tengono per opera di Filolao (9), e sotto il nome di lui furono alcuna volta pubblicati (10). Il Menagio e il Mullach stanno per Liside (11), e il Meiners stima il poemetto monco, corrotto coll'introduzione di nuovi versi e non iscritto se non dopo l'età di Platone e di Aristotele da un qualche pitagorico dei tempi di Eraclide e di Aristosseno (12).

Io mi arresterei qui ad esaminare le ragioni, a cui si appoggiano i sostenitori di ciascuna di queste opinioni, e non tacerei di quelle altre,

---

(1) Diss. de versuum aur. aetate, § VI. — Append. p. 188. e seg.

(2) Lib. IV. c. 6. p. 473.

(3) Lib. I. c. 10. — Paedagogi, pag. 154. ed. Oxon.

(4) Pag. 229.

(5) De dignosc. affect. t. VI. p. 528. ed. Par.

(6) Bibl. graec. lib. II. cap. 12.

(7) De vita functorum statu, pag. 91.

(8) Hist. phil. p. 305.

(9) V. Labbei, Bibl. nov. mss. p. 385.

(10) In fine delle *Institutiones graecae* di Costantino Lascaris, ediz. Ferrarese, 1510.

(11) Hieroclis in aureum Pythagoreorum carmen commentarius, recensuit et illustravit Frid. Guil. Aug. Mullachus. Berolini, 1853.

(12) Hist. doctr. apud Gr. et Rom. I. p. 579. e seg.

che valgono ad infirmarle, se io credessi che da questo esame si potesse sperare un qualche utile risultato. Ma io sono per lo contrario persuaso, che nessuna di esse abbia un tale corredo di argomenti, che riescano a farla anteporre a tutte le altre, e che la moltiplicità stessa e varietà di sentenze sia un chiarissimo indizio, che la quistione è intricata e di non isperabile scioglimento. Non ignoro come molti tengano in gran conto siffatte ricerche e diano loro moltissima importanza; ammiro l'ingegno e l'acume, di cui essi fanno prova nel proseguirle, quantunque il fine, che si propongono, a me paia o inutile o poco fruttuoso. Nè a me, se volessi mettermi per la loro via, mancherebbero gli argomenti per attribuire questi versi a qualche altro tra i pitagorici; chè facile mi riescirebbe il trovare fra questi e scrittori e poeti e propagatori delle dottrine della scuola, e avrei copia di argomenti probabili al pari di quelli, ond'essi menano vanto. Ma quale sarebbe la conseguenza della mia ricerca? L'aver introdotto un'opinione di più in una materia, intorno a cui già abbondano le diverse e discordi e contradittorie opinioni, e l'aver fatto pompa di un'erudizione, che può parer grave a taluno, ma che ai pratici della materia è pure di facilissimo acquisto. A chiunque legge i versi aurei deve importare sopratutto il conoscere, se le dottrine in essi contenute sono pitagoriche, sono antiche, sono scevre da quella corruzione, che nei seguaci di quella scuola s'introdusse posteriormente, nè si debbono derivare da quella frode, per cui molti libri si attribuirono ad uomini e a tempi, cui non appartenevano punto. Determinato adunque il valore di questi versi e l'età, in cui probabilmente furono scritti, un tal valore non può essere nè accresciuto, nè diminuito dal nome dell'autore, tanto più quando l'indicazione di questo autore invece di essere cosa certa, è soltanto più o meno probabile e congetturale. Il perchè, credendo io di aver bastantemente provato la consonanza dei principii contenuti in questi versi coi principii che la tradizione e la testimonianza de' più gravi scrittori greci attribuisce all'antica scuola pitagorica, stimo inutile lo investigare qual fosse l'autore di essi e me ne sto contento a conchiudere, che essi quanto alla sostanza si debbono avere per cosa antica e anteriore alla ruina del sodalizio pitagorico e alla dispersione degl'illustri suoi membri. E dico nella sostanza; poichè so che nella forma di essi alcuni hanno creduto di ravvisare certi segni d'un'età posteriore, segni ancor questi non sicuri abbastanza, quand'io vedo, che, loro malgrado, uomini dottissimi nella greca filologia non hanno dubitato di attribuirli

ai primi pitagorici e di crederli anche anteriori alla loro scuola. Intendo per tali segni tre classi diverse di parole, le prime delle quali si tengono da alcuni come usate soltanto da scrittori vissuti dopo il cominciamento dell'era volgare, le seconde come non abbastanza poetiche, nè convenienti allo stile, che si scorge nei poeti vicini per tempo a Pitagora ed alla sua scuola, quantunque siano adoperate anche dagli antichi prosatori, le altre poi poetiche sì, ma tali, che solo si cominciano a ritrovare nei poeti vissuti al tempo della guerra del Peloponneso, quando si abbandonò la gravità dello stile epico, e il linguaggio della poesia per opera specialmente dei tragici e dei comici si fece maggiormente vicino a quello della prosa e al comune favellare. Tra quelle prime si notano κτᾶσθαι, usato passivamente, ed ἔξακεῖν adoperato nella voce attiva invece che nella media ἐξακεῖσθαι, e il participio aoristo primo ἀπολείψας invece del secondo ἀπολιπών: ma già il Mullach avvertiva, come per consenso dei migliori interpreti dei versi aurei κτᾶσθαι voglia essere pigliato per voce media e non passiva, ἔξακεῖν non trovisi usato da altri nè anteriormente, nè posteriormente all'era volgare, e solo trovandosi in questo luogo dei versi aurei, non dia ragione a crederli più d'una età che d'un'altra; ἀπολείψας poi essere ignoto negli antichi scrittori, ma non affatto impossibile, trovando noi il semplice λείψας in un frammento dell'Andromeda, che l'Antiatticista attribuisce ad Aristofane, ma che vuol essere tenuto per cosa d'Euripide, la cui tragedia intitolata l'Andromeda fu più volte da Aristofane proverbiata citandone i versi. Le voci ἐπωφέλιμος, ἀγανακτεῖν, λαγνεία, ἀμέλεια, ἄθρυπτος, σύστασις, poste fra le seconde, sono antiche per certo, nè a dichiararle abborrenti dall'antico poetico stile giovano i pochi frammenti che noi possediamo dei poeti didattici di quell'età, coi quali vorrebb'essere il poemetto, di cui discorriamo, paragonato, piuttosto che cogli epici e con quelli che più si attennero all'omerico stile. Al più si verrebbe con esse a provare, che il poeta, cui lo dobbiamo, era poco valente poeta, nè abbastanza perito dell'epica favella; ma niuna ragione vi ha per sostenere che nessun cattivo poeta potesse esistere allora, o non fosse possibile, che il poeta pitagorico badasse piuttosto all'esattezza delle dottrine ch'egli intendeva di esporre, che alla purezza ed eleganza del poetico linguaggio. Le parole poi ἀλογίστως, μωρός, καθάρειος, ἀνελεύθερος, αὐθαίρετος, συνοπαδός, che appartengono alla terza delle sovraccennate classi, sono comuni a prosatori e poeti dell'età di Pericle, e quantunque non si trovino nè in Parmenide nè in Empedocle, non v'ha indizio alcuno per cre-

dere, che fossero coniate in quell'età, e non prima abbia potuto accadere, che dal patrimonio del linguaggio comune si traessero per collocarle nelle poetiche scritture tanto più da un verseggiatore che di parole tecniche e di filosofico significato sentiva bisogno. Ora posto eziandio che questi versi debbano essere collocati in tempo vicino a quello della guerra del Peloponneso, ciò punto non si opporrebbe all'opinione da me sostenuta; poichè noi sappiamo da Aristosseno, che l'antico sodalizio pitagorico non si disciolse del tutto, se non ai tempi di Liside, il quale fuggito nell'Acaia e quindi passato nella Beozia ebbe a discepolo Epaminonda, e fiorì perciò dopo di quella medesima guerra. Ma ad ogni modo io non credo, che argomenti dedotti da una lingua, di cui sono scarsi gli esempi anteriori all'età di Pericle, possano avere maggiore efficacia, che quegli altri, che si traggono dalla natura delle dottrine e da una costante tradizione. E a me pare d'aver dimostrato abbastanza l'antichità delle dottrine pitagoriche contenute in questo poemetto, e l'antichità e costanza della tradizione, che alla vecchia scuola pitagorica lo attribuiva.

Ma qui mi si potrebbe opporre altre tradizioni anch'esse antiche e conservateci da Diogene Laerzio, per le quali si afferma non avere nè Pitagora, nè i suoi primi seguaci esposto cogli scritti alcuna parte delle loro dottrine, sicchè queste non cominciarono ad essere conosciute prima dei tempi, in cui visse Filolao, che in gran parte le fece altrui manifeste (1); tanto poi essere stato l'abborrimento di Pitagora pe' poeti, ch'egli era solito narrare di essere disceso all'inferno e di aver ivi scorto le anime di Esiodo e di Omero, l'una legata ad una colonna di rame e stridente per lo dolore, l'altra appesa ad un albero ed attorniata di serpi (2); nè i suoi primi seguaci essere stati ai poeti meno avversi di lui; poichè, avendo Empedocle rivelato co' suoi versi molti de' principii della loro scuola, fu vietato di communicarli in avvenire a chi facesse professione di verseggiatore (3). Senza cercare quanto sia il valore di queste tradizioni, che, ove se ne tolga forse la prima, portano manifesti i segni di un'età posteriore e sono appunto da Diogene Laerzio attribuite ad autori non punto antichi, io credo, che se anche si accettassero per vere pro-

(1) In Pyth. xv. 15.
(2) Ibid. xix. 21.
(3) Id. in Emped. II. 55

verebbero al più che i Pitagorici non usavano altrui communicare nè in prosa nè in versi le loro dottrine; ma non già che nella scuola non si facesse uso di versi; nè per mezzo di versi vi si porgesse ai discepoli il mezzo di ritenere più facilmente a memoria la somma delle dottrine di quella. Celebre è l'amore de' pitagorici per la musica e pel canto accompagnato dal suono della lira, e Diogene Laerzio ci narra come Pitagora ordinasse, che di certe canzoni si facesse uso nel suo istituto e d'inni per celebrare gli Dei e gli uomini buoni (1), e Giamblico racconta, come alla sera si usassero canti di natura particolare atti a indurre negli animi tranquillità e pace, a purgarli dalle diurne commozioni, e a canti pure si ricorresse ogni volta che l'animo fosse stato da ira o da qualche altra violenta passione turbato (2), ed anche a versi tolti da Omero e da Esiodo, i quali si giudicassero acconci a purgar gli animi e a farli migliori. Nè poeti mancarono a quella scuola fin dalle origini sue, chè oltre ad alcuni altri di minor fama, sono celebri abbastanza e Cercope e Brontino, che si tengono insieme con Onomacrito per autori di molti dei versi, che vanno sotto il nome di Orfeo; e la forma sentenziosa era appunto quella, che al dire di Simplicio (3) adoperavano i pitagorici per esporre gl'insegnamenti della loro scuola. Nel che fare essi non si discostavano punto dall'usanza di tutti gli antichi maestri, i quali vissuti in tempo che la prosa o non era punto o era poco adoperata, ovvero persuasi della grande potenza che è nel verso di meglio scolpire nella mente le cose, alla poetica forma ricorrevano e alla succosa brevità delle sentenze per communicare e tramandare altrui le loro dottrine. Questo diede origine alla poesia gnomica o sentenziosa, i cui più splendidi esempi noi possediamo nel poemetto di Esiodo intitolato *Le opere e i giorni* e nei distici di Teognide Megarese, e la forma più semplice nei pochi frammenti che ancor ci rimangono di Focilide di Mileto; imperocchè le altre poesie, che vanno sotto il nome di gnomiche e tra le opere dei poeti gnomici si stampano, sono frammenti sentenziosi tolti da poeti, che non ebbero in animo di comporre gnomologie ossia di parlare per sentenze, come i brani di Mimnermo, di Simonide, di Solone; oppure sono opere per manifesta

(1) In Pyth. xix. 21.
(2) Vita Pyth. xxv. p. 111. 114.
(3) Commento al Manuale di Epitteto, nel proemio

frode attribuite ad antichi autori, come il Poema ammonitorio, che va sotto il nome di Focilide ed è molto più elegante e forbito e sincretistico di quello che si convenisse all'età dell'antico Focilide ed allo stile di lui, quale appare dagli accennati frammenti. Chi poi volesse considerare questa specie di poesia non come propria della Grecia e fatta sorgere in quella naturalmente dall'istinto che è nell'animo umano di communicare altrui quelle dottrine che più giovano al buon ordinamento della vita e de' costumi, o dal bisogno di dare la più breve ed esatta forma possibile alla dottrina delle antiche sue scuole, ma volesse rintracciarne le origini altrove, potrebbe facilmente trovarle e presso i popoli giapetici e presso i popoli semitici dell'Asia, molte essendo le vestigia di tal poesia che s'incontrano e nei libri dell'India e in quelli dell'antico testamento. Ma questa è pur una di quelle ricerche e di quelle mostre di erudizione, che io credo inutili affatto; poichè il parlar per sentenze è siffattamente connaturato coll'indole dell'umano pensiero, che noi le vediamo appunto abbondare là dove questo pensiero poco educato può ricevere un minore svolgimento, cioè nella parte meno colta del popolo, la quale più d'ogni altra fa uso di sentenze e di proverbi. E quel che avviene in quella parte del popolo doveva pur avvenire per analogia nelle nazioni ancor giovani e appena uscite dalla barbarie; quindi noi vediamo la poesia gnomica fiorire tra i Provenzali, che pur delle tradizioni classiche antiche avevano poco sentore, e vantare molti cultori tra i poeti italiani dei secoli decimoterzo e decimoquarto (1).

I versi aurei, rozzi quanto alla forma, concisi e stringati quanto alla sostanza, pochi di numero e chiari in apparenza, contengono pur tuttavia gravissime difficoltà per chi non contentandosi di fermarsi alla corteccia vuol penetrarne il midollo e tutto scoprirne il vero significato. Nè a rimovere queste difficoltà vengono punto in aiuto le interpretazioni latine letterali di Marsilio Ficino e di Aldo Manuzio, nè la volgare sguaiata e spropositata il più delle volte di Angelo Maria Bandini, nè il commento stesso di Ierocle, bellissimo per gli alti filosofici intendimenti, ma, come già dissi, troppo sistematico e proclive a confondere le dottrine platoniche

(1) V. i *Favolelli* o *Favoletti*, che ad imitazione de' trovatori scriveva Brunetto Latini, alcune rime di F. Iacopone da Todi, i *Documenti d'amore* di Francesco da Barberino, alcune delle canzoni di Dante, i versi di Roberto re di Napoli intorno alle virtù morali, ed altri.

e neo-platoniche con quelle dei pitagorici antichi. Il filo per uscire da questo intricato labirinto non si poteva trovare altrove, che in una minuta e coscienziosa investigazione delle dottrine morali e mistiche della scuola di Pitagora ed io ho fatta secondo le mie forze tale investigazione. Se io sia riuscito a buon fine lo proveranno il seguente volgarizzamento e le spiegazioni che a meglio rischiararlo vi ho aggiunte.

ΠΥΘΑΓΟΡΟΥ ΧΡΥΣΑ ΕΠΗ.

VERSI AUREI DI PITAGORA.

Ἀθανάτους μὲν πρῶτα θεοὺς, νόμῳ ὡς διάκειται,
τίμα καὶ σέβου ὅρκον, ἔπειθ' ἥρωας ἀγαυούς,
τούς τε καταχθονίους σέβε δαίμονας, ἔννομα ῥέζων·
τούς τε γονεῖς τίμα, τούς τ' ἄγχιστ' ἐκγεγαῶτας·
τῶν δ' ἄλλων ἀρετῇ ποιεῦ φίλον ὅστις ἄριστος.
Πραέσι δ' εἶκε λόγοις, ἔργοισί τ' ἐπωφελίμοισι,
μηδ' ἔχθαιρε φίλον σὸν ἁμαρτάδος εἵνεκα μικρῆς,
ὄφρα δύνῃ· δύναμις γὰρ ἀνάγκης ἐγγύθι ναίει.
Ταῦτα μὲν οὕτως ἴσθι· κρατεῖν δ' εἰθίζεο τῶνδε,
γαστρὸς μὲν πρώτιστα, καὶ ὕπνου λαγνείης τε
καὶ θυμοῦ. Πρήξεις δ' αἰσχρόν ποτε μήτε μετ' ἄλλου,
μήτ' ἰδίῃ· πάντων δὲ μάλιστ' αἰσχύνεο σαυτόν.
Εἶτα δικαιοσύνην ἄσκει ἔργῳ τε λόγῳ τε·
μηδ' ἀλογίστως σαυτὸν ἔχειν περὶ μηδὲν ἐθίζε·
ἀλλὰ γνῶθι μὲν ὡς θανέειν πέπρωται ἅπασι.
Χρήματα δ' ἄλλοτε μὲν κτᾶσθαι φίλει, ἄλλοτ' ὀλέσσαι.
Ὅσσα τε δαιμονίῃσι τύχαις βροτοὶ ἄλγε' ἔχουσιν,
ἣν ἂν μοῖραν ἔχῃς, ταύτην φέρε, μηδ' ἀγανάκτει.
Ἰᾶσθαι δὲ πρέπει, καθόσον δύνῃ· ὧδε δὲ φράζευ·
οὐ πάνυ τοῖς ἀγαθοῖς τούτων πολὺ μοῖρα δίδωσι.
Πολλοὶ δ' ἀνθρώποισι λόγοι δειλοί τε καὶ ἐσθλοὶ
προσπίπτουσ', ὧν μήτ' ἐκπλήσσεο, μήτ' ἄρ' ἐάσῃς

V. 1. Ἀθανάτους ... θεοὺς. Il solo Codice Mediceo ha: Ἀθάνατον ... θεόν. - διάκεινται. Altri legge διάκειται, lezione accennata dal Sylburgio, come esistente in parecchi manoscritti ed approvata dall'Orelli. La segue anche il Bandini e traduce: *ut lege ordinatum est*, e nel volgarizzamento: *secondo il rito*. — V. 3. ἔννομα ῥέζων. Così tutti i Codici. Il Camerario vorrebbe invece che si leggesse ἔντομα ῥέζων, il che si opporrebbe alla tradizione del nessuno o del poco uso che Pitagora faceva dei sacrifizii cruenti. V. l'interpretazione a questo medesimo verso. — V. 4. τούς τε γονεῖς. Il Codice parigino A del Florilegio dello Stobeo, in cui questo verso è citato, invece di τοὺς ha σοὺς. — V. 5. ἄριστος. Tre dei Codici di Oxford e quel di Vienna n.° 314 hanno ἄρεστος. — V. 6. ἐπωφελίμοισι. I Codici francesi: ἐπωφελίοισι. Quel di Vienna: ἐπωφελίαισι, che il Gaisford crede stia invece di ἐπωφελέεσσι. — V. 7. εἵνεκα μικρῆς. Simplicio nel commento al Manuale di Epitteto, p. 204, edizione del Salmasio, legge: οὕνεκα μικρᾶς. L'edizione del Didot, fatta su quelle dello Schweighœuser e dell'Heinsio: εἵνεκα μυρᾶς. — V. 9. δ' εἰθίζεο. Lo Stobeo (Serm. I.) δὲ ἐθίζεο. Il Curterio ommette il δὲ. — V. 11. πρήξεις. È questa la lezion più comune. πρήξῃς è nel Codice di Vienna e l'ammisero lo Stefano ed altri, ai quali si appoggia il Mullach. — V. 12. ἰδίῃ. Lo Stobeo legge αὐτὸς. - μάλιστ'. Galeno (De cogn. et cur. morb.): μάλιστα. Così pure il Curterio. — V. 13. ἄσκει. Così lo Stobeo e Ierocle. Comunemente ἀσκεῖν. — V. 15. πέπρωται. Il C. Viennese: πέπροται. — V. 16. φίλει ... ὀλέσσαι. Il C. di Oxford e quel di Vienna ed anche lo Stobeo hanno: φιλεῖ ὀλέσθαι. — V. 18. τε, δὲ nel C. d'Oxford B. e in Plutarco. δαιμονίῃσι. Il C. Viennese, lo Stobeo e lo scrittore del libro, intorno ad Omero, da alcuni attribuito a Porfirio: δαιμονίαισι. — V. 18. ἣν ἂν μοῖραν ἔχῃς. Brunck, Orelli e Gaisford (Poët. min. gr.) hanno: ἢ λ. μ. ἔῃς. Stobeo: ὧν ἂν μοῖραν ἕλῃς. - ταύτην φέρε. Plut. ταύτην ἔχε. Scrittore del lib. intorno ad Om. πρᾶος φέρε. Il C. F. e il B. di Oxford: ἔχοις ταύτην. — V 19. ὧδε. Ediz. Corteriana: ὠδε. — V. 21. πολλοὶ δ'. Stob. e C. Parig. B. πολλοί τ'. — V. 22. ὧν μήτ' κ. τ. λ. Molti non vedendo la trasposizione, per cui ὧν si riferisce a ἐάσῃς εἴργεσθαι, propongono di mutarlo in ὧν, forma ionica di οὗ, come Teod. Marcilio, o come il Salmasio in οὓς. - μήτ' ἄρ'. I C. fr. μηδ' ἄρ'. - ἐάσῃς: ἐάσσῃς Camerario. Marcilio e Sylburgio.

Onora in prima gl'immortali dei,
Come la legge li ordinò. Rispetta
Il giuramento. Indi gl'illustri eroi
Ed i terrestri demoni, secondo
La legge oprando, venera. Il tuo padre
E la tua madre onora e chi per sangue
Più t'è vicino; ed i miglior fra gli altri
Fa che ti sieno per virtude amici;
E alle dolci parole e all'utili opre
Non mostrarti restío, nè in odio volgere
Per piccola diffalta il prisco amore,
Finchè il potrai; chè la Potenza al fianco
Della Necessitade il seggio tiene.
Questo così saper ti giovi. Adúsati
A superar codeste cose, il ventre
Pria, poscia il sonno e la lussuria e l'ira.
Nè d'altri in compagnia, nè da te solo
Turpe cosa farai: più che ad ogni altro
Abbi rispetto a te. Della giustizia
Fatti nell'opra e nel parlar seguace.
Non avvezzarti a governar te stesso
In nessun caso mai senza la scorta
Della ragion. Sappi che ugual destino
È per tutti il morire, e or le ricchezze
Di posseder ti giovi, or che disperse
Vadan. Fra quanti per voler dei numi
Ha travagli il mortal, tu quella sorte,
Che tocca a te, pórtati in pace, e cruccio
Non te ne prenda. Eppur, quanto potrai,
Cercar rimedio ti convien. Favella
Così dentro di te: « Molte per fermo
Di tai cose il Destin mai non arreca
Agli uomini dabben. » Dalle mortali
Labbra discorsi molti escono e tristi
E buoni. Tu non istupir, nè lungi
Da lor trarre ti lascia. Una menzogna
Se udrai, mite contienti. In ogni parte

εἴργεσθαι σαυτόν· ψεῦδος δ' ἥνπερ τι λέγηται,
πράως εἶχ'. Ὅ δέ τοι ἐρέω, ἐπὶ παντὶ τελείσθω·
μηδείς μήτε λόγῳ σε παρείπῃ, μήτε τι ἔργῳ,
πρῆξαι, μηδ' εἰπεῖν, ὅτι τοι μὴ βέλτερόν ἐστι.
Βουλεύου δὲ πρὸ ἔργου, ὅπως μὴ μῶρα πέλῃται·
δειλοῦ τοι πρήσσειν τε λέγειν τ' ἀνόητα πρὸς ἀνδρός·
ἀλλὰ τάδ' ἐκτελέειν, ἃ σε μὴ μετέπειτ' ἀνιήσει.
Πρῆσσε δὲ μηδὲν τῶν μὴ ἐπίστασαι, ἀλλὰ διδάσκευ
ὅσσα χρεών, καὶ τερπνότατον βίον ὧδε διάξεις.
Οὐδ' ὑγιείης τῆς περὶ σῶμ' ἀμέλειαν ἔχειν χρή·
ἀλλὰ ποτοῦ τε μέτρον καὶ σίτου γυμνασίων τε
ποιεῖσθαι· μέτρον δὲ λέγω τόδ', ὅ μή σ' ανιήσει.
Εἰθίξου δὲ δίαιταν ἔχειν καθάρειον, ἄθρυπτον·
καὶ περύλαξο γε ταῦτα ποιεῖν, ὁπόσα φθόνον ἴσχει.
Μὴ δαπανᾶν παρὰ καιρὸν, ὁποῖα καλῶν ἀδαήμων·
μηδ' ἀνελεύθερος ἴσθι· μέτρον δ' ἐπὶ πᾶσιν ἄριστον.
Πρῆσσε δὲ ταῦθ' ἃ σε μὴ βλάψει· λόγισαι δὲ πρὸ ἔργου.
Μηδ' ὕπνον μαλακοῖσιν ἐπ' ὄμμασι προσθέξασθαι
πρὶν τῶν ἡμερινῶν ἔργων τρὶς ἕκαστον ἐπελθεῖν·
πῆ παρέβην; τί δ' ἔρεξα; τί μοι δέον οὐκ ἐτελέσθη;
ἀρξάμενος δ' ἀπὸ πρώτου ἐπέξιθι· καὶ μετέπειτα
δειλὰ μὲν ἐκπρήξας ἐπιπλήσσεο, χρηστὰ δὲ, τέρπευ.

V. 23. τι λέγηται. Stobeo: σοί τι γένηται. — V. 24. εἶχ'. Aldo, l'Ertelio, lo Stefano, il Marcilio, il Sylburgio, il Glandorf, il Brunck e l'Orelli hanno ἴσχ'. - ἐπὶ παντὶ. Lo Stobeo: ἐπὶ πᾶσι. — V. 25. λόγῳ ... ἔργῳ. Il solo C. Vienn. λόγος ... ἔργον. — V. 26. μηδ'. Brunck e Orelli μήτ'. - ὅτι: ὅ, τι Aldo. Lo segue il Mullach. Lo Stobeo dopo questo verso mette quello, che si trova sotto al n.° 39 πρῆσσε δὲ κ. τ. λ. — V. 27. μῶρα. Così il Brunck, l'Orelli e lo Schweplinger. Gli altri: μωρά. — V. 28. δειλοῦ τοι. La Curteriana ha δειλοῦ τε. La seguono il Marcilio, il Wechel e il Dacier. — V. 29. ἀνιήσει. Il C. Vienn. e le edizioni del Needham e del Curter: ἀνιήσῃ. I Codd. F. ἀνιάσῃ e in margine ἀνιήσῃ. — V. 30. πρῆσσε. Froben: πρῆσε, che non può sostenersi. Il C. Vienn. πρᾶσσε e, invece di τῶν, ὧν. - ἐπίστασαι. La Curteriana: 'πίστασαι. I Codd. F. πίστασο e in marg. πιστάσαιο. — V. 32. ὑγιείης. Il Vienn. ὑγιείας. - τῆς περὶ σῶμ'. Lo Stobeo τῆς κατὰ σ. — V. 33. μέτρον. Altri citati dal Gaisford: μέτρων. - σίτου. L'ediz. ven. σίτων. I Codd. F. σίτου καὶ. — V. 34. μέτρον δὲ. Gesnero μετρῶν δὲ. - τόδ'. I C. Parig. dello Stobeo A. B. presso il Gaisford: τοῦτο - ἀνιήσει. Codd. F. ἀνιήσῃ e Vienn. ἀνιήσῃ. — V. 35. εἰθίξου. Arsenio e Trincavello: ἐθίζου. Cod. Par. A. ἐθίζουσαν. Gesnero: ἠθίζου. - καθάρειον. Gesn. καθάριον; cui la ragion del metro si oppone. — V. 36. γε ταῦτα. Codd. F. e d'Oxford A. C. D. τοιαῦτα. - ποιεῖν. Curteriana: πονεῖν. — V. 39 ὁποῖα καλῶν ἀδαήμων. Stob. ἀπειροκάλως ἐνι ἡμῶν; ma la variante da noi seguita si trova nel Cod. Par. A. dello stesso Stobeo. Marcil. ἐνὶ κμῖν (in nobis, in societate nostra seu pythagorica). Altri ἔνι (per ἔνεστιν) ἡμῖν. — V. 38. μηδ', Gesn μή δ'. — V. 39. πρῆσσε. Codd. F. e Vienn. πρᾶσσε. - βλάψει. Cod. Ven. βλάπτει. Vienn. Stef. Salm. Needh. βλάψῃ. Nel manuscr. di Augusta, secondo che avverte il Fabricio, seguono i due seguenti versi, i quali mancano nelle edizioni dei versi aurei; ma si trovano citati da Porfirio nella Vita di Pitagora (Ediz. di Kuster, pag. 41.) πρῶτα μὲν ἐξ ὕπνοιο μελίρρονος ἐξαπανιστὰς - εὖ μάλα σκοπεύειν ὅσ' ἐν ἦματι ἔργα τελέσσας. — V. 41. τρὶς ἕκαστον ἐπελθεῖν. Presso Ierocle λογίσασθαι ἕκαστον. Epitteto, Dissert. III. c. 10. ἡμερίων ἔργων λογίσασθαι ἕκαστα. — V. 42. πῆ. Suida ποῖ. - οὐκ ἐτελέσθη. Epitt. Diss. I. ἐκτετέλεσται. — V. 43. πρῶτον. Epitt. ibid. τοῦδε. — V. 44. δειλὰ. Epitt. ibid. δεινὰ. - στερπευ. Altri: τέρπου. In molti Codici (Aug. Oxf. A. C. D e Ven.) segue un verso evidentemente spurio: ταῖς αὐταῖς ἀρεταῖς ποιεῦ φίλον, ὃν κ' ἐθέλητθα.

Quanto io dico si compia. Alcun non sia
Che con parole od opere t'induca
A dire o a far ciò che non credi il meglio.
Pria d'oprar ti consiglia, a fin che l'atto
Non sia da pazzo. Un uom da nulla è sempre
Chi sconsigliato opra, o discorre. Compi
Sol quello, onde pentir poi non ti debba.
Non far cosa giammai, che tu non sappi
Come dee farsi, e quanto è d'uopo apprendi.
Così più dolce scorrerà tua vita.
  Nè del corpo si dee la sanitade
Mettere in non caler. Nelle bevande,
Ne' cibi e ne' ginnastici esercizi
Va con misura, e tal misura intendo,
Che nuocer non ti possa. A puro vitto,
Non delicato, avvezzati. Ti guarda
Da quanto invidia può recarti. Fuori
Del tempo il tuo non isprecar, siccome
Uom, che i suoi beni non conosce, e in una
Misero non mostrarti. Ottima cosa
In tutto è la misura. A far t'induci
Ciò, che di danno a te non fia; ma innanzi
Vada all'opra il consiglio. Non accogliere
Il sonno sotto delle molli ciglia,
Se pria tre volte non avrai ciascuna
Opra del giorno riandata: « Dove
Caddi in errore? Che fec'io? Qual cosa,
Che far dovessi, intralasciai? » Discendi
Giù, dalla prima incominciando, e poscia
Ti turbi il mal, che oprasti, e il ben ti allieti.
In ciò ti briga, in ciò poni tua cura.
Questo tu devi amar, questo sull'orme
Ti locherà della virtù divina.
Lo giuro per Colui, che all'alma nostra
La quaderna donò, che è di perenne
Natura la sorgente. E tu ti metti
Senza dimora all'opra e i numi invoca,

Ταῦτα πόνει, ταῦτ' ἐκμελέτα· τούτων χρὴ ἐρᾶν σε,
ταῦτα σε τῆς θείης ἀρετῆς εἰς ἴχνια θήσει.
Ναὶ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ ψυχῇ παραδόντα τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως. ἀλλ' ἔρχευ ἐπ' ἔργον,
θεοῖσιν ἐπευξάμενος τελέσαι. Τούτων δὲ κρατήσας
γνώσεαι ἀθανάτων τε θεῶν θνητῶν τ' ἀνθρώπων
σύστασιν, ἥ τε ἕκαστα διέρχεται, ἥ τε κρατεῖται.
γνώσῃ δ' ἣ θέμις ἐστὶ, φύσιν περὶ παντὸς ὁμοίην,
ὥστε σε μήτε ἄελπτ' ἐλπίζειν, μήτε τι λήθειν.
γνώσῃ δὲ ἀνθρώπους αὐθαίρετα πήματ' ἔχοντας
τλήμονες, οἳ τ' ἀγαθῶν πέλας ὄντων οὔτ' ἐσορῶσιν,
οὔτε κλύουσι· λύσιν δὲ κακῶν παῦροι συνίσασι.
Τοίη μοῖρα βροτῶν βλάπτει φρένας· ὡς δὲ κύλινδροι
ἄλλοτ' ἐπ' ἄλλα φέρονται, ἀπείρονα πήματ' ἔχοντες·
λυγρὴ γὰρ συνοπαδὸς ἔρις βλάπτουσα λέληθε
σύμφυτος, ἣν οὐ δεῖ προάγειν, εἴκοντα δὲ φεύγειν.
Ζεῦ πάτερ, ἥ πολλῶν κε κακῶν λύσειας ἅπαντας,
εἰ πᾶσιν δείξαις, οἵῳ τῷ δαίμονι χρῶνται.
Ἀλλὰ σὺ θάρσει, ἐπεὶ θεῖον γένος ἐστὶ βροτοῖσιν,
οἷς ἱερὰ προφέρουσα φύσις δείκνυσιν ἕκαστα·
ὧν εἰ σοί τι μέτεστι, κρατήσεις ὧν σε κελεύω,
ἐξακέσας ψυχὴν δὲ πόνων ἀπὸ τῶνδε σώσεις.
Ἀλλ' εἴργου βρωτῶν, ὧν εἴπομεν, ἔν τε καθαρμοῖς,
ἔν τε λύσει ψυχῆς κρίνων, καὶ φράζευ ἕκαστα,
ἡνίοχον γνώμην στήσας καθύπερθεν ἀρίστην.
Ἢν δ' ἀπολείψας σῶμα ἐς αἰθέρ' ἐλεύθερον ἔλθῃς,
ἔσσεαι ἀθάνατος, θεὸς ἄμβροτος, οὐκ ἔτι θνητός.

V. 48. παγὰν. Sest. Emp. adv. Arithm. l. IV. πηγὴν. - ἀενάου. Codd. F. ἀεννάου contro la ragione del metro. - φύσεως. Porfirio e i Codd. dello Stob. φύσιος. - ἔρχευ. Codd. F. ἔργον ἐπ' ἔργῳ. — V. 50. γνώσεαι. Aldo, Stef. ed altri: γνώσῃ. — V. 51. ᾗ τε. Ediz. del Giunta ἥτε. Manuzio ediz. in fine delle istituzioni di gramm. lat. Venezia 1545 ἥ τε. — V. 52. ᾗ. Ediz. Giunt. ἥ. — V. 53. ὥστε. Altri ὡς τε. - μήτε. Altri μή τέ. — V. 54. γνώσῃ ... ἔχοντας. A. Gellio lib. VI. c. 2. (alcune edizioni) γνώσει ... ἐλόντας. — V. 55. τλήμονες. Codd. F. Ven. e Vienn. τλήμονας, variante adottata dal Mullach. - οὔτ' ἐσορῶσιν. Schwepfinger: οὐκ ἐσορῶσιν. — V. 56. συνίσασι. Cod. Mediceo συνίσασι. — V. 57. τοίη μοῖρα βροτῶν. Cod. Vienn. τοίη μοῖρ' αὐτῶν. - ὡς δὲ κύλινδροι. Cod. Vienn. οἱ δὲ κυλίνδροις. Glandorf nelle sue annotazioni a questo verso pensa che si debba leggere: οἱ δὲ κύλινδροι, ἄλλοτ' ἐπ' ἄλλα. — V. 58. ἀπείρονα. Aldina e Giunt. ἀπήρονα. — V. 59. λυγρὴ. Cod. F. Vien. e Oxf. λυγρὰ. — V. 60. σύμφυτος. Cod. F. σύμφοιτος. - προάγειν. C. F. e Oxf. προσάγειν. — V. 61. ᾗ πολλῶν κε κακῶν. Marc. Salm. ed altri: ἥ πολλῶν γε. Codd F. Aldina maggiore: ἥ πολλῶν τε κακῶν τε. Ald. min. e Giunt. ᾗ πολλῶν τε κακῶν ... - λύσειας. Cod. Ven. Oxf. Ald. min. Giunt. Giamblico Mem. pitag. lib. III. παύσειας. — V. 62. εἰ. Ald. magg. ἢ. —° V. 65. ὧν. Glandorf: ἅς. Orelli: ἃς. — V. 67. εἴπομεν, ἔν τε καθαρμοῖς. Gland. εἴπομεν' ἔν τε καθαρμοῖς. — V. 68 κρίνων. Ald. min. ed altri: κρῖνον. — V. 71. ἔσσεαι ἀθάνατος, θεὸς ἄμβροτος. Aldo: ἔσσεαι αθάνατος, θεὸς, ἄμβροτος. Stefano ed altri: ἔσσεαι ἀθάνατος θεὸς, ἄμβροτος. - οὐκ ἔτι. Aldo: οὐκέτι.

Che la traggano a fin. Se queste cose
Possederai, noto a te fia congiunti
Come sieno tra lor mortali e numi,
Come ciascuna cosa è passeggera
E come eterna duri: apprenderai,
Per quanto il puoi, come del Tutto intorno
La natura è simil, sì che speranza
Tu non accolga d'insperabil cosa
E nulla ignori. Anco vedrai, che ai mali
Gli uomin s'appiglian da se stessi. Ahi miseri!
Sta lor dappresso il bene: ei non lo veggono,
Nè la voce ne ascoltano, e ben pochi
San dai mali disciorsi. Un cotal fato
Le intelligenze de' mortali offende.
Come cilindri rotolando ci vanno
Di qua, di là, d'interminate angosce
Sempre in balía; chè la fatal contesa
Loro seguace e nata insiem con essi,
Non avvertita li travaglia, a cui
Non farsi guida ci debbono, ma il tergo
Volger cedendo. O Giove padre, tutti
Da molti mali liberar potresti,
Se tu mostrassi a ogn'uom di quale spirto
Gli è dato usar! Rincorati. Divina
Specie d'uomini v'ha, cui sacra ed alta
Natura il tutto addita, a' quai simile
Ove in parte sia tu, quel che or t'impongo
Fermo terrai, te risanando, e l'alma
Addur potrai da questi mali in salvo.
  Ma dai cibi ti astien, che a te già noti
Io feci, e ben t'appiglia allor che l'alma
Purgar tu brami e a libertà ritrarla:
E, quale auriga, la miglior sentenza
In alto loca sovra lei. Se, il corpo
Abbandonando, volerai nel libero
Etere, allora un immortal sarai,
Non più mortal, ma incorruttibil nume.

INTERPRETAZIONE.

Versi aurei di Pitagora. – Ho ritenuto il titolo, che in quasi tutte le edizioni precede questi versi, quantunque abbia nella dissertazione preliminare dimostrato, che nè a Pitagora, nè ad alcun altro determinato autore possono essere attribuiti. La più antica allusione a questi versi, che è quella di Crisippo, conservataci da A. Gellio, ce li presenta come opera dei pitagorici in generale, ossia dell'antica loro scuola. Nè prima d'Epitteto io trovo alcuno, che li tenga per cosa di Pitagora (l. IV. c. 6. p. 473.). Li chiamano gli antichi *παραγγέλματα* (Hieronym. contra Rufin. – Simplic. in Epict. Enchir. p. 204. – Hierocl. p. 23. Comm. in v. a.), *παραινέσεις* (Galenus, De dignosc. affect. p. 528.), *ὑποθήκας* (Simplic. op. cit. p. 3. – Hierocl. loc. cit.). Quanto all'aggiuntivo di *aurei* (*χρυσᾶ*) pare che non fosse loro dato prima del quarto secolo dell'era volgare, e che Giamblico pel primo ne facesse uso nel *Protreptico*, e fosse poi in ciò imitato da Calcidio, da Proclo, da Ierocle e da quanti altri dovettero fare menzione di tali versi.

Onora in prima gl'immortali dei, (v. 1.)

Onora. – Quale si fosse quest'onore, che Pitagora intendeva si dovesse tributare agli dei, appare dalla testimonianza di molti antichi scrittori, i quali sembra s'accordino nello affermare, che egli non ammettesse i sacrifizii cruenti. Giamblico (che io qui cito e più volte anche in appresso, non perchè faccia sicura testimonianza del vero, come ho già nel discorso preliminare accennato; ma perchè ci fornisce gran numero di particolari e mostra che molto studio avea posto intorno alle tradizioni di quell'antica scuola, quantunque le mescolasse talvolta colle platoniche e con quelle d'altre scuole orientali), nella *Vita di Pitagora*, riferisce gli ammonimenti da lui fatti alle donne di Crotone intorno ai riti sacri: « *Dicesi*, che queste cose alle donne egli manifestasse intorno ai sacrifizii. Prima

di tutto a quel modo che, dovendo un altro fare le supplicazioni in luogo loro, vorrebbero ch'egli fosse onesto e dabbene, poichè a questa sorta d'uomini gli dei porgono più facile orecchio, così tenessero in molto pregio la modestia per avere con quella in pronto chi fosse per ascoltare i loro voti. Poscia offerissero agli dei quelle cose, che potevano apparecchiare colle proprie loro mani e, senz'opera di famigli, deporre sopra gli altari, come libamenti e stiacciate di farina d'orzo e favi di miele ed incensi. Non facessero onore al demone (*dio*) coll'uccisione e colla morte; nè in una sola occasione soverchiamente spendessero, come se più non dovessero altra fiata accostarsi all'altare (1). » E Suida in *Pitagora:* « *Dicono*, che non insanguinasse gli altari; ma quell'uomo usasse accostarsi agli dei con focacce, col miele, con incensi e con inni: egli conosceva che gli dei si dilettano di tali cose più che delle ecatombi e del coltello posto sopra il canestro (2). » Del che dubita Diogene Laerzio appoggiandosi alla testimonianza di Aristosseno peripatetico e biografo di Pitagora: « Egli usava sacrifizii di cose non animate. Altri dice tuttavia ch'egli sacrificasse soltanto gallinacci e capretti di quei di latte, che chiamano *tenerini* e più raramente agnelli. Aristosseno poi afferma ch'egli si permettesse di mangiare tutte cose animate e solo si astenesse dal bue aratore e dal montone (3). » Voleva Pitagora, secondo Giamblico, che dagli dei si domandasse ciò che è bene per l'uomo e diceva che: « fanno cosa degna di riso quelli, che da altri che dagli dei chiedono ciò che è bene, e somigliano a colui, che in un paese governato da un re piglia a corteggiare qualcuno de' principali cittadini e del re non si dà punto pensiero (4). » Voleva pur egli, che fine del culto loro prestato fosse il raggiungere una perfetta somiglianza con loro, come appare dallo Stobeo: « Socrate e Platone, del pari che Pitagora, *dissero* il fine essere la somiglianza con dio. Lo stesso accennò oscuramente Omero cantando:

Le vestigia del dio segui...

Pitagora poi quando dice (5): *segui dio*, egli è chiaro che non intese già

(1) Vita di Pitagora, c. XI.

(2) Suida citando la testimonianza di Filostrato, D.

(3) In Pitagora, XVIII. 20.

(4) Ibid. c. XVIII.

(5) ὑπ' αὐτὸν εἶπεῖν. Il Wyttenbach nelle note all'opuscolo di Plutarco: *De sera numinis vindicta* propone che si legga ἐπ' αὐτον...

parlare di un dio visibile e tale che sensibilmente preceda; ma intelligibile secondo l'armonia e a cagione del bell'ordine dell'universo (1). » Ma egli credeva nello stesso tempo, al dire di Suida, che l'uomo non potesse conoscere il culto loro conveniente in altro modo che per mezzo della rivelazione: « Poichè egli bisogna communicare cogli dei e apprendere da loro per qual modo gli uomini rechin loro piacere, per qual modo li movano a sdegno (2). »

In prima. – La precedenza nell'onore, secondo Pitagora, era determinata dalla precedenza nell'esistere, o nel tempo. Diceva egli (afferma Diogene Laerzio) « doversi aver in onore i più vecchi, riputandosi più onorevole ciò che precede nel tempo, come nel mondo più l'oriente che l'occidente, nel vivere più il principio che la fine, nella vita animale più la generazione che la corruzione: ed onorare prima gli dei che i demoni, gli eroi che gli uomini, e tra gli uomini specialmente i genitori (3). » Le stesse cose troviamo presso Giamblico dove riferisce i discorsi di Pitagora ai giovani Crotoniati: « Circondandolo i giovanetti, dicesi che egli tenesse loro alcuni discorsi, coi quali invitavali ad aver cura de' più vecchi, dimostrando loro come nel mondo e nella vita, nelle città e nella natura più onorato sia quello, che precede, di quello, che per tempo vien dopo, come l'oriente più dell'occidente,' il mattino più della sera, il principio più del fine, la generazione più della corruzione, e in modo somigliante i nativi del paese più de' forestieri, e parimente più di quelli, che abitano nelle colonie, coloro che le hanno condotte e ne fondarono le città; e del tutto più gli dei che i demoni, e questi più che i semidei, e gli eroi più che gli uomini (4). »

Gl'immortali. – L'immortalità degli dei, giusta l'opinione di Pitagora, aveva la sua cagione nella natura del luogo da loro abitato. « L'aria (diceva egli, secondo Suida), che è intorno alla terra, è immobile e morbosa e tutte le cose in lei contenute sono mortali; ma l'aria più alta è sempre mobile, pura e sana, e quanto in lei si trova è immortale e perciò divino; poichè sovr'esso domina il calore, che è cagione di vita (5). »

---

(1) Eclogae ethicae, l. II. c. III.
(2) In Pitagora, E.
(3) Ibid. c. XIX. 23.
(4) Vita di Pit. c. VIII.
(5) Symbola Pythagorae, pag. 658. E.

Quindi egli riputava dei immortali il sole, la luna e le altre stelle, come appare da Diogene Laerzio: « Il sole, la luna e le altre stelle *diceva* esser dei, poichè domina in essi il calore, che è cagione di vita (1). »

Dei. – Dalla testimonianza che fu da me ora citata è fatto palese come Pitagora ammettesse insieme con un dio sommo e potentissimo altre divinità inferiori. Anzi con alcune di queste si narra ch'egli affermasse di aver avuto particolari abboccamenti, come p. e. con Apolline, con Minerva e colle Muse. Trovo infatti in Suida: « *Diceva* che gli altri della divinità parlano per congetture ed hanno intorno a quella opinioni le une alle altre contrarie; ma che a lui era venuto lo stesso Apolline, manifestando chi egli si fosse, e si erano pure abboccati con lui senza manifestare l'essere loro Minerva e le Muse ed altri dei, di cui gli uomini non conoscono nè le forme nè i nomi (2). » Secondo Cicerone, egli teneva quel supremo dio in conto di anima del mondo e il voleva tale che si distendesse e trapassasse per tutta la natura e che da lui si derivassero le anime umane. « Pythagoras censuit (*deum*) animum esse per naturam rerum omnem intentum et commeantem, ex quo nostri animi carperentur (3). » Afferma Plutarco ch'egli il chiamasse pure col nome di *Monade*. « Pitagora disse tra i principii la Monade esser dio ed il bene, la quale si è la natura dell'uno e la Mente stessa; la *Diade* poi indeterminata essere il demone ed il male, intorno alla qual diade è la pluralità della materia e il mondo visibile (4). » Ed altrove: « *pose* tra i principii la Monade e la Diade indefinita. Di questi principii l'uno tende alla causa effettrice e formale, quale si è la Mente o dio, l'altro alla passiva o materiale, quale si è il mondo visibile (5). »

Quanto agli altri dei non sarà fuor di luogo il qui arrecare questo bel brano risguardante le dottrine di Filolao, il quale ci fu conservato dallo Stobeo: « Filolao pone il fuoco nel mezzo intorno al centro, il quale egli chiama focolare dell'universo e magione di Giove e madre degli dei, ara, nucleo e misura della natura, ed inoltre un altro fuoco altissimo, che tutto circonda; ma dice per natura esser primo quel di mezzo e intorno

(1) Ibid. cap. XIX. 27.
(2) In Pitagora, E.
(3) De natura deorum, l. I. c. 11.
(4) De placitis philosophorum, I. 7. 14.
(5) Ibid I. I. 15.

a lui danzare dieci corpi divini, il cielo, i pianeti e, dopo loro, il sole, e sotto il sole la luna, e sotto la luna la terra, e sotto questa la contro-terra, e, dopo tutto, il fuoco, che tiene al centro il luogo di focolare. La parte superiore di quel fuoco, che tutto circonda, la qual parte contiene i primi elementi nella loro purezza, egli la chiama *Olimpo*, il luogo sotto l'olimpo, in cui sono ordinati i cinque pianeti col sole e la luna, lo appella *Mondo:* sotto questi poi la parte sublunare, che circonda la terra e in cui si generano le cose mutabili, la nomina *Cielo;* e dice che tra le cose superiori e ordinate regna la sapienza, e in quelle che nascono senza ordinazione alcuna, la virtù, quella perfetta, questa imperfetta (1). »

Come la legge li ordinò. (v. 2.) (2)

La legge. – Per legge qui si vuol intendere la volontà di dio, che gli dei inferiori dispose in quell'ordine, ch'egli credeva migliore. Così la intende il medesimo Ierocle, che io cito nella traduzione di Dardi Bembo: « Quale si è egli questa legge e l'ordine secondo lei? e quale ancora l'onore, che all'ordine si attribuisce? Egli è legge la mente dell'artefice e la volontà divina, la quale perpetuamente produce tutte le cose e le conserva sempre; l'ordine poi, che dalla legge procede, è quel desso, che è dato agli dei immortali dal padre ed artefice di tutte le cose e fa che tra loro altri sono primi, altri secondi (3). »

Li ordinò. – Ierocle pensa che qui si tratti della gradazione che esiste fra gli dei, i demoni, gli eroi e gli uomini; ma tale gradazione essendo indicata in modo chiarissimo nei versi, che seguono, io credo che qui non si debba intendere altra cosa che l'ordine stabilito dal supremo artefice tra gli dei immortali propriamente detti, cioè tra quelli, che, come appare da quanto sopra si è detto, abitano l'aria più alta e più sottoposta all'azione del calore, cagione di vita. Nel numero di questi dei, come

---

(1) Eclogae physicae, XXI. De mundi ordine.

(2) Altri, seguendo la variante da me indicata, intendono: *come la legge ha ordinato o disposto;* onde il Ficino traduce: *ut leges iubent*, ed Angelo Maria Bandini: *secondo il rito.* Aldo Pio Manuzio poi unisce νόμῳ alla proposizione antecedente, così voltando in latino: *Immortales primum deos lege ut dispositi sunt. Cole et venerare iusiurandum* (V. in fine della sua opera: *Institutionum grammaticarum*, lib. IV.). La lezione da me seguita è quella generalmente adottata dai critici moderni ed anche dagli antichi pitagorici, come appare dal *Commento* di Ierocle a questi medesimi versi.

(3) Pag. 9 nell'ediz. di Venezia del 1604.

vedemmo, si trovano appunto gli astri e i pianeti, disposti nei varii cerchi, onde il cielo si compone. La qual gradazione nel senso de' pitagorici non credo possa essere meglio posta in chiaro, che dal seguente brano attribuito al pitagorico Onato: « E a me pare che non vi sia già un solo dio; ma che ve ne sia uno grandissimo e sommo che ha signoria sopra di ogni cosa; molti altri poi per potenza diversi. Tutti li signoreggia quello, che è per potere, per grandezza e per virtù ad essi superiore, e questo sarebbe il dio, che tutto l'universo stringe nelle sue braccia. Gli altri dei sono quelli che discorrono pel cielo insieme col girare dell'universo e seguono secondo ragione il primo e l'intelligibile. Quelli poi, i quali dicono, che vi è un dio solo e non molti, s'ingannano; poichè essi non considerano la grandissima dignità della divina eccellenza: ed io dico, che questa comanda e guida le cose a lei somiglianti ed è più potente e maggiore di tutte le altre. Sono poi gli altri dei rispetto al primo e all'intelligibile come il corista rispetto al corifeo, il soldato rispetto al capitano, il fante e chi è messo in ordinanza, rispetto all'ordinatore e al capo della squadra, avendo essi per natura di seguire e tener dietro a chi bene li conduce (1). » Questo brano, che nella sua sostanza contiene l'idea pitagorica, mi sembra che quanto ai particolari lasci scorgere palesi le tracce della polemica insorta tra il monoteismo cristiano e il politeismo, e sia perciò da tenersi per opera de' tempi, in cui già ardeva la lotta fra i seguaci di quei due principii.

Rispetta
Il giuramento. (v. 2-3.) (2)

I pitagorici non facevano molto uso del giuramento, poichè il loro maestro aveva insegnato: « non doversi giurare per gli dei; ma esser d'uopo che ognuno procuri di rendersi per se stesso degno di fede (3): » ed aveva prescritto ai sinodi, ossia alle pubbliche radunanze, di non ricorrere a quello se non raramente: « convenire alle pubbliche radunanze, il non

---

(1) Eclogae phys. t. 3.

(2) Traduce il Bandini: *adora il giuramento;* ma oltrechè il giuramento non è un dio, è da avvertire, che il verbo σέβομαι, la cui radice è σείω, *movere*, *agitare*, indica essere colpito di timore o di riverenza, non già l'atto dell'adorazione.

(3) In Pitag. XIX. 33.

abusare degli dei nel giuramento; ma doversi in quelle proferire di tali discorsi, che siano degni di fede anche senza giuramento (1). » Il perchè io porto opinione, che le seguenti parole attribuite da Diogene Laerzio a Pitagora: ὅρκιον τε εἶναι τὸν δίκαιον· καὶ διὰ τοῦτο Δία Ὅρκιον λέγεσθαι, vadano intese in questo senso, che l'uomo giusto non deve giurare se non per se stesso: ὅρκιος infatti è addiettivo, che davasi dagli antichi alle cose, per cui alcuno giurava, come appare da Suida, dove afferma essere stato chiamato ὅρκιον σκῆπτρον lo scettro, per cui gli antichi re giuravano, come fa Agamennone presso Omero nel I dell'Iliade al verso 234: ναὶ μὰ τόδε σκῆπτρον, *sì per questo scettro* ecc. Onde giustamente col nome di Ὅρκιος o *Giurio* fu chiamato Giove, essenza ed origine di ogni verità e giustizia.

A conferma di questa ripugnanza, che i pitagorici mostravano pel giuramento, narra Giamblico il seguente fatto: « Riguardo ai giuramenti con grande riverenza si governavano tutti i pitagorici memori del precetto di Pitagora: – Onorà in prima gl'immortali dei, – come la legge li ordinò. Rispetta – il giuramento. Indi gl'illustri eroi, ecc., – a segno che essendo uno di loro costretto a giurare e pur sapendosi che avrebbe fatto buon giuramento, tuttavia per conservare il loro dogma sostennero che invece di giurare deponesse tre talenti (2). » Del qual pitagorico egli riferisce altrove il nome con queste parole: « Havvi pur questo segno della riverenza di lui (*Pitagora*) verso gli dei, ch'egli aveva comandato di non abusare del nome degli dei ne' giuramenti. Per la qual cosa un certo Sillo, che era de' pitagorici di Crotone, per non giurare pagò una multa di danaro, benchè fosse per giurare il giusto (3). » Il medesimo fatto è attribuito da S. Basilio al pitagorico Clinia (4). Riferisce Giamblico nello stesso luogo la formola di giuramento usata dai pitagorici in quei pochi casi, in cui dovevano giurare, la qual formola noi troveremo pure in questi versi d'oro. « E ai pitagorici si attribuisce la seguente formola di giuramento, non osando essi per riverenza nominare Pitagora, in quel modo che assai parcamente usavano anche il nome degli dei, ed indicandolo per mezzo della *tetracti* (*o quaderna*), di cui era stato inventore:

---

(1) Vita di Pit. c. IX.
(2) Ibid. c. XXVIII. p. 144.
(3) Ibid. pag. 150.
(4) Oraz. *Ad adolescentes: quomodo ex gentilium doctrinis proficiant.*

Sì, per lui, che di nostra sapïenza
La *tetracti* trovò, che dell'eterna
Natura ha la sorgente e la radice (1). »

La quale *tetracti* significa pei pitagorici il numero quattro, come vedremo a suo luogo, il qual numero conteneva potenzialmente il dieci, che è il numero perfetto, secondo la loro dottrina, e dalla moltiplicazione de' quattro primi numeri si forma (1+2+3+4=10). Sembra che questa formola variasse nelle idee accessorie; infatti il primo verso è citato con qualche differenza dallo stesso Giamblico altrove: « No, per colui che alla progenie nostra (ἀμετέρῃ γενεῇ) (2); » e dallo Stobeo: « No, per colui, che al capo nostro (ἀμετέρᾳ κεφαλῇ) (3) ecc. »

Indi gl'illustri eroi
Ed i terrestri demoni, secondo
La legge oprando, venera. (v. 3-5.)

Diverso, come già si notava nella prefazione, è l'ordine tenuto da Diogene Laerzio e da Suida in questa enumerazione. Pongono essi infatti prima gli dei immortali, poi i demoni e in fine gli eroi. Ecco le parole di Diogene Laerzio (4), e di Suida: « doversi dio onorare prima dei demoni e gli eroi prima degli uomini (5). » Lo stesso ordine è in Giamblico, le cui parole già furono da noi riferite.

Gl'illustri eroi. – Plutarco afferma che: « Talete, Pitagora, Platone, gli stoici dicono essere i demoni le sostanze delle anime; essere gli eroi anime separate dal corpo, buoni se buone le anime, cattivi se cattive (6). » Il che sarebbe confermato dal nome di *Eroo*, il quale solevasi dare alle sepolture o ai monumenti de' più illustri pitagorici, come lo prova questo brano di Giamblico, in cui egli descrive la morte di dieci di loro caduti in un'imboscata loro tesa per ordine del tiranno Dionisio da Eurimene, fratello di Dione siracusano: « gittando adunque terra sopra i caduti e con tumulo di zolle colà formando un *eroo* per molti uomini, se ne tornarono

(1) Ibid. pag. 150.
(2) Ibid. c. XXIX. p. 162.
(3) Ecl. phys. I. 12.
(4) In Pit. XIX. 23.
(5) Symbola Pyth. p. 658. A.
(6) De placit. phil. I. 8. 882.

indietro (1). » Secondo il Laerzio, questi eroi insieme coi demoni abitavano non già l'etere superiore, ma l'aria vicina alla terra. Diceva Pitagora, « tutta l'aria esser piena di anime e queste credersi che sian demoni ed eroi e che mandino agli uomini i segni e pronostici delle malattie e della sanità, e non solo agli uomini, ma ancora alle pecore ed all'altro bestiame (2). » Il culto che si prestava agli eroi era diverso da quello che tributavasi agli dei, e mentre per onorar questi ogni tempo era buono, per onorar quelli dovevansi invece aspettare le ore dopo mezzogiorno, forse per indicare in tal modo la loro minor dignità rispetto agli dei immortali ed abitatori dell'aria superiore, il che ci è pure tramandato dal medesimo Diogene Laerzio: « Doversi (*diceva Pitagora*) onorare gli dei e gli eroi, ma non in pari modo: gli dei sempre e con religioso silenzio e colla persona avvolta in candide vesti e purificata, gli eroi solo dopo del mezzogiorno: le purificazioni doversi poi fare per mezzo di purgazioni, di lavacri e di aspersioni (3). » Egli pare, che, secondo il rito pitagorico, fossero sacre agli eroi le bricciole e le altre cose che cadono dalla mensa o dentro la mensa, la qual cosa ci è pure affermata da Diogene Laerzio: « non doversi (*insegnava Pitagora*) ricorre le cose andate, o perchè i suoi non si avvezzassero alla intemperanza ne' cibi, o perchè ciò avesse riguardo alla morte di alcuno. Ed Aristofane dice, che agli eroi appartengono le cose cadute, dicendo egli nella commedia intitolata *gli Eroi:* – non gustar ciò che cade intro la mensa – (4). »

Ierocle tuttavia nel suo *Commento*, la cui sentenza noi seguitiamo, reputa, che per eroi debbasi intendere il *genere di mezzo*, cioè i genii o spiriti, che tengono il luogo medio fra gli dei superiori e gli uomini, e per demoni *gli animi degli uomini ornati di verità e di virtù, quasi di dottrina e di scienza dotati.* Egli si accosta ad Esiodo, il quale nel suo poema intitolato *Le opere e i giorni* dice, secondo la lezione riferita da Platone nel *Cratilo*, che gli uomini dell'età prima, cioè dell'età d'oro, dopo la loro morte diventarono demoni terrestri, beneficatori degli uomini: « ma poichè la terra questa schiatta nel suo seno nascose, ricevettero essi la denominazione di puri demoni terrestri, buoni, fugatori de' mali, custodi

(1) Vita di Pit. c. XXXI.
(2) In Pit. XIX. 32.
(3) Ibid. 33.
(4) Ibid. 34.

degli uomini, donatori di ricchezze; e siffatto regal premio essi hanno ottenuto (1). »

I terrestri demoni. – Col nome di demoni intendevano i pitagorici le anime erranti per l'aria, prima che fossero entrate in qualche corpo. Li consideravano essi come una sostanza, da cui si derivavano le anime particolari, che ai nuovi corpi si univano, e, al dire di Aristotele nel libro primo *De anima*, come una minuta polvere; secondo altri poi della medesima scuola, come la forza, che metteva questa polvere in movimento. Sembra tuttavia che essi considerassero queste anime, non ancora unite ai corpi, come viventi di una certa qual vita individuale; poichè, come appare dal luogo di Diogene Laerzio sopra riferito, dai demoni riconoscevano gli uomini e segni e pronostici. Credevano eziandio che loro apparissero, come si fa manifesto da un luogo di Apuleio, dov'è narrato come i pitagorici si maravigliassero, che alcuno dicesse di non averne mai veduto nessuno (2).

Ben diversa è la demonologia platonica o neo-platonica, la quale noi vediamo chiaramente esposta da Apuleio: « Deorum trinas nuncupat (*Plato*) species, quarum est prima unus et solus ille summus, ultramundanus, incorporeus, quem patrem et architectum huius divini orbis superius ostendimus. Aliud genus est quale astra habent caeteraque numina, quos Coelicolas vocamus. Tertium habent quos *Medioxumos* Romani veteres appellant, quod et sui ratione et loco et potestate diis sunt minores, hominum natura profecto maiores (3): » e da Massimo Tirio: « Iddio stando fermo nella sua sede regola egli stesso il cielo e l'ordinamento che è nel cielo. Ha egli poi certe nature immortali secondarie, che si chiamano *dei secondarii*, disposte in ordine nel mediano confine tra la terra ed il cielo, più deboli di Dio, ma più forti dell'uomo, ministri degli dei, protettori degli uomini: vicinissimi a quelli hanno di questi grandissima cura. Imperocchè le cose mortali sarebbero per troppo intervallo disgiunte dalle immortali e dalla visione e conversazione de' celesti, se non fosse questa natura demoniaca, la quale, a guisa di armonia, con un vincolo annodasse la comune natura delle une e delle altre, l'umana infermità colla divina bellezza. Ed io mi credo, che a quel modo che i Barbari

(1) Cratilo, p. 397.

(2) *De Deo Socratis*, ove cita la testimonianza di Aristotele. Ediz. Bipont. V. II. p. 212.

(3) De habitudine doctrinarum et nativitate Platonis philosophi, v. II. p. 168.

sono dai Greci disgiunti perchè gli uni non intendono la lingua degli altri; la razza poi degl'interpreti, ricevendo e trasportando dagli uni agli altri le voci, li congiunge e fa che possano insieme usare; così questa schiatta dei demoni s'intende essere intermedia fra gli dei e gli uomini. Sono essi quelli, che agli uomini appariscono, loro parlano e si aggirano in mezzo alla natura mortale, e sono liberali di quanto è d'uopo che la schiatta de' mortali domandi agli dei (1). »

Aggiungeremo che questo nome di *demoni* equivale a quello di *intelligenze* dato agli angeli o spiriti intermedii fra Dio e gli uomini dai teologi e filosofi cristiani e dal nostro massimo poeta-teologo-filosofo Dante. Egli deriva infatti dal verbo δάω, *divido*, *separo*, *distinguo*, onde δαίμον è lo stesso che δαήμων, *conoscente*, *intelligente*.

Secondo la legge oprando. – Per *legge* intendo qui pure o la legge di gradazione d'onore già accennata, e stabilita dalla volontà dell'artefice supremo, o la legge rituale, che regolava e determinava il culto, che agli dei immortali, ai demoni ed agli eroi doveva essere prestato.

Il tuo padre
E la tua madre onora (v. 5-6.)

Così riferisce Giamblico i precetti di Pitagora intorno all'amore verso i genitori: « Tali cose ai giovanetti diceva: dover essi tenere in molta onoranza i loro genitori, ai quali dovevano avere tanta gratitudine, quanta ne avrebbe un morto a chi avesse potuto di nuovo richiamarlo alla vita. Poscia essere cosa giusta, che coloro, i quali furono primi a recarci grandi benefizii, sopra ogni altra cosa fossero da noi amati e non ricevessero alcun dispiacere; imperocchè i genitori sono i soli, che primi ci beneficarono col generarci, e sono i progenitori cagione di quanto di bene possono i loro discendenti operare; i quali chi si mostra pronto a beneficare sopra ogni altra cosa, è impossibile che pecchi; imperciocchè egli è conveniente che gli dei si mostrino indulgenti verso di coloro, che sopra ogni cosa amano i loro genitori, avendo noi da questi ad onorare la divinità stessa imparato. Onde Omero volle con tale denominazione esaltare maggiormente il re degli dei, chiamandolo *padre degli*

(1) Dissertaz. XIV. c. 8.

dei e degli uomini (1). » Ed altrove: « E specialmente noi diciamo, che coloro, i quali furono cagione che noi vedessimo il sole e la luce, vogliono essere sovra ogni modo onorati e venerati, il padre cioè e la madre, come coloro che ci sono cagione di grandissimi beni. Ei sono infatti cagione, come appare, che noi possiamo e vedere ed intendere (2). »

A questi s'accordano i precetti che lo Stobeo riferisce come tolti dal libro *De mulieris armonia* della pitagorica Perictione: « Contra i genitori nulla di male si dee nè dire, nè fare; ma obbedir loro, siano essi in alto o in basso stato. Qualunque sia la condizione dell'anima, del corpo, o delle cose esteriori, in pace ed in guerra, in sanità e in malattia, in ricchezza e in povertà, in onore e in vituperio, privati o governanti dobbiamo star loro allato e non abbandonarli, ed ubbidirli, salvo il caso che siano da demenza travagliati; imperocchè queste cose i pii uomini tengono per saggie e per buone. L'aver poi in dispregio i proprii genitori è tal segno di empietà, che ai vivi e ai morti gli dei imputano a peccato: è tenuto in odio dagli uomini, e sotterra nel luogo dove sono gli empii è con gravi malori a lungo punito dalla Giustizia e dagli dei infernali, che furono collocati a vegliare sopra le cose, che ivi sono. Imperocchè divina e bella è la vista de' genitori, e lo star loro vicino e l'averne cura è più da pregiarsi che il sole e le cose tutte, che intorno al cielo le une colle altre connesse menano le loro danze, o più di qualunque altra cosa, che uom reputi a queste maggiore o di aspetto più grato... Il perchè e vivi e morti onorare si debbono e in nessun modo si ha da contraddir loro, e se per malattia o per errore cadono in ignoranza di qualche cosa, bisogna consolarli od ammaestrarli, prenderli in odio non mai; perchè tra gli uomini non può commettersi peccato o ingiustizia più grande che il non mostrarsi benevolo verso de' genitori (3). »

E chi per sangue
Più t'è vicino; (v. 6-7.)

Dai molti e bei brani di Ierocle, recati dallo Stobeo, intorno all'amore

(1) Vita di Pit. c. VIII.
(2) Protreptico, c. VIII.
(3) Ἀνθολόγιον, tit. 79. n.° 50.

verso i genitori, i fratelli, i parenti, scelgo il seguente, in cui è bellamente indicata la gradazione che si deve serbar nell'amore secondo la maggiore o minore vicinanza di parentela. « Alle cose da noi dette utilmente intorno a' genitori e a' fratelli, alla moglie e a' figliuoli, ne viene di conseguenza che si debba aggiungere ancora quanto riguarda i congiunti, come cosa, che con quelle ha stretta relazione, e però qui può essere senz'altro discorsa. Ciascuno di noi infatti è come posto al centro di molti cerchii, altri minori ed altri maggiori, quali contenenti, quali poi contenuti, secondo le differenti ed ineguali ragioni, che gli uni hanno verso degli altri. Il primo e più vicino di tali cerchi si è quello, che intorno alla mente di ciascheduno, come a centro, è descritto, nel qual cerchio trovasi rinchiuso il nostro corpo e quanto per ragion del nostro corpo ci procuriamo. E questo cerchio è piccolissimo e per poco egli non tocca il suo centro. Dopo questo ve n'ha un secondo, il quale dista maggiormente dal centro e abbraccia quel primo, e in lui si trovano per ordine i genitori, i fratelli, la moglie e i figliuoli. Ve n'ha quindi un terzo, in cui sono gli zii e le zie, gli avoli e le avole, i figliuoli de' fratelli e i cugini. Poi viene quello che abbraccia tutti gli altri congiunti, e di seguito i circoli, in cui sono i nostri compagni di borgata, quelli di tribù, e i commilitoni; inoltre nella stessa guisa quello in cui si contengono coloro, che abitano vicino alla città nostra, e quello in cui gli uomini, che alla stessa nazione con noi appartengono, e finalmente il più esterno e il più grande, che tutti gli altri circoli racchiude, e contiene tutto il genere umano. Queste cose in tal modo considerate, egli è d'uopo che colui, il quale intende di convenientemente usare di ciascun di loro, attragga tutti quei circoli al centro e con gran cura tiri di continuo nei circoli contenuti quelli, che stanno ne' circoli contenenti. D'uomo amante della sua famiglia è proprio certamente lo attirare a sè i suoi genitori e i suoi fratelli; dunque per la medesima analogia anche i più vecchi tra i suoi congiunti d'ambo i sessi, come avoli, zii, e zie, quindi i pari in età, come i cugini, poi quelli d'età inferiore, come i figliuoli de' cugini. Così in brevi parole abbiamo esposto il nostro parere intorno al modo da tenere coi parenti. Ora, poichè superiormente abbiamo insegnato qual uso dobbiamo fare di noi stessi, de' genitori, de' fratelli, della moglie e de' figliuoli, qui aggiungeremo che similmente si debbono onorare coloro, che si trovano nel terzo cerchio; imperocchè quantunque ai congiunti tolga molto della nostra benevolenza la loro distanza da noi, secondo la

ragione del sangue; tuttavia noi dobbiamo procurare con ogni sforzo di giungere a tale somiglianza di onore verso di loro, e questa toccherà la sua giusta misura, se con proposito intenso scemiamo la distanza della relazion nostra verso ciascuna di tali persone. Quello che è più conseguente e più praticabile già da noi fu esposto. Egli è d'uopo ancora con misurato uso delle appellazioni chiamare i cugini e gli zii e le zie col nome di fratelli, di padri e di madri, e gli altri parenti dir zii o cugini da parte di padre o di madre, affinchè fino a loro si stendano quegli onori, fatta ragione delle diverse età loro. Imperocchè questo modo di nominarli è nello stesso tempo non oscuro segno della sollecitudine che noi abbiamo per ciascuno di loro, ed eccitamento ed impulso verso quella specie di contraimento de' circoli, di cui sopra abbiamo discorso. Ora poichè a questo punto siam giunti, non ci pare inopportuno il ricordare la distinzione fatta riguardo ai genitori. Dicevamo infatti, quando fummo giunti a quel luogo dove per noi si paragonava la madre col padre, che alla madre si dee piuttosto tributare amore, al padre onoranza; il perchè qui per conseguente affermeremo, che i parenti da parte di madre si debbono di preferenza amare, e quelli da parte di padre voglion essere di preferenza onorati (1). »

Ed i miglior fra gli altri
Fa che ti sieno per virtude amici; (v. 7-8.)

Due gravissimi documenti si contengono in queste parole, l'uno de' quali riguarda la scelta degli amici, che si dee sempre fare tra coloro, che sono i migliori fra gli uomini, l'altro il motivo stesso o il movente dell'amicizia, il quale dev'essere non già l'utile o qualunque altra cosa, che a noi giovi, ma la conoscenza della virtù che è in quello, cui desideriamo di avere per amico. Giamblico in quel luogo della sua vita di Pitagora dove ragiona dell'amicizia de' pitagorici, ne ha conservato questo bel brano di Aristosseno, in cui è narrata la gara generosa di Damone e Fintia, o, come altri dicono, Pitia. « Del modo con cui Pitagora rifiutava, non già sbadatamente, le amicizie cogli strani, ma con molta cura le evitava e se

(1) Ibid tit. 84. n.° 23.

ne guardava, e di quello, con cui per molte generazioni i discepoli di lui custodirono intiera l'amicizia che gli uni cogli altri avevano stretta, potrebbe alcuno avere un indizio da ciò che Aristosseno nel suo libro *della vita pitagorica* dice aver udito da Dionisio tiranno di Sicilia, quando questi, perduto il regno, insegnava a leggere in Corinto. Ecco le parole di Aristosseno: – Si astenevano quegli uomini quanto era possibile dai gemiti, dalle lagrime e da tutte le altre cose a queste somiglianti, e lo stesso modo ei tenevano quanto alle adulazioni, alle preghiere, alle suppliche e ad altre cose d'egual natura. Dionigi caduto dal suo trono, e venuto essendo ad abitare in Corinto, più volte mi narrò la storia di due pitagorici Fintia e Damone, nella quale trattavasi di una malleveria, che l'uno fece per la morte dell'altro. Egli mi disse, che alcuni de' suoi cortigiani più volte avevano fatto menzione de' pitagorici proverbiandoli e schernendoli, col chiamarli millantatori e dire che si scemerebbe pure quella lor gravità e simulata fede se alcuno li gittasse in qualche grave rischio. Contradicendo loro alcuni e riscaldandosi la contesa, si ordì una trama contra quelli che stavano con Fintia, ed uno degli avversari, fattosi accusatore di lui, disse, che egli era cosa nota essersi lui trovato con altri a congiurare contra il tiranno. Essendo ciò confermato dalla testimonianza degli altri che eran presenti, e mostrando essi tale sdegno, che pareva aggiunger fede all'accusa, Fintia fece dapprima le maraviglie di tale discorso; ma dicendogli poi Dionisio apertamente che la cosa era ben manifesta e ch'egli doveva morire, gli rispose, che se a lui pareva che così stesse la cosa, non isdegnasse concedergli il rimanente della giornata per dare un assetto alle sue faccende domestiche e a quelle di Damone; imperocchè questi due uomini vivevano in compagnia e non avean nulla che non fosse comune, e Fintia essendo il più vecchio, a lui toccavano le maggiori cure quanto all'amministrazione della casa. Chiedeva adunque di potere per cagione di tali cose allontanarsi e dava per mallevadore Damone. Mi disse Dionisio ch'egli stupì e gli domandò se tal uomo vi fosse, che non dubitasse di farsi mallevadore per uno, che doveva morire, e Fintia ciò affermando, si mandò per Damone, il quale, com'ebbe inteso quanto era avvenuto, disse, ch'egli si facea veramente mallevadore e avrebbe aspettato fin tanto che Fintia tornasse. Ei mi diceva che queste cose subitamente il colpirono di grande maraviglia; ma coloro, che erano stati primi a proporre la prova, si facevan beffe di Damone, come s'ei fosse per rimaner nella rete, e dicevano scherzando ch'egli era come il

cervo a Fintia sostituito (1). E già essendo il sole vicino al tramonto, sen venne Fintia per ricever la morte; per il che tutti rimasero attoniti e tremanti al pari di schiavi; ma Dionisio, com'egli mi disse, abbracciandoli e baciandoli entrambi, li pregò di volerlo pigliare per terzo nella loro amicizia, al che quelli, per quanto li scongiurasse, non poterono mai essere indotti. – Queste cose narra Aristosseno, come udite dalla bocca stessa di Dionisio. Narrasi ancora che i pitagorici, anche senza conoscersi, procurano di prestarsi a vicenda gli uffizi dell'amicizia, purchè abbiano da coloro, che mai non videro di presenza, un segno, ch'ei sono partecipi della medesima dottrina. Sicchè per siffatte opere più non rimane incredibile ciò che si dice, cioè che uomini diligenti osservatori di quella dottrina, ancorchè abitino in luoghi distanti, sono già amici tra loro prima ancora di essersi veduti e salutati. Raccontasi che uno de' pitagorici dopo aver fatto a piedi un lungo viaggio per luoghi deserti capitò in un pubblico albergo, e per la stanchezza, o per qualsiasi altra cagione, cadde in lunga e grave infermità, sicchè venne a mancare del bisognevole. L'ostiere, o per compassione avesse di lui, o per benevolenza, di tutto il provvide, non risparmiando nè servigio, nè spesa alcuna. Ma poichè la malattia si fu aggravata e quegli stava oramai per morire, fece un segno sopra una tavoletta e glielo mandò, volendo rendergli merito della sua benevolenza, con dirgli, che se ei si morisse appendendo quella tavoletta lungo la pubblica via, osservasse se alcuno di quei che passavano riconoscesse quel segno, chè questi, gli disse, lo rimborserebbe d'ogni spesa fatta per lui e lo ricambierebbe del benefizio. Quand'ei fu morto, l'ostiere gli diè sepoltura ed ebbe cura del suo corpo, senza punto sperare di rifarsi delle spese, non che di aver qualche utile da chi riconoscesse il segno della tavoletta. Ma tuttavia colpito nell'animo dai comandi che il morente gli aveva dato, volle provare, e di quando in quando al pubblico la esponeva. Gran tempo era già corso, quando di là passò uno de' pitagorici, e conobbe ed intese chi era colui che aveva fatto quel segno: volle sapere ogni altra cosa, e diede all'ostiere molto più danaro di quello che speso egli aveva. Narrano pure che il Tarentino Clinia, udito che Proro da Cirene, il quale era ardente seguace delle dottrine pitagoriche, correva rischio di perdere tutte le sue sostanze, raccolto danaro, navigò verso Cirene e rimise in buono stato le cose di Proro non solo facendo

(1) Allusione alla cerva sostituita da Diana ad Ifigenia nella tragedia di Euripide *Ifigenia in Aulide*

nessun conto del suo patrimonio, cui egli recava diminuzione, ma esponendosi ancora ai pericoli del navigare; e che nello stesso modo Testore da Posidonia solo per udita avendo conosciuto che Timaride da Paro era della setta de' pitagorici, quando avvenne a questo di cadere in tale calamità, che lo spogliò delle molte sue sostanze, navigò a Paro, adunata avendo molta pecunia, e lo rimise in possesso di quanto prima egli aveva. Bei segni d'amicizia certamente son questi; ma ben più maraviglioso era quello che riguardo alla comunione dei beni divini e all'accordo delle menti e alla divina anima era fra loro determinato. Di frequente si ammonivano l'un l'altro a non dilacerare il dio, che era in loro; laonde ogni sollecitudine dell'amicizia loro e ne' fatti e nelle parole aveva di mira un certo immedesimarsi ed unirsi con dio, e il communicar della mente e dell'anima divina (1). »

Bellissima riprova della difficoltà che mettevano i pitagorici ad accogliere nella loro società nuovi individui, è ancora questo brano di Aristosseno, pur conservatoci da Giamblico, in cui si descrive la misera fine di molti fra i pitagorici, cagionata dallo sdegno del Crotoniate Cilone per la ripulsa, che da Pitagora egli aveva ricevuta. « Cilone Crotoniate era per sangue, per riputazione, per ricchezza primo fra i suoi concittadini; ma d'altra parte duro e violento e sedizioso e di tirannici modi. Rivolse costui ogni sua brama a voler entrare nella comunione della pitagorica vita, e presentatosi a Pitagora stesso che già era molto innanzi negli anni, ebbe per le cagioni sovraesposte a patire un rifiuto. Ciò essendo accaduto, egli e gli amici suoi suscitarono una forte guerra contro Pitagora e i compagni di lui, e a tanto di violenza e d'intemperanza giunse l'emulazion di Cilone e di quelli, che con lui parteggiavano, che durò ereditaria fino al tempo degli ultimi pitagorici. Per questa cagione Pitagora passò a Metaponto, ove dicesi che egli terminasse la sua vita; nè i partigiani di Cilone cessarono punto dal tumultuare contro i pitagorici e dal far mostra verso di essi di tutto il loro mal volere; ma la bontà e la virtù di quelli per alcun tempo ancora prevalse, e il favore delle città loro, che ad essi soli volevano fosse amministrato quanto riguardava il loro governo; finchè essendo un giorno in Crotone i pitagorici radunati in casa di Milone e tenendo consiglio intorno alle cose della repubblica (2), quelli,

(1) Vita di Pitag. c. XXXIII.

(2) Seguo la lezione del Maline, op. cit. Altri: τῶν πολεμικῶν.

posto il fuoco sotto alla casa, li arsero, salvo due Archippo e Liside; poichè questi essendo nel vigore delle loro forze e robustissimi poterono per mezzo le fiamme gittarsi fuor della casa. Così essendo succedute le cose e la moltitudine non lagnandosi punto dell'accaduto, cessarono i pitagorici dall'avere la cura della cosa pubblica; e ciò avvenne per due cagioni, e per la noncuranza delle città (poichè vedendoli oppressi da tale e sì grande calamità, non si erano pur mosse) e per la perdita di quegli uomini che più erano capaci di stare alla testa degli affari. Di quei due poi, che si erano potuti salvare ed entrambi erano Tarentini, Archippo fece ritorno a Taranto, e Liside, per ira della noncuranza, di cui aveva fatto esperimento, approdò in Grecia e pose sua stanza nell'Acaia, che è posta entro il Peloponneso: poscia, per cura di qualcheduno, passò a Tebe ove ebbe per uditore Epaminonda, il quale chiamava Liside col nome di padre. Quivi egli finì la sua vita. I rimanenti pitagorici abbandonarono l'Italia, eccetto Archita da Taranto, e raccoltisi a Regio ivi continuarono a vivere in comune. Erano i principali fra loro Fanto, Echecrate, Polimnasto, Diocle da Fliunte, Senofilo Calcidese, di quella Calcide che è nella Tracia. Coll'andare del tempo e la pubblica amministrazione sempre più peggiorando, ci conservarono pur tuttavia i costumi e gl'insegnamenti antichi, quantunque la setta più non esistesse, fintantochè nobilmente disparvero. Queste sono le cose che narra Aristosseno (1). »

E alle dolci parole e all'utili opre
Non mostrarti restio, (v. 9-10.)

Traduce il Bandini: *Cedi con dolci motti, utili fatti:* il che non è chiaro nè s'accorda con quanto dice Ierocle nel suo *Commento:* « Disputa egli (*Pitagora*) in questo luogo come sia mestieri di diportarsi cogli amici, e primieramente, che *per* noi dobbiamo creder loro quando persuadono quello che onesto è, e quando operano ad utilità nostra; annodandoci la legge dell'amicizia a questo comun bene, affine da loro siamo giovati ad accrescer in virtù, ed essi da noi vicendevolmente. Perciochè conviene a quei, che camminano per una via comune, di viver bene, portare a comune utilità ancora ciò che l'uno meglio dell'altro avrà previsto; dando luogo

(1) Vita di Pit. c. xxxv p. 218.

piacevolmente agli amici, che ammoniscono bene, e piacevolmente ancora loro porgendo la communicanza dei beni, non contendendo mai intorno a' danari con esso loro e alla gloria, ovvero d'intorno ad altra cosa caduca e mortale (1). »

Nè in odio volgere
Per piccola diffalta il prisco amore,
Finchè il potrai; chè la Potenza al fianco
Della Necessitade il seggio tiene. (v. 10-13.)

Quest'ultimo verso è così voltato dal Bandini: *Chè il poter sta presso a forza.* La parola *forza* non basta a tradurre degnamente l' *ἀνάγκη* de' Greci, che derivando dal verbo *ἀνάγειν* o *ἀνάγεσθαι*, indica una coazione o un inducimento forzato ad operar qualche cosa e corrisponde alla *necessitas* dei Latini, ossia ad una potenza, che opera sull'uomo ed alla quale egli non può resistere in modo alcuno. Il perchè le parole del poeta qui vengono a significare, che l'uomo non sempre può quanto vuole, e molte fiate giunge a tal punto, che la potenza di lui trovasi sopraffatta dalla necessità e deve cedere a quella il suo luogo; e dice egli che la potenza dell'uomo abita vicina alla necessità, perchè il dover soggiacere a questa necessità è cosa che sovente accade nelle umane operazioni. Altri intende che la necessità è stimolo, e dà all'uomo il potere e la forza, ch'egli altrimente crederebbe di non avere, e il cui sentimento acquista all'occorrenza. L'idea è bella e vera; ma non vedo come si leghi col resto.

Questo così saper ti giovi. Adúsati
A superar codeste cose, il ventre
Pria, poscia il sonno e la lussuria e l'ira. (v. 14-16.)

Lungo sarebbe l'accennare tutte le tradizioni degli antichi intorno al vitto pitagorico, e perciò starò contento a riferire colla scorta di Giamblico i precetti di Pitagora rispetto alla continenza ne' cibi. « Seguita che noi parliamo della temperanza, com'egli la praticò e l'insegnò a quelli, che usavano con lui. Già abbiamo riferito i precetti di lui intorno ad essa,

(1) Trad di Dardi Bembo, ediz. cit. pag. 33.

ne' quali fu definito, che ogni cosa, la quale uscisse fuori della giusta misura, dovesse essere col ferro e col fuoco recisa. Dello stesso genere si è l'astinenza da tutte le cose animate ed inoltre da alcuni cibi intemperanti, e il far apporre ne' conviti pubblici vivande squisite e sontuose per darle poi agli schiavi, imbandendole soltanto per mortificare le brame (1). »

Tali precetti derivavano dalla riverenza che Pitagora portava all'anima umana e dal desiderio ch'ella sempre tenesse nell'uomo il principato e mai non fosse dal corpo soverchiata o impedita nel suo operare. Ond'egli ad uno de' suoi, che più del conveniente era avido del mangiare e del bere, dicono si volgesse colle seguenti parole: « E non cesserai tu dall'apparecchiare a te stesso una gravosa prigione (2)? »

Il precetto della brevità del sonno è pure accennato più volte da Giamblico, e in particolare nel capo trentesimoprimo, da cui abbiamo tratto il brano qui sopra riferito, e in quello che vien dopo. Quanto alla lussuria più a lungo ci ne discorre nello stesso capo trentesimoprimo: « Egli è d'uopo prima di tutto allevare i fanciulli e le vergini tra le fatiche e gli esercizi ginnastici e in quelle astinenze, che giovano meglio, apprestando loro tal cibo che si confaccia a quella vita faticosa, saggia e temperante. Molte cose poi di quelle che riguardano l'umana vita, sono tali, che meglio torna l'apprenderle tardi, tra le quali trovasi pur l'uso delle cose veneree. Bisogna dunque educare in tal modo i fanciulli, che, prima d'aver compiuto il ventesimo anno, non cerchino di avere amoroso commercio, e quando avranno quell'età oltrepassata, il facciano pur raramente. E questo avverrà se terranno essi per cosa preziosa e bella la buona lor complessione; chè l'intemperanza e la buona complessione in un medesimo soggetto non mai si trovano insieme (3). » Queste medesime cose troviamo pure in un brano di Aristosseno citato dallo Stobeo (4).

Per quel che spetta all'ira, usavano i pitagorici lenirla con alcuni carmi a tal fine composti. « Eranvi (dice Giamblico) eziandio alcuni carmi da loro composti per le passioni dell'anima, per la disperazione e i rimorsi, i quali carmi egli (*Pitagora*) aveva pensato essere di grandissimo aiuto,

(1) Vita di Pit. c. XXI.
(2) S. Basilio, disc. cit. § 8.
(3) Vita di Pit. c. XXXI.
(4) Ap. tit. 101. n.° 4.

ed altri ancora per frenare gli sdegni e gl'impeti di quella, per cui tali passioni col tenderle e rilassarle riducevano simmetricamente a giusta misura per ingenerare fortezza. Era poi altissimo fondamento a grandezza d'animo il persuadere, che nessuna delle cose umane deve giungere inaspettata a coloro, che sono d'intelligenza dotati; ma che debbono essi aspettarsi qualunque di quelle cose, che sono oltre i limiti del loro potere. Ma allorquando nasceva in essi o sdegno o dolore o qualunque altra somigliante affezione, erano collocati in disparte dagli altri e ciascuno rivolgendosi col pensiero sopra se stesso sforzavasi di smaltire e guarire quella passione quanto più virilmente egli poteva (1). »

E molto era il frutto, che tali precetti arrecavano, poichè avverte antecedentemente lo stesso, che mai non accadde che alcuno de' pitagorici mosso dall'ira veruna cosa operasse: « Si dice ancora questo intorno ai pitagorici, che niun di loro punì il suo schiavo, nè si fece ad ammonire alcun uomo libero, quando ancor si trovava sotto il dominio dell'ira; ma prima aspettava che la mente fosse tornata in se stessa . . . Soleva Spintaro più volte raccontare che Archita da Taranto, statosi qualche tempo lontano da' suoi poderi e tornato di fresco da una spedizione fatta dalla sua città contra quei di Messina, come vide che il suo procuratore e gli altri famigli non avevano avuto ben cura della coltivazione di quelli, ma tocco invece il sommo della negligenza, preso dall'ira montò in sulle furie talmente da dire a' suoi famigliari, che erano ben fortunati ch'ei fosse in collera contro di loro, poichè se ciò non gli fosse intervenuto, non sarebbero certamente andati impuniti dopo di essersi resi tanto colpevoli verso di lui (2). » Del non doversi usare dure parole con chi è preso dallo sdegno pare, secondo lo stesso Giamblico (3) e Diogene Laerzio (4), debbasi intendere uno de' simboli pitagorici espresso con queste parole: « non iscavare colla spada il fuoco » cioè con parole pungenti non infiammare di più quello, il cui animo è già acceso. Ed una bella sentenza riguardo all'ira troviamo pure nelle leggi, che lo Stobeo ci riferisce come di Caronda, il quale aveva informata la sua legislazione ai principii della scuola pitagorica: « Chi sa vincer l'ira

(1) Vita di Pit. c. XXXIII.
(2) Ibid.
(3) Protreptico, c. XXI.
(4) In Pitag. XVII. 18.

sia tenuto in conto di cittadino migliore di colui, che per ira ha peccato (1). »

Nè d'altri in compagnia, nè da te solo
Turpe cosa farai; più che ad ogni altro
Abbi rispetto a te. Della giustizia
Fatti nell'opra e nel parlar seguace. (v. 17-20.)

I primi due precetti, che in questi versi contengonsi, riguardano anch'essi quell'alta stima, che l'uomo deve fare di se medesimo e dell'anima sua, come sopra fu da me indicato. Intorno alla giustizia così la discorre un brano che è nel libro dello Stobeo attribuito a Polo, pitagorico della Lucania: « A me sembra che la giustizia degli uomini chiamar si debba madre e nudrice di tutte le altre virtù; poichè senz'essa non è possibile ch'uom sia nè temperante, nè forte, nè prudente; essendo quella ed armonia e concordia di tutta l'anima con bello ordinamento. E la signoria di lei sulle altre virtù si farà più manifesta se piglieremo a considerare le altre abitudini umane; imperocchè hanno quelle un utile particolare soltanto e ad un solo oggetto rivolto; ma la giustizia è utile ad ogni riunione e moltitudine di cose. Ed invero posta essa nel mondo come duce ed ogni principato occupando dicesi provvidenza ed armonia e giudizio, secondo i decreti di una particolare specie di numi; nelle città concordia e buona legislazione viene a buon diritto chiamata; nella casa poi accordo del marito e della moglie fra loro, benevolenza de' servi verso i padroni e cura de' padroni verso de' servi; nel corpo infine e nell'anima essa è prima ciò che ogni animale sovra tutte le altre cose tien caro, cioè la sanità e l'integrità delle membra, quindi la sapienza che gli uomini si procacciano colla scienza e col giusto operare. Governando essa in tal modo il tutto e le parti, di cui si compone, e serbandole concordi e tali che operino fra loro attraendosi a vicenda, come mai per comune consentimento non dovrà essere chiamata madre e nutrice di tutte le virtù e di tutte le cose (2)? »

La quale giustizia collocando i pitagorici nell'ordine, nella concordia,

(1) Ayo. tit. 44. n.° 10. pag. 291.
(2) Ibid. tit. 9. n.° 51 pag. 105.

nell'armonia, e senza di queste non potendosi reggere alcuna parte dell'universo, affermavano quelli, al dire di Giamblico, che l'uomo il quale fa ingiuria ad un altro uomo, non offende soltanto un individuo, ma l'intiero ordine delle cose (1).

Non avvezzarti a governar te stesso
In nessun caso mai senza la scorta
Della ragion. Sappi che ugual destino
È per tutti il morire, (v. 21-24.) (2)

La necessità del morire uguale per tutti qui si deve intendere degl'individui umani, la cui anima per la morte o è serbata a congiungersi a nuovi corpi, o si riunisce all'anima universale e il corpo rientra per la corruzione nella massa della materia, eterna essa pure e soggetta non a distruzione, ma a continui rivolgimenti. Ai quali due fatti alludevano essi nei loro riti funebri vietando il bruciare i cadaveri e vestendosi di bianco per accompagnarli alla sepoltura: « Non permetteva (dice Giamblico di Pitagora) che, secondo l'usanza de' Magi, si ardessero i corpi de' morti, non volendo che quello che è mortale partecipasse a divini onori, e credette santa cosa essere lo accompagnarli con bianche vestimenta al sepolcro per alludere a quella semplice e prima natura, che fu il numero e il principio di tutte le cose (3): » il che è detto secondo la dottrina pitagorica risguardante l'origine dell'universo, la quale si riponeva nella *monade* e nel *numero*, principii ideali a cui somiglianza era egli composto. Dell'eternità, o perpetua durata del quale universo ragionano Ocello Lucano nel suo libro *Della natura dell'universo*, e Filolao, i cui ragionamenti ci son riferiti dallo Stobeo: « Filolao dice che il mondo non è soggetto a corruzione; poichè così ne discorre nel

(1) Vita di Pit. c. IX.

(2) Male, o almeno ambiguamente, mi paro che volgarizzi il Bandini il primo di questi precetti: « Nè te medesmo intorno a cosa alcuna - senza discorso a diportarti avvezza. » Quantunque la voce *discorso* possa anche pigliarsi in senso di ragionamento interiore, egli era tuttavia necessario l'indicare più chiaramente che appunto di quello qui vuol parlare il poeta essendo sua intenzione di ammonire gli uomini ad essere prudenti e a non accingersi mai ad opera inconsiderata e della quale non si possano render prima una compiuta ragione, come conviensi ad esseri intelligenti: il che egli ripete al verso 41: « Pria d'oprar ti consiglia affin che l'atto - non sia da pazzo. »

(3) Vita di Pit. c. XXIX.

suo libro intorno all'anima: – Egli dura incorruttibile e senza travaglio alcuno per interminabile età, poichè nè dentro di lui si ritrova causa alcuna di lui più forte, nè fuori di lui cagione, che corrompere lo possa; ma questo mondo era già da tutta l'eternità e durerà pure eterno, egli uno dall'uno derivando e governato essendo da chi è a lui congenito e potentissimo ed altissimo. Ma ha pure il mondo in sè il principio del movimento e delle mutazioni, uno essendo egli e tutto continuo e dal soffio della natura percorso e da principio dotato di circolar movimento, ed una parte di lui è immutabile, mutabile l'altra, e l'immutabile si stende dall'anima che tutto abbraccia e circonda fino alla luna; la mutabile dalla luna sino alla terra. E poichè il principio movente movesi in giro per l'eternità tutta, induce quel che è mosso a seguire la natura del movente, e per necessità l'uno sempre è movente, l'altro sempre obbedisce all'azione di lui; e quello riguarda la mente e l'anima, questo la generazione e la mutazione delle cose, e l'uno è per la sua propria forza primo e superiore, l'altro ultimo ed inferiore: quello poi che da entrambi deriva è un risultato del principio divino che è continua cagione di mutazioni, e del mondo materiale, che a queste mutazioni va continuamente soggetto. Onde si potrebbe dire a buon diritto, che il mondo è un'invisibile efficacia di dio e della generazione, cui tien dietro la mutabile natura, e mentre il mondo si rimane lo stesso e conserva l'essere suo, e le altre cose che si generano e si corrompono e dalla corruzione e dalla natura son prodotte, salvano tuttavia le loro forme, poichè le restituiscono movamente al padre che le ha generate e al demiurgo (1). »

E or le ricchezze
Di posseder ti giovi, or che disperse
Vadan. (v. 24-26.) (2)

Non si deve credere che le ricchezze formino la vera felicità dell'uomo:

---

(1) Ecl phys. lib. I. c. XXIV.

(2) Bandini: « Che l'oro or suole aversi, ora perire: » intendendo il φύεται per indicativo presente in luogo di φύσθαι e non per imperativo, alla quale interpretazione mi sarei volentieri accostato ancor io se avessi veduta la variante φύεσ sostenuta da alcuno con qualche valevole argomento. Del resto anche interpretando, com'io ho fatto, il senso riman chiaro abbastanza. Così la intende anche Ierocle, e il Mullach osserva che la voce κτᾶσθαι, la quale, secondo quella prima interpretazione, vorrebbe essere tenuta per passiva, non fu usata in quel senso prima dei tempi d'Alessandro

poichè egli può accadere che a raggiungere il nostro fine esse ci tornino utili, ma può anche venir caso in cui giovi il farne gettito o l'esserne privi.

Fra quanti per voler dei numi
Ha travagli il mortal, tu quella sorte,
Che tocca a te, pórtati in pace, e cruccio
Non te ne prenda. (v. 26-29.) (1)

Traduco *per voler dei numi* le parole del testo: *δαιμονίῃσι τύχαις*, come in Pindaro *τύχᾳ θεῶν* (2), *σὺν Χαρίτων τύχᾳ* (3), *σὺν θεοῦ τύχᾳ* soglionsi pigliare nel senso di volontà o favore degli dei, delle Grazie, di una divinità. Così i Latini dicevano *Fatum Iovis*, e Dante: « L'alto fato di Dio sarebbe rotto (4). »

Eppur, quanto potrai,
Cercar rimedio ti convien. (v. 29-30.)

Cioè non bisogna cedere vilmente all'avversa fortuna; ma cercare per quanto è possibile di farle contrasto e di trovare un rimedio contro l'ira di lei, solo cessando allora che si vede tornar inutile ogni sforzo, e sarebbe pazzia il voler più oltre dar di cozzo nell'inevitabile necessità, che ci ha pigliato a perseguitare.

Favella
Così dentro di te: Molte, per fermo,
Di tai cose il Destin mai non arreca
Agli uomini dabben. (v. 30-33.) (5)

Intende il poeta, che quando l'uomo avrà fatto ogni sforzo per rime-

(1) G. M. Bandini: « Quanti dalle fortune han guai i mortali! - Lieve porta il destin, nè ti crucciare! » Slegando il tal modo e rozzamente esponendo due concetti, che vogliou essere considerati invece come strettamente congiunti.

(2) Pyth. VIII. 75.

(3) Nem. IV. 12.

(4) Purgat. XXX. v. 142.

(5) Qui il Bandini contra il chiarissimo significato del testo unisce insieme due sentenze, che vogliono essere tenute l'una dall'altra disgiunte: « Curarlo è d'uopo quanto puoi in tal guisa: - Non dà il destino ai buoni assai di bene. »

diare alla mala ventura, che gl'incolse, potrà per ultima consolazione ricorrere alla credenza, che questi mali siano da lui meritati in espiazione di colpe commesse in una vita anteriore, essendo la vita mortale un castigo, e così cercare un qualche rimedio nella pazienza e nella sicurtà di aver meritato la mala sorte, che lo ha preso a travagliare.

Dalle mortali
Labbra discorsi molti escono e tristi
E buoni. Tu non istupir, nè lungi
Da lor trarre ti lascia. (v. 55-56.)

Non badare alle parole altrui, ma va diritto per la tua via; non permettere ch'esse colpiscano di maraviglia l'animo tuo; ma tuttavolta non tenerle punto in dispregio. Non istupire insomma delle parole, siano esse buone o cattive, chè in fin de' conti le son parole, e più vale operare (1).

Una menzogna
Se udrai, mite contieni. (v. 56-57.)

Si badi al legame di questa sentenza con quella che la precede. Persuaso che dalle labbra degli uomini sogliono uscire discorsi buoni o cattivi, cioè veri o falsi, non commoverti punto se ti accade di udire una bugia, la quale tu devi sapere esser cosa non istrana ma naturale quando uom parla; nè volere accattar briga con tuo pericolo e poca speranza di averne buon frutto facendoti campione della verità, quand'essa è manifesta per se medesima, e dall'altrui menzogna non può patire alcuno danno.

In ogni parte
Quanto io dico si compia. Alcun non sia
Che con parole od opere t'induca
A dire o a far ciò che non credi il meglio.

---

(1) Male il Bandini: « cui non lasciar nè ammirare - Ticoten lontan. » I critici s'accordano nell'unire il genitivo ὧν, che non può stare con ἐκπλήσσετο, alla seconda proposizione μήτ' ἄρ' ἔστιν εἰργεσθαι τινων, ponendo la prima tra due virgole. Ierocle applica il primo verbo ai discorsi cattivi, il secondo ai buoni: μήτε ἐκπλήττεσθαι τοὺς πονηροὺς τῶν λόγων, καὶ ἐπ' αὐτὸ τοῦτο, ὅτι λόγοι εἰσὶν, ἀκριτως αὐτοὺς εἰσδεχόμενοι· μήτε τῶν ἀγαθῶν εἴργεσθαι, διότι λόγοι ἦσαν ὁμοίως τοῖς χείροσι. Pag. 107-108.

Pria d'oprar ti consiglia, a fin che l'atto
Non sia da pazzo. Un uom da nulla è sempre
Chi sconsigliato opra, o discorre. Compi
Sol quello, onde pentir poi non ti debba.
Non far cosa giammai, che tu non sappi
Come dee farsi, e quanto è d'uopo apprendi.
Così più dolce scorrerà tua vita. (1)
Nè del corpo si dee la sanitade
Mettere in non caler. Nelle bevande,
Ne' cibi e ne' ginnastici esercizi
Va con misura, (v. 37-51.)

Giamblico ci racconta in qual modo gli *amici*, o discepoli, di Pitagora avessero eziandio cura della loro persona per mantenerla sana e renderla forte e vigorosa. « Dopo la passeggiata del mattino si raccoglievano insieme, specialmente in luoghi sacri o ai sacri somiglianti, e a questo tempo si appigliavano per insegnare ed apprendere e correggere i loro costumi. Dopo un tale esercizio si volgevano alla cura dei loro corpi. I più solevano ungersi e correre, meno eran quelli che ne' giardini e ne' boschetti lottavano: altri lanciavano in aria masse di piombo o saltavano agitando le mani procurando ciascuno di scegliere quegli esercizi ginnastici, che più conferissero a render forti i loro corpi. Usavano a pranzo pane e miele o favo; ma fin che durava il giorno si astenevano dal vino. Dopo il pranzo volgevansi all'amministrazione delle cose della città, o di quelle, che riguardavano i forestieri e gli ospiti, secondo che dalle leggi era disposto; chè ad ogni cosa amministrativa bramavano por mano nelle ore, che al pranzo tenevano dietro. Venuta la sera movevano di nuovo per passeggiare non già ad uno ad uno come nel passeggiar del mattino, ma a due, a tre, riandando le apprese dottrine ed occupati in begli esercizi. Dopo il passeggiare lavavansi e dopo il bagno si riunivano per mangiar nuovamente; nè banchettavano mai più di dieci o dodici uomini insieme.

(1) Il Bandini: « Ciò ch'io parlo in tutto compiasi. - Niuno in detti o in fatti ti sobduca - A dire o a far quel che miglior non siati. - Pensa anzi il fatto, acciò non sia stoltizia - Da vil uom fare e dir cose insensate. - Ma compi ciò che te poi non rattristi. - Nulla di quel far che non sai; ma impara - Ciò, che si de', e sì vivrai gioioso. » E ciò con quanto scapito del buon senso e del buon gusto ognun sel vede senza che io vi aggiunga parola.

E quando tutti i convitati erano riuniti facevansi libazioni ed offerte con profumi ed incensi; poscia si accingevano alla cena in modo ch'ella potesse aver termine prima del cadere del sole. Facevano uso in quella di vino, di stiacciate, di pane e di companatico, di legumi cotti e crudi, e s'imbandivano anche le carni sacre di animali immolati; ma raro usavano vivande marine riputando che alcune di loro fossero per certe ragioni di uso men buono. Similmente pensavano non doversi nè offendere, nè fare a brani quegli animali, che per natura non sono dannosi all'uman genere. Finita la cena, nuove libazioni e poi lettura. Era costume che il più giovane leggesse e il più vecchio presiedendo indicasse quel che doveva esser letto e in qual modo. Quand'erano poi per andarsene il coppiere meneeva loro da far nuove libazioni e dopo queste li ammoniva il più vecchio a non offendere nè guastare pianta domestica o fruttuosa, ed inoltre a parlar bene e a bene pensare intorno alle generazioni degli dei, dei demoni e degli eroi, e parimente ad esser bene affetti verso i loro genitori e benefattori, e pronti eziandio a prestar aiuto alla legge e combattere quanto le si opponga. Ciò detto, andava ciascuno alla propria casa. Vestivano essi bianche e pure vestimenta e similmente bianche e pure coperte, le quali erano di lino; chè le pellicce non adoperavano. Non approvavano lo attendere alla caccia, nè facevano uso di tale ginnastico esercizio. Queste erano le cose, che ogni giorno alla moltitudine dei discepoli s'insegnavano intorno al vitto e al modo di governare la vita loro (1). »

E tal misura intendo,
Che nuocer non ti possa. A puro vitto,
Non delicato, avvezzati. (v. 51-53.)

La moderazion tua sia tale che non si muti per te in dolorosa privazione. Usa di queste cose schivando ogni eccesso, e nei cibi cerca non le dilicature, ma la salubrità e la nettezza, e contentati di quanto basta ad ottenere il fine che ti proponi mangiando, cioè la sanità e la robustezza del tuo corpo.

(1) Vita di Pit. c. xx. xxi.

Ti guarda
Da quanto invidia può recarti. Fuori
Del tempo il tuo non isprecar, siccome
Uom, che i suoi beni non conosce, e in una
Misero non mostrarti. Ottima cosa
In tutto è la misura. A far t'induci
Ciò, che di danno a te non fia; ma innanzi
Vada all'opra il consiglio. (v. 35-60.) (1)

A me pare che l'intenzione del poeta sia questa: Per quanto è in noi dobbiamo sempre avvertire di non far soverchia pompa de' beni che possediamo, nè mostrarci altrui superiori; poichè ciò suol essere negli altri uomini cagione d'invidia e d'odio verso di noi. Laonde nemmeno delle nostre ricchezze dobbiamo far pompa, nè sprecarle fuor di tempo come se non ne conoscessimo il pregio, nè sapessimo, che può venir occasione, in cui ci tornino di grande aiuto per ben nostro ed altrui. Sempre poi dobbiamo prevedere le conseguenze delle nostre azioni e quando ci pare ch'ella ci siano per essere dannose, astenerci dall'operare e mutar divisamento.

Non accogliere
Il sonno sotto delle molli ciglia,
Se pria tre volte non avrai ciascuna
Opra del giorno riandata: *Dove*
Caddi in errore? Che fec'io? Qual cosa,
Che far dovessi, intralasciai? Discendi
Giù, dalla prima incominciando, e poscia
Ti turbi il mal, che oprasti, e il ben ti allieti.
In ciò ti briga, in ciò poni tua cura. (v. 60-68.)

Giamblico espone questo medesimo precetto colle seguenti parole: « Similmente (*diceva Pitagora a' suoi discepoli*) non facessero mai cosa alcuna, che prima non avessero ben ponderata e di cui non sapessero

(1) Il Bandini: « E guardati di fare - Tutte quelle faccende, ch' hanno invidia. - Non profonder, com'uom del bello ignaro. - Nè miser sii: misura ottima in tutto. - Fa ciò che non ti noccia e innanzi pensa. » Qual buon significato si può egli ricavare da tutto questo stringato guazzabuglio?

rendersi ragione; ma il mattino si proponessero ciò che dovevano fare, e all'annottare riandassero ciò che avevano fatto per esercitare nello stesso tempo l'osservazione e la memoria (1). » Per corrispondere intieramente a siffatto precetto, dovrebbero aggiungersi ai versi qui riferiti anche quei due che io ho citato nelle varianti, quali mi accadde di vederli nella *Vita di Pitagora* scritta da Porfirio. Essi suonano così: « Al primo sorger dal soave sonno – Provvedi a quello che nel dì farai. »

Questo tu devi amar, questo sull'orme
Ti lochierà della virtù divina. (v. 69-70.) (2)

Qui *virtù divina* è detto invece di Dio, o della mente dotata di ogni virtù e perfezione, e il poeta indica apertamente come l'uomo si possa fare seguace e poi simigliante a quella, quando nell'operare si attenga ai precetti esposti superiormente. Ben la intese in questo modo Ierocle, del quale riferiremo a questo proposito le parole: « Or sono questi versi certo termine tra queste due virtù. L'uno che dice: *affaticati intorno a queste cose; intorno a queste ti eserciterai; queste fa mestieri che tu ami*, è egli come propria conclusione della virtù politica; ma l'altro: *queste ti condurranno nelle vestigia della virtù divina*, è egli quasi bellissimo principio della scienza contemplativa, annunciandoci le cose seguenti, che chi avrà deposto la vita bestiale, ed, in quanto sia possibile, si avrà purgato dagl'inordinati affetti e in cotal guisa si sarà quasi fatto di fiera uomo, sia per divenire d'uomo un dio, in quanto è possibile all'uomo di rendersi dio (3). »

Lo giuro per Colui, che all'alma nostra
La quaderna donò, che è di perenne
Natura la sorgente. (v. 71-73.)

Che cosa intendessero i pitagorici per la quaterna o *tetracti* già fu da me indicato interpretando i versi, che riguardano il giuramento; ma la

(1) Ibid. xxxv. pag. 256. - c. xxix. p. 165.

(2) Il Bandini: « Virtù divina ciò trovar faratti. » È egli soggetto od oggetto della proposizione questa virtù divina, e la mancanza dell'articolo non le toglie forse il suo giusto significato?

(3) Ediz cit. pag. 121.

cosa si farà più manifesta per la seguente testimonianza di Plutarco: « Partendo da un altro principio Pitagora di Mnesarco da Samo, il quale fu primo a dare alla filosofia questo suo nome, disse, che principii delle cose erano i numeri e le consonanze che sono in questi (le quali egli chiama pure *armonie*) e quegli elementi, che degli uni e delle altre si compongono e chiamansi anche *geometrici*. Pose eziandio tra i principii la Monade e la Diade indefinita. Di questi suoi principii l'uno ha di mira la causa effettrice e formante, quale si è la Mente o Dio (1), l'altro il passivo e il materiale, quale si è il mondo visibile. Egli diceva la natura del numero essere la diecina; poichè sino al dieci contano i Greci tutti ed i barbari, al quale giunti ei ritornano indietro alla Monade: la forza poi del dieci contenersi nel quattro o nella quaderna per questo motivo che, se alcuno partendo dalla Monade vada sommando i numeri, giunto al quattro ha già di che compiere il numero dieci; che se egli oltrepasserà la quaderna andrà anche più là del dieci. Infatto chi ponga l'uno e a questo aggiunga il due, poi il tre, e a questi il quattro verrà ad aver compiuto il numero dieci. Sicchè il numero, avuto rispetto alla Monade, si trova nel dieci, avuto riguardo alla potenza, nella quaderna. Perciò dicono i pitagorici che grande giuramento è quello che si fa per la quaderna: – Sì per colui, che all'alma nostra diede – La quaderna, che in sè tien di perenne – Natura le sorgenti e la radice, – e che l'anima nostra dalla quaderna è composta; poichè la mente, la scienza, l'opinione ed il senso son quattro cose, da cui viene ogni arte e conoscenza, e mercè le quali noi siamo ragionevoli. La mente poi è una monade; poichè vede le cose per monadi. Così, moltissimi essendo gli uomini, non si percepiscono già, non si afferrano, non si circoscrivono gl'individui; ma quell'uomo solo nella mente noi concepiamo, cui nessuno è somigliante. Così noi percepiamo un sol cavallo, mentre gl'individui ne sono infiniti, poichè tutte le specie ed i generi sono per monadi; epperò gli uomini ciascuna di tali cose in egual modo definendo dicono: *animal ragionevole* o *animal che nitrisce*. Perciò la mente, per la quale queste cose intendiamo, è la Monade, e la scienza convenientemente è la Diade indefinita; poichè ogni dimostrazione e ogni fede che fa scienza e inoltre ogni ragionamento deduce quello, che è posto in disputazione, da qual-

(1) Aristotele invece nella *Metaf.* (lib. I. c. IV.) dice che Anassagora Clazomenio fu primo ad ammettere nella natura una *mente*.

che cosa già prima posta in sodo, e così mette in chiaro una nuova cosa; delle quali due cose essendo adunque comprensione la scienza, ella è perciò il due o la Diade. L'opinione poi che nasce da quella comprensione è ragionevolmente la Triade; poichè di più cose ella consta e la triade dinota moltitudine, come: – *O tre volte beati Argivi!* – Per questo ammette la triade Pitagora (1). »

Prima di pigliare ad esame questo brano di Plutarco tornerà utile il riferire quanto accenna Aristotele intorno alla dottrina aritmetica de' pitagorici: « I pitagorici avendo pei primi posto mano alle matematiche le trassero in luce, ed educati in quelle, pensarono che i principii di esse fossero i principii degli esseri tutti. Poichè tra questi i numeri son primi per natura, ed essi credevano di scorgere nei numeri molte somiglianze colle cose che sono e che vengono ad essere, ben più che nel fuoco e nell'acqua, sicchè una certa somiglianza coi numeri ha la giustizia, una certa ne hanno l'anima e la mente, un'altra l'opportunità, e di tutte le altre cose, per dirlo in breve, ciascheduna similmente loro somiglia, vedendo essi ancora nei numeri e il modo di essere e le ragioni delle cose spettanti all'armonia, poichè appariva che tutte le altre cose erano per natura fatte in modo da corrispondere ai numeri tutti, e i numeri essere i primi di tutta natura; perciò ne conchiusero, che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose e tutto il cielo fosse armonia e numero, e quante concordanze potevano dimostrare nei numeri e nelle armonie col modo di essere e colle parti del cielo e con tutto l'ordinamento del mondo, le radunarono insieme e le misero in accordo (2). »

Il medesimo concetto è pure esposto in un brano, che nel Florilegio dello Stobeo si attribuisce alla pitagorica Teano: « Io odo dire da molti Greci, che Pitagora insegnava ogni cosa dai numeri esser nata. Egli non diceva già ogni cosa nascere dai numeri, ma secondo i numeri; poichè siccome il principal modo di classificare sta nei numeri, così le cose numerate partecipandone, si dicono prima, seconda e così di seguito (3). »

Il Tennemann poi nel seguente modo riassume le dottrine aritmetiche de' pitagorici: « Applicando all'ordine della natura e alla regolarità delle forme l'ingegno loro nudrito d'idee matematiche, furono indotti natural-

(1) De plac. phil. l. I. c. III. § 14-24.
(2) Metafisica, lib. I. c. V. in princ.
(3) Ecl. phys. c. XII. l. I.

mente i pitagorici a pigliare il sistema dei numeri per quello delle cose, e credettero di potervi ravvisare le forme e la sostanza degli esseri, chiamando questi un'imitazione dei numeri: μίμημιν εἶναι τὰ ὄντα τῶν ἀριθμῶν. I numeri sono o impari, περιττοὶ, o pari, ἄρτιοι; principio de' primi è l'unità, μονὰς, dei secondi la dualità, δυὰς. I numeri impari sono definiti e compiuti, i pari indefiniti e incompiuti. Il principio assoluto di ogni perfezione è dunque l'unità e la limitazione, πεπερασμένον, quello della imperfezione la dualità e l'illimitato, ἄπειρον. I dieci numeri fondamentali rappresentati nella *tetracti* simboleggiano il compiuto sistema della natura; per le relazioni dei numeri si può concepire la sostanza degli esseri, come colle combinazioni numeriche si determina l'origine e la formazione delle cose. Quindi l'applicazione de' numeri alla fisica, alla psicologia, alla morale (1). »

Fatte queste premesse, mi sembra che dalla surriferita testimonianza di Plutarco si possa dedurre, che per Pitagora la Monade e i Numeri erano il mondo delle idee, modello del mondo sensibile, e tutto ciò che è spirituale, eterno, immortale: la Diade il mondo sensibile, fatto a somiglianza di quello, e tutto ciò che è materiale, mutabile, transitorio. Come le sostanze delle cose si rappresentavan pei numeri, così le forme sensibili per mezzo delle figure geometriche, come appare eziandio da un luogo dello Stobeo: « Quelle che si dicono forme o idee poneva Pitagora nei numeri e nelle loro armonie; e le forme inseparabili dai corpi in quelle cose che si chiamano *geometrici* (2). » Appartenendo adunque il materiale colle sue forme alla Diade, la Monade rappresentava non gl'individui, ma i generi, e la Monade suprema o Dio la suprema unità generica; onde i pitagorici insegnavano poter l'uomo giungere a contemplare quasi a faccia a faccia la divinità col salire dalle cose ai generi e da questi al genere supremo che tutti li abbraccia: « Chiunque è capace di risolvere tutti i generi in un solo e medesimo principio, e poi da questo partendosi ricomporli ed enumerarli, costui sembra a me possessore d'ogni sapienza e verità e che abbia trovato una bella specola, dalla quale egli potrà contemplar dio, e tutte quelle cose che in lui sono, classificate per serie tra loro congiunte e per ordine (3). » La qual cosa

(1) Manuale di storia della filosofia, t. I.
(2) Ecl. phys. l. I. c. XV.
(3) Stobeo, Ἀνθ. tit. I. n. 67. p. 7.

più ampiamente è da Giamblico dichiarata (1). Lo stesso Giamblico per far meglio manifesto come la Monade o suprema unità generica ideale fosse fondamento dei numeri, cioè del rimanente mondo ideale, arreca la testimonianza del *Discorso sacro* attribuito agli antichi pitagorici, la quale io traduco seguendo le correzioni proposte da Ludolfo Kuster: « Intorno agli dei Pitagora figliuol di Mnesarco queste cose apprese quando in Libetra s'iniziava ai misteri di Bacco, ricevendo da Aglaofamo l'iniziazione. Egli apprese, come Orfeo figliuol di Calliope, educato a sapienza dalla madre sul monte Pangeo diceasse: eterna essenza de' numeri essere il provvidentissimo principio di tutto il cielo, della terra e della natura posta loro frammezzo; il qual principio è inoltre la radice della permanente durata delle divine cose, degli dei e dei demoni (2). » Tale essendo la Monade, la Diade conteneva perciò quanto è sotto la luna soggetto a modificazione, a corruzione, a continuo mutamento, perciò anche i demoni, in quanto abitano la sfera sublunare e sono soggetti a mutazioni, e gli uomini, come appare da quello che per me si disse intorno al verso 4.° e da queste parole pur di Plutarco: « Pitagora tra i principii volle che la Monade fosse dio o il bene, la qual Monade si è la natura della mente e la mente stessa: la Diade poi indeterminata il demone o il male, intorno a cui è la moltitudine della materia e il mondo visibile (3). » Che la mente sia una Monade appare da questo ch'ella pensa per generi o per universali, e così mostra di essere secondo la loro natura formata, e ciò dicasi tanto della Mente suprema o di dio, quanto della mente umana, che perciò anch'essa è detta Monade da Plutarco e Numero da Aristotele, dove riferisce le opinioni de' pitagorici. La scienza, come quella che risulta dalla deduzione di principii mossi da principii già prima ammessi per veri, è fatta secondo la natura della diade e diade viene pur essa denominata; l'opinione poi che è un risultato di questa deduzione è la triade o il molteplice. Forse quando ci fosse giunto intiero il luogo di Plutarco, avremmo veduto, che egli, seguendo la sua spiegazione, riponeva la tetrade nel senso, che è l'ultimo termine della sua classificazione degli elementi della quaterna.

Da questa si scosta l'applicazione della *tetracti* al morale, suggerita

(1) Protreptico, c. IV.
(2) Vita di Pit. c. XXVIII. p. 146
(3) De plac. phil. I. 7. 11.

da G. Alberto Fabricio ne' suoi prolegomeni alla *Vita di Proclo* scritta da Marino: « Addit praeterea Hierocles scopum aureorum carminum esse ut τετρὰς illa πρακτικῶν ἀρετῶν cura diligenti et iusta observatione in verbis et factis exprimenda traderetur ac commendaretur. Quid vero si ipsa Pythagorae tetractis tot vocibus ac scriptis celebrata mysterium quatuor virtutum animae partibus respondentium divinasque perfectiones imitantium et a numine solo, tamquam fonte, derivatarum, complectatur? Caeterum τόλμαν sive fortitudinem a pythagoricis dictam reperio ὐνάδα, τριάδα prudentiam, τετράδα, sive numerum pariter parem, iustitiam, ceu videre est in *Denario pythagorico* Iohannis Meursii (1). Molte altre applicazioni della *tetracti* al morale avevano fatte gli antichi, tra i quali giova specialmente citare Teone Smirneo, che applicandola eziandio alla politica diceva, l'uomo esser l'uno, la casa o famiglia il due, la borgata il tre e la città il quattro; e che di questi elementi la nazione è composta.

E tu ti metti
Senza dimora all'opra e i numi invoca,
Che la traggano a fin (2). Se queste cose
Possederai, noto a te fia congiunti
Come sieno tra lor mortali e numi, (v. 73-77.)

Conoscerai la natura degli dei e degli uomini e quali siano le relazioni, che passano fra loro (3). Io penso, che qui si alluda alle relazioni che corrono fra le cose celesti e le sublunari o all'altra dottrina pitagorica, per cui le anime degli uomini sono considerate come parte dell'anima universale, epperciò simili nella sostanza loro a quelle degli dei o dei corpi celesti. Questa dottrina la troviam pure riferita da Plutarco: « Pitagora e Platone dicono, che l'anima è incorruttibile, ed uscendo dai corpi se ne va su nell'anima del mondo, che a lei per natura è somigliante (4). »

---

(1) Io. Alb. Fabricii epistola ad Rich. Bentleium, p. XXXIX. in *Marini Vita Procli*. Lipsiae, 1814.

(2) Il Bandini: « Or vienne all'opra: ai dei prego faccndo - Compisci. » Io credo che qui la voce τελέσαι voglia esser presa non come imperativo, ma come aoristo infinito, e in ciò m'accordo col Manuzio, che traduce: « deos precatus ut perficiant. »

(3) Il Bandini: « Degl'immortali dei - E de' mortali uomini il sistema. » Il Ficino: « Deorum mortaliumque hominum conditionem. » Io ho tentato anche di esprimere la preposizione che è in συστασιν.

(4) De plac phil. IV. 7. 1.

Come ciascuna cosa è passeggera
E come eterna duri: apprenderai,
Per quanto il puoi, come del Tutto intorno
La natura è simil, sì che speranza
Tu non accolga d'insperabil cosa,
E nulla ignori. (v. 78-83.)

Il Mullach pensa qui si debba intendere la mutazione delle cose sublunari non essere punto un argomento contro l'eternità loro, essendo questa medesima mutazione continua ed eterna e dovendosi ripetere dall'azione immutabile ed eterna de' corpi celesti. Questo egli conferma colla seguente testimonianza del pitagorico Ocello: « La natura tutta per intiero considerata ritrae la perennità sua da quei corpi, che sono primi e più orrevoli, secondo una determinata ragione guastandosi essa e communicando a tutte le cose mortali anche il continuo mutamento della sua propria costituzione, che da quelli deriva (1). »

Anco vedrai, che ai mali
Gli uomin s'appiglian da se stessi. Ahi miseri!
Sta lor dappresso il bene: ei non lo veggono,
Nè la voce ne ascoltano, e ben pochi
San dai mali disciorsi. Un cotal fato
Le intelligenze de' mortali offende.
Come cilindri rotolando ei vanno
Di qua, di là, d'interminate angosce
Sempre in balía; chè la fatal contesa,
Loro seguace e nata insiem con essi,
Non avvertita li travaglia, a cui
Non farsi guida ei debbono, ma il tergo
Volger cedendo. (v. 83-93.)

La Contesa cattiva; chè due Contese, cioè due diverse tendenze, l'una al bene, l'altra al male, ponevansi dagli antichi poeti-filosofi greci negli uomini, come appare dal poema di Esiodo intitolato: *Le opere e i giorni*

(1) V. lib. cit. pag. 15.

« οὐκ ἄρα μοῦνον ἦην ἐρίδων γένος, ἀλλ' ἐπὶ γαῖαν – εἰσί δύω. » Empedocle ammetteva pure due principii nell'universo, la Contesa o la Lite e l'Amicizia.

O Giove padre, tutti
Da molti mali liberar potresti,
Se tu mostrassi a ogn'uom di quale spirto
Gli è dato usar! (v. 95-98.) (1)

Abbiamo già veduto come per *demoni* si vogliano intendere le anime che son destinate ad animare gli umani corpi; onde il desiderio di Pitagora mi pare qui debba intendersi in questo senso, che sarebbe utile per norma dell'uomo nella vita mortale, che Giove gl'indicasse qual è il demone o lo spirito, che è entrato ad animare il suo corpo quando fece la sua comparsa sulla terra, e quali ne sono l'indole e le inclinazioni e l'attitudine. Il che viene ad essere lo stesso che il *Nosce te ipsum* degli antichi, cognizione che l'uomo non può da se solo acquistare così facilmente e per cui gli gioverebbe avere gli acconci mezzi dalla divinità.

Rincorati. Divina
Specie d'uomini v'ha, cui sacra ed alta
Natura il tutto addita, a' quai simile
Ove in parte sia tu, quel che or t'impongo
Fermo terrai, te risanando, e l'alma
Addur potrai da questi mali in salvo (v. 98-103.)

A' quai simile. – Passo intricato, a sciogliere il quale, come si è notato nelle varianti, alcuni critici si sono appigliati ad una nuova lezione. Io seguo l'opinione di Ierocle, il quale interpreta così: « Della società degli uomini divini, se noi alquanto partecipiamo, il dimostreremo attenendoci alle opere buone e alle scientifiche contemplazioni: per le quali soltanto l'anima umana si guarisce e si libera dai travagli di quaggiù, facendo passaggio a divina quiete. »

---

1) Il Bandini: « Giove padre, - Da molti mali a tu libera tutti, - O a tutti mostra qual è il lor demonio. » Lasciando da una parte questo *demonio*, il quale mostra come il traduttore mal sapesse uscirsene altrimenti dall'intricato luogo del testo, egli è da notare che il Bandini seguì un'altra variante, la quale da me fu appiè del testo indicata e già era stata pure seguita da Ierocle

Ma dai cibi ti astieu, che a te già noti
Io feci, (v. 104-105.)

Allude ad altri ammaestramenti, che noi più non possediamo, ma tuttavia possiamo conoscere per la testimonianza di Giamblico: « Ma poichè anche il nudrimento giova moltissimo ad un'ottima istituzione della vita, quando bene ed ordinatamente abbia luogo, consideriamo che cosa anche intorno a questo egli (*Pitagora*) abbia stabilito per legge. Tra i cibi interamente egli disapprovava quelli, che son cagione di ventosità e di turbamento, al contrario approvava e voleva si usassero quelli, che formano la buona costituzione del corpo e lo tengono asciutto. Ond'egli pensava che anche il milio fosse utile come nudrimento. Del tutto poi ripudiava quei cibi, da cui abborrono gli dei, come quelli che ci allontanano dalla famigliarità con loro; e per altro motivo da quelli che si dicono sacri voleva che i suoi si astenessero, essendo essi degni d'esser tenuti in onore, ma non acconci al comune uso degli uomini; e da quelli pure che sono d'ostacolo alla divinazione li esortava a tenersi lontani, e da quelli che impediscono la purezza e la castità dell'anima o l'abito della temperanza e della virtù (1). »

E ben t'appiglia allor che l'alma
Purgar tu brami e a libertà ritrarla; (v. 105-106.)

Letteralmente: « Nelle purgazioni e nello scioglier l'anima ben discernendo ed intorno a ciascuna cosa ragionando: » le quali parole *nelle purgazioni* o *purificazioni* (ἔν τε καθαρμοῖς) alcuni intendono in questo senso che alludano ad un'altra opera, o ad altri precetti di Pitagora intorno alle medesime purificazioni (2). Di tali purificazioni pitagoriche noi troviam pure un cenno in Giamblico: « Riputava Pitagora, che anche la musica molto giovasse alla sanità, se alcuno la usasse in modo conveniente; chè non era solito ricorrere a tal genere di purificazione senza molta cura; alla quale purificazione egli dava il nome di medicina fatta per mezzo della musica. Ai soavi concenti di questa si appigliava poi

(1) Vita di Pit. c. XXIV.

(2) Così il Bandini: « Dai cibi astienti, quei che noi dicemmo - Nelle purificazioni e nella cura - Dell'alma, discernendo uno dall'altro; - E in ciascheduna cosa tu ripensa, ecc. »

nella stagione di primavera. Collocava nel mezzo uno, che suonasse la lira, e intorno a lui sedevano a cerchio quelli, che erano capaci di soavemente cantare. E così, quello sonando, ei cantavano concordemente alcuni peani, per cui pareva pigliassero diletto e diventassero concordi e ben composti fra loro. Ed anche in altro tempo si servivano essi della musica in luogo di medicina, e vi erano alcuni canti composti per le affezioni dell'anima, per gli abbattimenti di essa e i rimorsi, che si riputavano di grandissimo aiuto, ed altri ancora per le ire e gli sdegni ed ogni simile mutazione dell'anima. Usavano anche danze e per istrumento adoperavano la lira; chè le tibie egli stimava strumento sfacciato e da spettacoli e che non avesse punto un suono degno d'uom libero. Si servivano pur anche di detti d'Omero e di Esiodo, scelti acconciamente per rimetter l'anima sulla buona via (1). »

E, quale auriga, la miglior sentenza
In alto loca sovra lei. (v. 107-108.) (2)

Qui esorta il poeta i suoi discepoli a volere, dopo avere ben ponderati i diversi partiti, che si presentano alla loro mente, ed essersi appigliati al migliore, far di questo la guida e la norma delle operazioni dell'anima loro. La immagine dell'auriga, che qui si ritrova, fu adottata e più ampiamente svolta da Platone in quel leggiadro mito, di cui egli ornò il suo dialogo che ha per titolo *il Fedro*, nel quale parlando dello stato delle anime segue in parte le dottrine de' pitagorici.

Se, il corpo
Abbandonando, volerai nel libero
Etere, allora un immortal sarai,
Non più mortal, ma incorruttibil nume. (v. 108-111.)

Intorno alle diverse condizioni delle anime de' buoni e de' cattivi dopo la morte, secondo le dottrine de' pitagorici, trarrò pure gli opportuni schiarimenti da Giamblico: « L'anima, che è migliore, abita cogli dei

(1) Ibid. c. xxv.

(2) Bandini: « Ottimo auriga su piantando il senno. » Come se gli aurighi si piantassero a mo' degli alberi o degli aguti. *Senno* poi non basta a voltare γνώμην ἀρίστην del greco.

e si aggira pel cielo e le tocca in sorte una fine migliore; quella poi, che non si astenne da opere ingiuste ed è piena di sacrilegi e di empietà, venendo ai tribunali, che sono sotterra, incontra la pena che ella merita. Perciò è necessario che di tutto si faccia per possedere nella vita la virtù e la prudenza; chè bello è il premio e quel che se ne spera è ben grande (1). » Con lui s'accorda Diogene Laerzio: « Le anime pure (*diceva Pitagora*) essere condotte ne' luoghi più alti, e le impure non accostarsi a queste, nè l'una all'altra fra loro; ma starsene legate in istrette catene sotto il governo delle Erinni (2). » Altrove ho già recata in mezzo la testimonianza di Plutarco riguardo alla credenza de' pitagorici intorno alle anime de' morti, e quella di Diogene Laerzio, dove tocca dell'opinione, la quale voleva Pitagora autore della metempsicosi. Il perchè, più nulla rimanendomi da aggiungere al già detto, porrò fine a questa mia interpretazione, nella quale, se non ho potuto recare maggior luce alla oscura materia, di cui discorreva, ho almeno cercato di raccogliere in uno la più gran copia, che per me si poteva, degli avanzi della dottrina pitagorica relativa ai versi d'oro, e di porgere ad altri forse il mezzo di meglio illustrarli.

---

(1) Protreptico, c. XIII.
(2) In Pit. XIX. 31.

DOCUMENS GENEVOIS INÉDITS

POUR LA

GENÉALOGIE HISTORIQUE

DE LA MAISON SOUVERAINE DE SAVOIE

DEPUIS LE DOUZIÈME SIÈCLE JUSQU'AU QUINZIÈME

PAR

M. ÉDOUARD MALLET

Lus dans la séance du 6 mars 1856

PRÉLIMINAIRES.

Rechercher le nom, la naissance, le mariage, le décès des individus, constater la date de ces actes capitaux de la vie humaine, suivre ainsi à travers les âges la série descendante des générations, le lien de la filiation et les ramifications des familles, recueillir le tout en l'appuyant de preuves authentiques, tel est l'objet de la *généalogie*.

Son importance s'accroit quand elle a à s'occuper de personnes ou de familles qui ont joué un rôle dans leur temps, ou occupé une position importante dans leur pays.

Elle s'élève à la hauteur de véritables questions historiques, lorsqu'il s'agit d'établir la série des maisons souveraines ou dynasties, la suite et l'avénement des Princes régnants dans chacune d'elles.

En effet, le jour qui voit finir un règne, est en même temps celui qui en voit commencer un nouveau, d'après la maxime fondamentale de la monarchie héréditaire, qui veut que le pouvoir royal, comme toute autre succession, passe immédiatement, et sans interruption ni interrègne,

du Prince mourant à son héritier direct, maxime que le vieux droit public traditionnel français avait revêtue de la formule si vive et si caractéristique: *Le Roi est mort, vive le Roi!*

Or un changement de règne est d'ordinaire, et était surtout jadis, le signal d'un changement dans l'ordre politique, dans les personnes, dans les choses, dans les idées ou les vues gouvernementales, dans la marche des affaires d'un pays. Tantôt c'est un accroissement de force, tantôt au contraire un affaiblissement qui en résulte, tantôt une impulsion plus rapide, tantôt un ralentissement ou une direction nouvelle, toujours quelque modification plus ou moins significative: deux mains différentes et successives ne sauraient, fussent-elles animées du même esprit et se trouvassent-elles dans les mêmes conjonctures (ce qui est loin d'être toujours le cas), tenir d'une manière absolument identique les rênes de l'État.

Alors donc qu'il s'agit d'apprécier dans ses circonstances, dans ses causes ou ses résultats, un événement politique ancien, arrivé à une époque voisine de celle où le pouvoir suprême a passé d'un Prince à son successeur, il importe de savoir s'il s'est accompli pendant le règne qui allait finir, ou au commencement de celui qui l'a suivi, s'il a été la dernière expression de l'un, ou au contraire le début de l'autre.

Combien n'y a-t-il pas de faits historiques dont le motif et la tendance échapperaient, si l'on ne savait pas quelles étaient les alliances matrimoniales contractées par les souverains qui ont été appelés à y prendre part, leurs liens de parenté avec d'autres dynasties, l'âge des Princes régnans etc.? Ce sont là tout autant d'élémens essentiels, dont l'absence est comme un voile qui empêche de discerner les mobiles qui ont dirigé les acteurs du drame de l'histoire, d'en pénétrer le véritable sens.

Ce n'est pas tout que d'être au courant des détails généalogiques qui concernent personnellement les Princes qui ont régné. Il faut encore tâcher d'en savoir autant pour les princes collatéraux, pour ceux qui ont été en ligne de succession. Cela importe spécialement pour l'histoire du moyen âge, car alors les puînés des familles princières étaient ordinairement investis d'apanages, dans l'étendue desquels ils jouissaient d'une véritable souveraineté, sous la réserve de l'hommage en faveur du chef de la dynastie, qui demeurait le suzerain de ces petits États démembrés de l'État principal.

Mais ces faits, ces dates que des registres authentiques, établis par

la civilisation moderne, fournissent maintenant pour tous les citoyens sans exception, sont difficiles à constater, même pour les plus grands personnages, dans ces temps anciens où l'on ne connaissait point ce que nous appelons maintenant les *actes de l'état civil*, où la filiation des plus hautes familles ne se constatait que par témoins, où l'histoire elle-même n'était point en état de suppléer toujours convenablement à cette grave lacune.

La maison de Savoie, en particulier, n'a pas eu d'histoire quelque peu suivie rédigée avant le quinzième siècle, et les travaux très-imparfaits (pour ne rien dire de plus) de ses premiers chroniqueurs, n'ont guères fourni de renseignemens précis pour établir d'une manière positive et sûre la filiation des Princes qui avaient vécu jusqu'alors.

Il est inutile de rappeler ici les divers travaux faits successivement jusqu'au dix-septième siècle pour arriver à fixer la généalogie de l'illustre Maison de Savoie. Ils furent tous recueillis, complétés, rectifiés, développés dans la grande *Histoire* publiée par Guichenon en 1660. On peut regarder ce savant comme étant parvenu à coordonner cette généalogie, de manière à en faire un ensemble généralement appuyé de preuves, et à-peu-près aussi satisfaisant que le permettaient les matériaux qu'il avait à sa disposition.

Mais quelque laborieux que fût Guichenon, quelque aide qu'il eût obtenue dans ses travaux, quelque attention spéciale qu'il eût apportée à la partie généalogique de son Histoire, il ne pouvait pas tout rencontrer et tout connaître: il s'en fallait de beaucoup qu'il eût exploré toutes les sources qui existaient dans les archives de la royale dynastie dont il faisait l'histoire, et dans celles des établissemens religieux où il avait accès.

Aussi ce sujet a-t-il été repris de nos jours, à cette remarquable époque de large développement intellectuel, où l'on a de toutes parts abordé l'étude approfondie du passé avec un redoublement de recherches consciencieuses et impartiales, de labeur infatigable et d'investigations éclairées. On a interrogé des documens jusqu'alors à-peu-près dédaignés, comme les vieux comptes-rendus financiers et administratifs, les protocoles des notaires, etc. On a mis au jour une foule de chartes inédites, et on a retrouvé ainsi beaucoup de faits et de dates précieux pour la généalogie.

Parmi ces travaux, qu'il soit permis à mon amitié de citer l'œuvre d'un jeune savant qu'une mort prématurée a enlevé aux lettres et à son

pays, M. le marquis Félix Carron de S^t^ Thomas, auteur des *Tavole genealogiche della real Casa di Savoia*, publiées à Turin en 1837.

De même que Guichenon avait, au dix-septième siècle, résumé les travaux de ses devanciers, de même ceux de l'école moderne se trouvent-ils coordonnés et développés dans les publications de l'historien du Piémont, M. Louis Cibrario, qui a lui-même, dans sa *Cronologia de' principi di Savoia rettificata*, et dans plusieurs autres ouvrages, contribué pour la plus large part aux découvertes faites dans ce genre depuis plus de vingt ans.

Maintenant que les archives nationales des États de la Maison de Savoie ont été assez explorées pour qu'il soit probable qu'elles ont donné à-peu-près tout ce qu'elles pouvaient fournir pour cette généalogie, peut-on espérer de trouver dans celles des pays voisins quelque chose de plus, quelques renseignemens qui puissent servir à la compléter, à l'éclairer de quelque manière? ·

J'ai essayé de résoudre affirmativement la question, par des recherches faites dans les documens originaux qui existent à Genève. ·

Voici quelle a été la marche que j'ai suivie.

J'ai recueilli sans exception tous les renseignemens que j'ai rencontrés sur la généalogie des Princes Savoisiens, du douzième au quinzième siècles. – Je les ai, de même, tous mentionnés dans la présente notice.

Il est clair que, de cette manière, on obtient une réunion de faits qui n'ont pas tous la même valeur scientifique.

Quelques-uns, en effet, ne font que répéter une date déjà connue. – Ce sont les moins importans sans doute, puisqu'ils ne révèlent rien d'inconnu ou d'inédit, et que le point qu'ils concernent était déjà acquis à l'histoire. Ils ont cependant, même dans ce cas, une utilité que l'on ne saurait contester, celle de confirmer, par un témoignage contemporain, et cependant nouveau pour la science, un fait, une date qui n'étaient pas toujours établis d'une manière irrécusable. Ils sont une attestation de plus qui vient, dans la grande enquête que le présent a ouverte sur le passé, corroborer les attestations antérieures.

D'autres donnent une indication différente de celles déjà existantes pour le même fait. Ce sont alors des variantes plus ou moins précieuses, des leçons diverses se rapportant à un même texte, savoir le fait principal. La critique historique s'en aide et les discute, pour constater, s'il lui est possible, l'exacte vérité, ou pour arriver du moins à la plus grande vraisemblance.

Quelquefois enfin nos documens, plus précieux parcequ'ils sont uniques ou premiers dans leur genre, viennent, après plusieurs siècles, rappeler et mettre en évidence des faits ou des dates oubliés et devenus ainsi inconnus. Ils comblent des lacunes, et contribuent pour leur part à rétablir, dans les limites du possible, le cadre d'un passé lointain, laborieusement recomposé en mettant à leur place les rares débris que le temps a laissé subsister çà et là.

Tous ces documens, à laquelle des trois catégories ci-dessus qu'ils appartiennent, constituent autant de sources originales de la science généalogique et historique: à ce titre ils méritent de voir le jour, dans une matière où les textes n'abondent pas, et que l'on cherche à éclairer d'un jour spécial et détaillé.

Ces préliminaires une fois posés, j'entre en matière, me réservant de donner quelques détails sur les sources auxquelles j'ai puisé, au fur et à mesure des articles relatifs à chacun des membres de la Maison de Savoie dont je ferai successivement mention.

§ I.

LE COMTE AMÉDÉE III.

Il existe, à la Bibliothèque publique de Genève, un vieux missel (manuscrit) qui a été l'objet d'une dissertation spéciale de la part d'un savant qui avait alors la direction de cet établissement, M. Léonard Baulacre. Quoique cette dissertation remonte à un siècle et qu'elle ait été publiée deux fois, cependant elle n'est pas connue comme elle le mérite, probablement parcequ'elle a paru dans des recueils périodiques qui se publiaient hors de France (le *Journal helvétique* de Neuchâtel, cahiers de mars et d'avril 1749; la *Nouvelle Bibliothèque germanique* d'Amsterdam, tome VIII, 1er trimestre de 1751).

Je me laisserais entraîner trop loin si j'avais la prétention de reproduire ici les argumens à l'aide desquels le savant bibliothécaire genevois détermine l'âge, et ce qu'on pourrait appeler le lieu de naissance du manuscrit en question. Il me suffira de dire que, se fondant sur un ensemble de circonstances caractéristiques et concordantes, tirées du fond encore plus que de la forme, il est arrivé à conclure que le corps de

ce missel a du être écrit au dixième siècle, et qu'il doit avoir appartenu à une église de la Tarantaise (1).

En tête de ce missel est, suivant l'usage, un calendrier dont le cadre primitif paraît contemporain du corps du manuscrit. Tous les jours de l'année y sont inscrits l'un au dessous de l'autre, comme dans nos almanachs. Dans la ligne blanche qui est en face de chacune de ces indications journalières, on a, aussi suivant l'usage du temps, écrit la mention de la mort, indiquée par le mot *obiit*, des bienfaiteurs de l'église propriétaire du manuscrit, de ceux qui y avaient fondé leur anniversaire, c'est-à-dire qui avaient donné à cette église un capital ou une rente foncière, pour rétribuer les prêtres attachés à l'église donataire, chargés de célébrer à perpétuité une messe annuelle pour le repos de l'âme du donateur. Ces inscriptions sont toutes d'écritures autres que celle du corps du manuscrit, de mains et d'encres différentes; et il est évident, quand on considère ces pages, que les anniversaires sont d'un type moins ancien que le calendrier lui-même, et qu'ils y ont été ajoutés à diverses dates postérieures, au fur et à mesure des décès des personnages qui y sont inscrits.

Les anniversaires de notre missel sont sans date d'année, à l'exception d'un seul: les plus anciens peuvent remonter au temps qui suivit de près la confection du livre: les plus récens ne paraissent pas dépasser le premier tiers du treizième siècle. L'anniversaire qui porte un millésime, est de 1222, et le caractère de son écriture paraît le mettre parmi les moins anciens. Je ne crois pas qu'un paléographe exercé trouve dans ce nécrologe des inscriptions qu'il puisse rapporter avec vraisemblance à une date postérieure à celle que je viens d'indiquer.

Reste une dernière question à examiner. Le jour auquel celui dont on célèbre l'anniversaire est inscrit dans notre calendrier ecclésiastique, est-il bien celui de sa mort?

La solution de cette question semble indiquée par la rédaction même du nécrologe, et par la nature des choses.

---

(1) Baulacre pense que ce missel appartenait à la cathédrale de Moûtiers en Tarantaise. Mais comme celle-ci était sous le vocable de S. Pierre (Besson, *Mémoire pour l'hist. ecel. des diocèses de Genève, Tarantaise etc.* p. 222), et qu'on voit par le calendrier du missel qu'il a dû appartenir à une église dédiée à S. Michel, je l'attribue plutôt au Prieuré de S. Michel-sur-Moûtiers, uni par l'archevêque S. Pierre II au monastère de S. Maurice d'Agaune, et qui fit retour en 1428 à la mense archiépiscopale (Besson, p. 194, 235).

Quand nous y lisons: *iiij° idus Octobris. Anno gracie m.° cc.° xxij.° obiit donnus Bertr. archiepiscopus Tar. et sedit annis sex et mensibus tribus*, cela signifie naturellement et directement que le 4 des ides (soit le 12) octobre de l'an de grâce 1222, est mort Bertrand archevêque de Tarantaise, après avoir siégé six ans et trois mois.

Il en est de même pour les anniversaires ordinaires sans millésime. Ainsi quand on lit: *viiij.° kal. Marc. obiit donnus Aymo archiepiscopus — viiij.° kal. Octobris, obiit Boso archiepiscopus*; je ne vois pas que l'on puisse traduire autrement, si non que le 21 février est mort Aimon, et le 23 septembre Boson, tous deux archevêques (de Tarantaise) (1).

Voilà quel est le sens intrinsèque des mots employés: c'est ainsi que ces courtes mentions nécrologiques ont dû naturellement se faire lorsque l'Église, voyant se multiplier les fondations d'anniversaires, voulut en assurer le service en le régularisant au moyen d'écrits destinés à en perpétuer le souvenir. Pour prémunir contre tout oubli des desservants qui se renouvelaient de temps à autre, elle inscrivit les anniversaires sur le calendrier perpétuel à l'usage de chaque église, calendrier consulté tous les jours. Or comme c'est la mort de celui qui a fondé, ou à l'intention duquel on a fondé un anniversaire, qui en est la condition nécessaire, la base et le point de départ, c'est le jour même du décès que l'on doit régulièrement célébrer par un service annuellement commémoratif. Alors donc qu'il venait à mourir un fidèle qui avait fondé par donation entre vifs, ou qui fondait par testament, ou pour lequel ses héritiers, parents ou amis fondaient un service religieux qui devait être perpétuellement célébré dans une église pour le repos de son âme, on donnait, à l'église que cela concernait, connaissance positive du jour auquel cette mort avait lieu, et c'était en face de ce jour que l'on écrivait, sur son calendrier, le nom et la fondation dont il s'agissait, avec cette brève, mais expressive formule: *die* ..... OBIIT *m* .....

Telle a dû être la pratique normale à l'origine des anniversaires, au moment où leur multiplication engagea l'Église à en régulariser le service par des inscriptions sur ses registres: telle doit avoir été la pratique initiale uniforme des anciens nécrologes ecclésiastiques.

Il est vrai qu'il pouvait y avoir quelquefois incertitude sur le jour

(1) Besson, Ouvr. cité, p. 193, 202.

approximatif: quelquefois l'inscription avait lieu au jour où le fondateur était enterré dans l'église chargée de faire les prières; mais cela ne faisait qu'une différence insignifiante. Quelquefois aussi celui qui, de son vivant, faisait la donation nécessaire pour la fondation d'un anniversaire, déterminait d'avance lui-même le jour de sa célébration indépendamment de celui futur de son décès (en le fixant, par exemple, à une certaine fête religieuse). Ces sortes de fixations d'anniversaires étaient si exceptionnelles et si peu fréquentes, que les ecclésiastiques chargés de les inscrire en abrégé dans les blancs exigus de leurs calendriers, ne jugeaient guère qu'il valût la peine ou qu'il fût possible de s'écarter, pour ces cas, de la formule usuelle et de style. Il leur est donc arrivé parfois de mentionner un anniversaire établi à un jour autre que celui du décès, en faisant précéder le nom du destinataire du mot coutumier *obiit*, lequel cesse alors d'être une vérité.

Notre nécrologe tarantaisien est-il demeuré fidèle à la règle primitive et logique d'inscrire les anniversaires, les *obits*, au jour vrai du décès? J'ai tout lieu de le croire, soit en raison de son ancienneté, soit à cause des deux exemples qui font l'objet des § I et II de ce travail, comme nous allons le voir.

Abordons maintenant ce qui concerne le Prince mentionné dans le titre du présent paragraphe.

On lit dans le calendrier de notre missel: *kal. Aprilis. Obiit Amedeus Comes*. Je crois qu'on ne peut pas hésiter à reconnaître là un Comte de Maurienne ou de Savoie.

Je crois en outre que ce Comte est celui qui est connu dans l'histoire sous le nom d'Amédée III.

Je dis d'abord que le missel qui nous occupe est tout tarantaisien, comme l'a démontré M. Baulacre, et comme on a pu en avoir un échantillon par les trois anniversaires d'archevêques de Tarantaise cités plus haut; qu'ainsi il n'y a que le Comte régnant dans le pays auquel appartenait l'église qui en était propriétaire, c'est-à-dire en Tarantaise le Comte de Maurienne ou de Savoie, qui pouvait y être ainsi qualifié de *Comes* tout court, sans addition démonstrative du nom de son comté. Si un Comte étranger s'était recommandé aux prières d'une église de Tarantaise, on n'aurait, je le crois, pas manqué en l'inscrivant au nécrologe, d'ajouter à son titre la désignation appellative de son comté. Quand, dans un pays, on dit *le Roi* sans plus, il est sousentendu que

c'est le Roi qui règne dans ce pays: si l'on parle d'un souverain étranger, on a soin de dire quel est l'État où il exerce la suprême autorité. – Et spécialement quant à notre missel, on y trouve les noms de deux seuls autres Comtes (qui feront l'objet des deux paragraphes suivants): tous deux sont des Comtes de Savoie.

Je dis en outre qu'il s'agit d'Amédée III, à l'exclusion des deux premiers Amédées. Sans m'engager ici dans une discussion difficile sur ces deux Princes, dont le premier n'a pas régné dans le sens propre du mot (quoiqu'il ait pris dans quelques actes le titre de Comte), puisque son père lui a survécu sans avoir, ni abdiqué, ni été déposé, – et dont le second n'a eu qu'un règne éphémère; il me suffira de dire que le décès de l'Amédée porté dans notre calendrier au 1er avril, concorde rigoureusement avec la date donnée par Guichenon à celui d'Amédée III. Cette coïncidence, qui ne s'applique qu'au seul Amédée III parmi les nombreux Princes Savoisiens qui ont porté ce nom, me paraît prouver d'une manière suffisante que c'est bien de ce Prince qu'il s'agit dans l'anniversaire ci-devant transcrit.

Notre document n'a donc pas l'avantage de mettre au jour une date inconnue, mais il confirme d'une manière entièrement satisfaisante une date mentionnée par un historien, Guichenon (tome 1, page 228), qui ne faisait pas connaître la source originale à laquelle il avait puisé. Pour des temps aussi reculés, dont nous sommes séparés par plus de sept siècles, c'est quelque chose qu'un document contemporain inédit, qu'on peut considérer comme authentique.

Suivant un usage général, surtout pour les époques reculées, le nécrologe n'indique que le jour et le mois, mais non l'année du décès: c'était effectivement tout ce que le clergé attaché à l'église destinataire avait besoin de savoir pour la célébration annuelle de l'anniversaire. Mais l'année de la mort d'Amédée III peut se déterminer à l'aide des historiens de la croisade dans laquelle ce Prince succomba.

MM. de S. Thomas et Cibrario ont judicieusement adopté comme telle l'année 1148, plutôt que l'année 1149 indiquée par Guichenon.

§ II.

LE COMTE HUMBERT III.

On lit dans le calendrier du missel que je viens de citer, la mention suivante: *iiij° nonas Marcii. Obiit Humbertus Comes Maur̄.* « le 4 mars, est mort Humbert, Comte de Maurienne. »

M. Baulacre, dans la notice qu'il a consacrée à notre missel, attribue cet anniversaire à Humbert I, dit *aux blanches mains*, par le seul motif que l'on n'a pas ajouté d'adjectif qualificatif ou de nombre ordinal indiquant que l'Humbert mentionné au nécrologe ne soit pas le premier du nom.

Il serait précieux, sans doute, de savoir ainsi le jour précis de la mort de ce mystérieux fondateur de l'État et de la dynastie de Savoie. Je ne puis cependant pas admettre que cette opinion soit fondée.

Généralement, on ne peut considérer comme une règle positive l'usage d'ajouter au nom d'un Prince une épithète, une désignation individuelle ou un nombre ordinal pour le distinguer des autres Princes homonymes de sa race. Les Souverains eux-mêmes, dans leurs propres actes, ne le font guères, même de nos jours. Et quant aux tiers, la coutume de désigner les Princes régnans homonymes par un numéro d'ordre n'a pu s'introduire et ne s'est introduite effectivement que tard, alors que la fréquente répétition des mêmes noms a risqué d'occasionner de la confusion. Lorsque ce retour des mêmes noms n'était pas encore multiplié, on ne sentait pas le besoin d'adopter des désignations destinées à différencier les individus: en un mot, cet usage est inconnu dans les temps anciens, et ne s'est introduit que tard. Il est postérieur à l'époque et au manuscrit qui nous occupe: nous venons de voir au paragraphe précédent, qu'Amédée, III du nom, y était désigné sous la seule dénomination de *Amedeus Comes.*

Spécialement, en matière d'anniversaires, on se bornait, dans ces siècles reculés, à inscrire au nécrologe le nom et la qualité de celui qui venait de mourir. A ce moment, aucun doute sur l'identité n'était possible: il s'agissait d'un Prince que tout le monde avait connu, et dont chacun savait la mort récente: c'était le seul qu'on pût avoir en vue: aucune confusion n'était possible, alors du moins, avec un prédécesseur dont

l'anniversaire était déjà fixé et célébré dès longtemps à une autre date, moins encore avec un successeur vivant, quand même ils auraient porté le même nom: l'utilité d'une qualification distinctive ne se faisait sentir qu'à la longue, en cas de retour d'un même nom: or, dans notre missel, on n'a jamais eu à inscrire deux Princes homonymes.

Recherchons donc quel est l'Humbert dont il s'agit dans l'anniversaire ci-devant transcrit, en nous dégageant de l'idée qu'il ne puisse s'agir que de Humbert I, par cela seul qu'on n'a pas ajouté à son nom un numéro d'ordre ou un surnom distinctif.

Or en consultant l'histoire de la Maison de Savoie, on trouve:

1° Qu'elle n'a fourni que trois Princes régnans du nom de Humbert, savoir Humbert I, *aux blanches mains*, au onzième siècle; Humbert II, *le renforcé*, au commencement du douzième siècle, et Humbert III, *le saint*, vers la fin du même siècle;

2° Que l'époque du décès de Humbert I est incertaine quant à l'année, inconnue quant au jour;

3° Que Humbert II est mort le 14 des kalendes de novembre (19 octobre) 1103, suivant le martyrologe de S-Jean de Maurienne;

4° Que Humbert III est mort un 4 mars, selon Guichenon, qui n'indique pas la source à laquelle il a puisé ce renseignement. – Or c'est précisément le jour donné par notre missel pour l'*obït* de son *Humbertus Comes Maurianensis*.

La rigoureuse coïncidence entre ces deux indications, me paraît prouver démonstrativement que c'est bien de Humbert III qu'il s'y agit.

Ajoutons qu'un document récemment publié par les soins de M. Cibrario, le *Nécrologe de l'Abbaye d'Abondance* en Chablais, nous donne aussi, au 4 mars, la mort d'un *Humbertus Comes Sabaudie*. Cet anniversaire ne peut concerner que Humbert III, soit à cause de l'identité de date, soit parceque, du temps de Humbert II, cette abbaye n'existait pas encore.

Concluons que si notre manuscrit ne révèle pas, pour le décès de Humbert III, une date inconnue, il fournit au moins une utile confirmation d'une date qui est maintenant duement établie par l'accord des deux nécrologes cités avec l'autorité de Guichenon.

Voilà quant au jour du décès: voyons maintenant quelle en est l'année.

Guichenon donne sans hésitation comme telle l'année 1188. Mais ce millésime est convaincu d'erreur par un document récemment publié par M^gr^ A. Billiet, archevêque de Chambéry, daté du 20 octobre 1188.

et qui prouve qu'alors le Comte Humbert vivait encore (1). – D'autre part, une charte du 1er avril 1189 prouve que ce jour là le trône savoisien était occupé par le Comte Thomas (2). La mort de Humbert III doit donc se placer entre ces deux termes; et en encadrant le jour fourni par les anniversaires, entre les deux chartes sus-mentionnées, on est amené à conclure avec précision que ce Prince est décédé le 4 mars 1189.

§ III.

LE COMTE THOMAS.

On lit, toujours dans le nécrologe tarantaisien mentionné dans les deux paragraphes précédens: *Kal. Marcii. Obiit Tomas Comes Sabaudie* « Le 1er mars, est mort Thomas, Comte de Savoie. »

Cet anniversaire est écrit deux fois: l'écriture, l'encre même en paraissent plus récentes que celles d'aucun des autres articles de cet obituaire. Enfin le nom de *Sabaudia*, employé comme dénomination du pays auquel s'appliquait le titre comital des Princes dont nous nous occupons, est d'un usage plus récent que celui de *Comes Maurianensis*, que nous voyons encore employé pour désigner Humbert III: il s'agit donc d'un Prince d'une date moins reculée.

Ici l'incertitude n'est pas possible: il ne peut s'agir que de Thomas, le seul de ce nom et de cette famille qui ait été réellement Comte de Savoie, et qui se titrait en conséquence *Thomas Comes Sabaudie*, tandis que le fils et le petit-fils, qu'il a eus, qui se sont appelés Thomas, n'ont eu que des apanages dépendans du *comitatus Sabaudie*, et ne se sont jamais qualifiés que *Thomas de Sabaudia, Comes* etc.

Les généalogistes n'ont pas, jusqu'ici, connu et déterminé, du moins avec précision, le moment de la mort du Comte Thomas. Guichenon, dans son texte, après avoir cité un dernier titre émané de ce Prince, donné à Pierre-châtel en mars 1232, dit qu'ensuite il passa les monts, s'arrêta à Aoste, et y mourut (3), et il donne la date de novembre 1233

(1) Monumenta historiae patriae, chartarum tom. II, col. 1140, n° 1643.
(2) Monumenta historiae patriae, chartarum tom. I, col 950, n° 624.
(3) Hist généal de la Maison de Savoie, tom. I. p. 250.

au plus ancien titre qu'il cite de son successeur le Comte Amédée IV (1). Seulement, en marge de la première de ces mentions, se trouvent ces mots, *sa mort*, 20 *janvier* 1233, sans indication d'aucune source. – Le marquis de S. Thomas a adopté, avec quelque doute (?) le millésime 1233, mais sans aucune indication de jour, ne regardant sans doute pas comme suffisamment probante la note marginale de Guichenon. – Aucun document à moi connu n'est venu suppléer à cette lacune, si ce n'est celui que je publie aujourd'hui.

J'estime qu'entre la note, sans origine connue, glissée, on ne sait d'après quoi, dans la marge de Guichenon, et l'autorité du missel tarantaisien, il n'y a pas à hésiter, et que l'on doit considérer le décès du Comte Thomas comme ayant eu lieu un 1^er^ mars.

Quant à l'année, elle se trouve déterminée d'une manière satisfaisante:

1° Par la charte de donation faite à l'Abbaye de Hautecombe par le Comte Thomas le 5 des nones [3] mars 1232, rapportée dans le magnifique ouvrage que le gouvernement de S. M. le Rni de Sardaigne a publié à Turin en 1843 sous le titre de *Storia e descrizione della R. badia d'Altacomba* (docum. IX, p. 159);

2° Par la charte du 18 mai 1233 publiée dans les *Monumenta historiae patriae*, *Chartarum*, tom. II, col. 1382, qui constate qu'alors déjà Amédée IV régnait, et était titré *Comes Sabaudie*.

Entre ces deux dates, il n'y a qu'un 1^er^ mars, celui de 1233, auquel on peut rapporter sans hésitation la date cherchée.

§ IV.

LE COMTE PIERRE II, SURNOMMÉ LE PETIT CHARLEMAGNE.

Ici, j'aborde une autre source genevoise de documens pour la généalogie de la Maison de Savoie: c'est le *Livre des anniversaires* qui se célébraient dans *S^t^-Pierre cathédrale de Genève*, et qui appartient à la Bibliothèque publique de cette ville (2).

Ce manuscrit forme un gros volume en parchemin. Il commence par

(1) Eodem loco, p. 268.

(2) Il figure sous le n° 149 des manuscrits *français* (Senebier, Catalogue des manuscrits de la Biblioth. de Genève, p. 390) quoiqu'il soit exclusivement latin.

un calendrier où les jours du mois sont marqués d'après la computation romaine (calendes, nones et ides), et où sont inscrites, à leurs dates, les fêtes fixes qui se célébraient dans l'Église de Genève.

Vient ensuite le nécrologe, obituaire ou registre des anniversaires. Il est fait jour par jour, chaque jour occupant l'un des côtés d'un feuillet. Il y a des jours qui comptent jusqu'à 9 anniversaires: sept seulement sont restés sans inscription de ce genre jusqu'en 1522, époque à laquelle ils s'arrêtent.

Le plus grand nombre des anniversaires, ceux qui sont inscrits les premiers de chaque page comme les plus anciens, sont écrits d'une seule et même main, dont on reconnaît facilement le caractère: c'est celle d'un chanoine de Genève, qui se nomme lui-même à la fin du manuscrit, en ces termes: *Petrus Chartresii, canonicus Gebenn., scripsit hanc regulam pro utilitate et commodo hujus ecclesie, cujus vita sit laudabilis apud Deum et homines. Amen.*

Chartrier a évidemment recopié tout d'une fois et mis au net un ancien obituaire qui n'existe plus, et son travail a eu lieu entre les années 1378 et 1388: en effet, l'anniversaire de l'évêque Guillaume de Marcossey, mort au commencement de la première de ces deux années, est de sa main, et ceux de l'évêque Adémar Fabri et du prévôt Guillaume Du Lac, décédés tous deux en 1388, sont d'autres mains, comme toutes les nombreuses additions à la partie primitive du manuscrit. Les anniversaires écrits par Chartrier sont (à deux exceptions près) sans millésime: au quinzième siècle, l'année y est fréquemment indiquée; la rédaction devient plus détaillée; quelquefois même on transcrit en entier l'acte de fondation.

On lit dans l'obituaire que je viens de décrire: *xvj. Kal. Junii. Obiit Petrus Comes Sabaudie, pro cujus anniversario xxij. solidi.* « Le 16 des kalendes de juin (17 mai) est mort Pierre Comte de Savoie, pour l'anniversaire duquel (le chapitre reçoit annuellement) 22 sols. »

C'est le correspectif du legs de 20 livres fait par le testament du Comte Pierre à l'église de S. Pierre de Genève (1): la somme avait été placée un peu au dessus du denier 20: elle produisait 5 ½ p. %.

Nous abordons ici une question entourée de quelque difficulté, à cause

(1) Guichenon, Hist de Savoie, Preuves, p. 75.

des documens discordans que nous rencontrons sur elle, celle de savoir positivement quand est décédé le Comte Pierre.

L'année de ce décès n'est pas douteuse: c'est 1268, car on a des actes émanés du Comte Pierre du mois de mai 1268, et on en a de son successeur le Comte Philippe du mois de septembre de la même année. — Reste donc la question du jour.

Suivant Guichenon, le Comte Pierre serait mort le 7 juin: ce serait trois semaines plus tard que la date du 17 mai, indiquée par le nécrologe genevois: ce savant ne nous dit pas à quelle source il a puisé cette indication.

Cherchons si quelques documens contemporains peuvent nous guider entre ces assertions contradictoires.

J'en trouve deux: ce sont deux obituaires ecclésiastiques.

Le livre des anniversaires de l'abbaye d'Abondance, déjà cité, porte au 7 des ides (ou 9e jour) de mai: *obiit . . . D. Petrus Comes Sabaudie* (1).

La chronique de l'abbaye de Hautecombe porte: *A. D. m.° cc.° lxviij.° decimo septimo Kalendas Junii* (16 mai) *fuit hic tumulatus illustris ac strenuissimus vir D. Petrus nonus Comes Sabaudie* (2).

Voilà donc quatre documens, et aussi quatre dates différentes:

Le	9	mai,	nécrologe	d' Abondance
»	16	»	»	de Hautecombe
»	17	»	»	de Genève
»	7	juin	suivant Guichenon.	

Écartons d'abord le premier de ces documens: la date du 9 mai, qu'il donne, est évidemment erronée, puisque l'on conserve dans les archives royales de Turin le codicille testamentaire du Comte Pierre, daté du lundi des Rogations 1268, lequel, cette année là, fut le 14 mai, c'est-à-dire cinq jours après cette prétendue date de décès!

Nous restons donc en face des trois dates des 16 et 17 mai et du 7 juin.

Remarquons d'abord combien les deux premières, sans s'accorder précisément, se serrent cependant de près: leur rapprochement forme déjà, en leur faveur, la réunion numérique de deux présomptions contre une, et leur désaccord rentre dans ces limites d'erreurs de chiffre ou de jour, presque d'heures, qui, lorsqu'il s'agit de messages transmis, probable-

(1) Monumenta historiae patriae, Scriptorum tomus III, col. 361.

(2) Ibidem.

ment de bouche, à l'église chargée d'enregistrer le décès pour fixer de futures célébrations d'anniversaires, se commettent et s'expliquent bien facilement.

Nous connaissons positivement et entièrement les deux obituaires ou chroniques qui donnent les dates des 16 et 17 mai: nous savons que ce sont des documens anciens, contemporains ou à-peu-près, sincères, dignes de foi sauf les chances d'erreur inséparables de tout ce qui n'est recueilli qu'au bout d'un certain temps sur les témoignages des autres: ce sont là des circonstances de nature à déterminer la confiance des critiques les plus scrupuleux. On ne peut pas mettre en balance comparative avec eux la date donnée par Guichenon, qui ne cite pas la source à laquelle il a puisé.

La chronique de Hautecombe tire une importance toute particulière de la circonstance qu'elle émane de la maison religieuse qui a reçu la dépouille mortelle du Comte Pierre, et cela en vertu de sa volonté expresse, consignée en tête de son testament: on a dû mettre un grand soin à noter exactement le jour où Hautecombe a reçu ce précieux dépôt.

Enfin les actes authentiques des dernières volontés de ce Prince viennent encore corroborer les présomptions d'exactitude des nécrologes de Hautecombe et de Genève, et montrer que c'est bien aux environs des jours du mois de mai qui y sont indiqués qu'il a dû finir sa carrière. Le testament est du jour de S^t^-Jean-porte-latine, soit le 6 mai. Le Comte Pierre y déclare « être malade, et prévoir le cas de sa mort (*aegri corpore, praevidere mortis casus volentes*). » En conséquence, il dispose de ses États et de ses biens. Huit jours après, le 14 mai, il fait un codicille par lequel il déroge à son testament pour augmenter la consistance des États Savoisiens essentiels qu'il laisse à son frère, aux dépens du legs qu'il avait d'abord fait à sa fille unique, devenue, par son mariage, une Princesse étrangère. Cette disposition ressemble beaucoup à une influence exercée ou à des réflexions faites *in extremis*, pour assurer, comme le testateur le dit lui-même, *tranquillitatem et concordiam successorum nostrorum et totius Sabaudie comitatis*. Ce codicille dérogeant, à huit jours de distance, à un testament solennel, montre l'urgence déterminée par une mort imminente: il est donc plus vraisemblable qu'elle est survenue deux ou trois jours plus tard, comme l'indiquent les obituaires de Hautecombe et de Genève, que d'admettre, avec Guichenon, un intervalle de vingt-quatre jours, sans qu'aucune nouvelle disposition intervienne de la

part de ce Prince qui, partagé entre une affection et un principe, avait, en huit jours, si gravement modifié ses premières intentions.

Je crois donc que, en saine critique historique, on doit adopter l'opinion que le Comte Pierre est décédé le 16 ou le 17 mai, plus probablement le premier de ces deux jours.

Reste enfin une dernière question: où ce Prince a-t-il cessé de vivre?

L'ancienne chronique française de Savoie, et après elle Guichenon, disent que ce fut dans le château de Chillon au pays de Vaud, sur le lac de Genève. – Mais si l'on fait attention que le codicille déjà cité est fait *apud Petram castellum* le 14 mai, et que déjà le 6 mai le « petit Charlemagne » était assez malade pour prendre ses dernières dispositions en vue de sa mort prochaine, on sera conduit à conclure que c'est au château de Pierre-châtel sur le Rhône qu'il a fini ses jours.

Une autre circonstance confirme cette manière de voir; c'est que ce Prince fut, aussitôt après sa mort, porté et enseveli, *tumulatus*, à Hautecombe: or ce monastère n'est, en passant le Rhône, qu'à environ un myriamètre de distance de Pierre-châtel: la distance qui, même en ligne droite, sépare Chillon de Hautecombe, est environ dix fois plus considérable. Il est matériellement impossible que le Comte Pierre, fût-il même en parfaite santé, fit le 14 mai un acte à Pierre-châtel, allât de là à Chillon, et en fût rapporté à Hautecombe le surlendemain. C'est donc à Pierre-châtel qu'il a dû mourir, pour être ensuite porté, sans retard, suivant ses dernières volontés, à l'abbaye voisine de Hautecombe (1).

§ V.

LA COMTESSE AGNÈS DE SAVOIE.

Le nécrologe de S. Pierre de Genève porte: *iij.° idus Augusti. Obiit Agnes Comitissa Sabaudie pro cujus anniversario xxx. solidi.* « Le 3 des ides [11] août, est morte Agnès, Comtesse de Savoie, pour l'anniversaire de laquelle (le chapitre reçoit annuellement) 30 sols. »

C'est Agnès de Faucigny, veuve du Comte Pierre: Guichenon, tout en constatant par une disposition testamentaire émanée d'elle la veille de

(1) J'ai donné, en 1849, un résumé de mon opinion à ce sujet, et j'ai publié le codicille du Comte Pierre dans les Mémoires de la Société d'histoire de Genève, t. VII, p. 256, 321.

S. Laurent (9 août) 1268, qu'elle survécut à son mari, ignore l'époque de son décès.

L'obituaire genevois vient nous en apprendre le jour.

Quant à l'année, elle est déterminée par une charte du 10 septembre 1268, qui est aux archives royales de Turin (1), de laquelle il résulte que, à cette date, Agnès n'était plus vivante.

Puis donc qu'Agnès a testé le 9 août 1268 étant malade, *in egritudine corporis*, qu'elle est morte un 11 août, et qu'on parle d'elle le 10 septembre suivant, même année, comme d'une personne ci-devant décédée, il est clair que sa mort a eu lieu le 11 août 1268, deux jours après son testament (2).

Ici donc notre nécrologe permet de combler, d'une manière satisfaisante, une lacune dans la généalogie de la Maison de Savoie.

§ VI.

LE COMTE PHILIPPE.

Qu'il me soit permis de consacrer un paragraphe à l'énoncé de mon opinion sur l'époque du décès du Comte Philippe: elle me paraît découler directement des documens subsistans, et rectifier utilement la date donnée par Guichenon. Elle ne repose pas, il est vrai, sur les documens genevois qui font la base de ce travail, mais elle s'appuye également sur des titres qui ne se trouvent pas en Piémont.

Après dix-sept ans d'un règne qui n'a pas laissé de grandes traces dans l'histoire, le Comte Philippe, vieux et sans enfans, éprouvait dans toute leur étendue les difficultés qui, au moyen âge et avec un ordre de succession encore mal établi, assaillaient dans de pareilles circonstances un Prince entouré de collatéraux jeunes et avides de sa succession. On lira avec intérêt le tableau qu'en a tracé l'historien du Piémont, M. Cibrario, dans sa *Storia della monarchia di Savoia.*

L'ordre de primogéniture aurait appelé le jeune Philippe, fils de Thomas, qui représentait l'aîné des neveux du Comte régnant; mais il était trop

(1) Titres de Savoie, paquet 7, Beaufort, n° 15.

(2) Voy. Mém. Soc. d'hist. de Genève, tom. VII, p. 258.

jeune pour être en état de disputer le trône à ses deux oncles, frères cadets de son père, les Princes Amédée et Louis.

Tiraillé entre les prétentions rivales de ses deux neveux, et n'osant pas manifester ouvertement la préférence qu'il accordait à l'aîné, Amédée, il déféra, par un acte du 23 octobre 1284, le droit de faire ce choix à sa nièce Éléonore, Reine douairière d'Angleterre, et à son petit-neveu, le Roi d'Angleterre Édouard I (1). - Quelques semaines plus tard, le 17 décembre 1284, il faisait connaître sa secrète intention d'avoir pour successeur Amédée, et de laisser le pays de Vaud à son autre neveu Louis (2). Enfin, pendant sa dernière maladie, il adressa, le 10 août 1285, à la Reine douairière et au Roi d'Angleterre une nouvelle lettre par laquelle il leur confirmait le pouvoir qu'il leur avait donné, et défendait à ses neveux, ou à tous autres, de toucher à ses biens avant la décision des Princes Anglais (3). Ce dernier acte est fait dans un endroit dont le nom est imprimé *Rupeel;* mais il me paraît évident, par ce qui va suivre, qu'il devait y avoir dans l'original *Rupēcl* avec un signe d'abbréviation, pour *Rupecula*, la Rochette (4).

J'ai trouvé aux archives de l'ancienne province de Bourgogne, à Dijon, un acte qui prouve que, quatre jours plus tard, soit le 14 août 1285, Amédée se trouvait à ce même château de la Rochette, *apud Rupeculam in castro*, où son oncle gisait atteint de sa dernière maladie, et que, voulant se préparer des appuis pour le moment où la question de succession allait s'élever par la mort imminente du Comte Philippe, il s'y faisait rendre hommage par Pierre de Gex du consentement de la mère de celui-ci, Lionnette Dame de Gex (5).

A cette date, 14 août 1285, le Comte Philippe vivait encore, puisque son neveu ne se qualifie que de *illustris vir Amedeus de Sabaudia;* mais on touchait de bien près au dénouement. En effet Valbonnais, dans son Histoire du Dauphiné, a publié un acte tiré des archives de la Chambre des comptes de Grenoble, daté du lendemain de l'Assomption (16 août

(1) Lünig, Codex Italiae diplomaticus, I, col. 601.

(2) Storia della monarchia di Savoia, II, p. 189.

(3) Lünig, Codex Italiae diplomaticus, eod. col. 603-606.

(4) Château, bourg, vallée de la Savoie propre. Le Comte Philippe était, le 29 avril précédent, peu loin de la Rochette, à Monmélian (Mon. hist. patr. Chart. tom. II, col. 1698).

(5) Titres de la baronnie de Gex, liasse 1, n° 4 (Mém. Soc. d'hist. de Genève, VII, 346).

1285, dans lequel notre Amédée se qualifiant de *Comes Sabaudie*, conclut une trève avec le Dauphin (1).

Si cette date est exacte (2), il faut que le Comte Philippe soit décédé entre le 14 et le 16 août 1285. On peut donc, avec une grande approximation, donner le 15 août 1285 comme la date de la mort de ce Prince. Guichenon la reculait mal-à-propos jusqu'au 17 novembre même année.

Au surplus, peu de temps après le 16 août, nous trouvons, à dater du 29 septembre 1285, des actes multipliés dans lesquels Amédée prenait non seulement la qualité de *Comes Sabaudie*, mais agissait depuis quelque temps d'une manière effective en cette qualité (3).

§ VII.

BÉATRIX DE SAVOIE, DAME DE FAUCIGNY ETC.

La fille du Comte Pierre, Béatrix, qui avait épousé en premières noces le Dauphin Guy, et en secondes Gaston Vicomte de Béarn, cette remuante Princesse qui, depuis la mort de son père, lutta quarante ans pour ravoir les possessions que le testament de son père lui avait destinées, mais que le codicille mentionné dans le § IV ci-dessus, lui avait enlevées, finit sa longue carrière *après Pâques 1310*, comme nous l'apprend un document genevois, précieux non seulement pour l'histoire de Genève, mais aussi pour celle des contrées voisines. Cette pièce, connue sous le nom de *Fasciculus temporis*, paraît être une chronique ou le fragment d'une chronique tenue dans le prieuré de St-Victor-lès-Genève: elle a été publiée pour la première fois en 1841 par M. Cibrario dans le second volume de la *Storia della monarchia di Savoia*, d'après une vieille traduction française trouvée aux archives de la ville de Thonon. M. Cibrario soupçonnait avec raison que l'original devait être en latin. J'ai retrouvé deux copies anciennes de cet original, et je l'ai publié en

---

(1) Histoire du Dauphiné. Genève, 1722, f°, tom. II, p. 29.

(2) Le doute, qui pourrait naître, vient de ce que l'acte est daté *die Veneris in crastino Assumptionis B. Marie A. D. m. cc. lxxxv.*, et qu'en 1285 l'Assomption fut un mercredi. En 1286, l'Assomption fut un jeudi. Mais l'exact Valbonnais ne paraît pas avoir de doute sur le millésime de cette charte.

(3) Mém. Soc. d'hist. de Genève, VIII, p. 219 et suiv. — Spon, Hist. de Genève. Preuve XXIII.

1854 (1). La traduction française est incorrecte dans plusieurs endroits, entre autres dans l'article concernant la Princesse dont nous nous occupons, dont on a altéré le nom de manière à le rendre méconnaissable: on l'y a effectivement appelée *Claude*, tandis que son nom est *Béatrix*.

Je reproduis donc ici le texte original: *Item, anno a natiuitate Domini m. ccc. x. post Pascha, obiit illustris Domina B. Domina Foucigniaci.* « L'an de la nativité du Seigneur 1310, après pâques, est décédée l'illustre Dame B(éatrix) Dame de Faucigny. » Pâques ayant été le 19 avril en 1310, c'est dans les jours qui ont suivi de très près cette date que Béatrix a dû cesser de vivre: elle devait avoir au moins 75 ans (2).

§ VIII.

LE COMTE AMÉDÉE V, LE GRAND.

Le nécrologe genevois mentionne ce Prince comme suit: *xvij.° Kal. Nouembris. Item, D. Amedeus Comes Sabaudie, pro cujus anniversario Eduardus ejus filius dedit nobis xl. solidos annuales.* « Le 17 des kalendes de novembre (16 octobre) est mort le Seigneur Amédée Comte de Savoie, pour l'anniversaire duquel son fils Édouard nous a donné une rente annuelle de 40 sols. »

Cette date est précisément celle donnée par Guichenon (Hist. 1, p. 364) et par M. Cibrario (II, p. 335) concordance qui confirme l'exactitude de notre nécrologe.

Le *Fasciculus temporis*, document genevois mentionné au paragraphe précédent, rapporte ce fait, sous le millésime de 1323 avec quelques détails. Je vais, par la raison ci-devant indiquée, en rapporter ici le texte original latin.

Item anno a natiuitate Domini m. ccc. xxiij.° die dominica ante festum B. Luce euangeliste videlicet xvij.° Kal. Nouembris, obiit bone memorie et inclite recordationis illustris vir D. Amedeus Comes Sabaudie, apud Auinionem, regnante Johanne Papa et ibidem presente, et corpus ipsius D. Comitis fuit apportatum in Sabaudia, et sepultum die Mercurii

(1) Mém. Soc. d'hist. de Genève, IX, p. 291 et suiv.

(2) Elle avait été accordée au Dauphin Guy le 4 décembre 1241 (Guich. 1, 287). Mais ses parens ne s'étant mariés qu'en février 1234, elle ne pouvait être que de la fin de cette année.

sequenti Altecombe anno quo supra. Et regnauit Comes per xxxviij.° annos, et in vita sua tenuit xxxij. sedes cum ingeniis et machinis. Et eidem successit illustris vir D. Eduardus de Sabaudia ejus filius.

« L'an de la nativité du Seigneur 1323, le dimanche avant la fête de S. Luc évangéliste, savoir le 17 des kalendes de novembre, est mort l'illustre Seigneur Amédée Comte de Savoie, de bonne mémoire et de glorieux souvenir, à Avigon, le Pape Jean régnant et présent. Le corps dudit Seigneur Comte fut apporté en Savoie et enseveli le mercredi suivant, au sus-dit, à Hautecombe. Il a *régné* comme Comte pendant 38 ans, et a, pendant sa vie, tenu 32 siéges avec machines et engins de guerre. Son fils, l'illustre Seigneur Édouard de Savoie, lui a succédé. »

Ce récit, confirmé d'ailleurs par la chronique de Hautecombe, est presque une notice historique.

§ IX.

LE COMTE ÉDOUARD.

La mort de ce Prince est rapportée comme suit dans le nécrologe genevois: *ij.° non. Nouembris. Item nobilis vir D. Euardus Comes Sabaudie, pro cujus anniuersario xl. solidi.* « Le 2 des nones [4] de novembre, est mort noble homme le Seigneur Édouard Comte de Savoie, pour l'anniversaire duquel (le chapitre reçoit annuellement) 40 sols. »

Cette date concorde rigoureusement avec celle donnée par Guichenon et autres autorités.

Je rapporterai encore ici la mention relative à ce Prince contenue dans le *Fasciculus temporis* genevois.

Item Anno Domini m. ccc. xxix.° die iv.ª mensis Nouembris, obiit illustris vir D. Eduardus Comes Sabaudie in Francia apud Gentillice, et sepultus fuit Altecombe die mercurii in vigilia B. Clementis, et regnauit per sex annos: et eidem successit D. Comes Aymo de Sabaudia ejus frater.

« L'an du Seigneur 1329, le 4 du mois de novembre, est mort l'illustre Seigneur Édouard Comte de Savoie à Gentilly en France, et il a été enseveli à Hautecombe le mercredi veille de S. Clément (22 novembre). Il a régné six ans: son frère le Seigneur Comte Aymon de Savoie lui a succédé. »

§ X.

LE COMTE AYMON.

Son décès est, dans l'obituaire genevois, l'objet de la mention suivante. *x.° Kal. Julii. Item, Nobilis vir D. Aymo Comes Sabaudie super leydis de Thonons, xl. solidi.* « Le 10 des kalendes de juillet (22 juin) est mort noble homme le Seigneur Aymon Comte de Savoie (qui a donné au chapitre pour célébrer son anniversaire, une redevance de) 40 sols sur les leydes (péages) de Thonon. »

Guichenon avait rapporté la mort de ce Prince au 24 juin 1343. M. Cibrario a indiqué la vraie date, qui est du 22 juin même année: elle concorde rigoureusement avec celle de l'obituaire genevois.

La fondation d'un anniversaire pour le repos de son âme, n'est pas l'unique rapport que le Comte Aymon eut avec l'église de Genève et son chapitre. Heureux de la victoire qu'il avait remportée dans le voisinage, à Monthoux, sur les troupes du Sire de Faucigny, en juillet 1332, il fonda dans la cathédrale genevoise un service spécial pour célébrer l'anniversaire de cet évènement. Voici la mention qui y est relative:

Anno Domini m. ccc. xxxij.° vij.° Kal. Augusti, illustris vir D. Aymo Comes Sabaudie donauit Capitulo Gebenn̄. x. libras gebenn̄. annui redditus pro una missa sollempniter annuatim celebranda dicta die in magno altari ecclesie Gebenn̄. ad honorem S. Petri apostoli, et in fine dicte misse cantetur sollempniter: Te Deum laudamus etc.

Les archives de Genève conservent encore l'acte qu'il fit rédiger pour assurer le service de la rente affectée à cet anniversaire (1).

§ XI.

AMÉDÉE VI, LE COMTE VERD.

Je ne fais que reproduire ici, pour ne rien omettre, la mention relative à la naissance de ce Prince qui se trouve dans le *Fasciculus tem-*

(1) Pièces historiques, n° 213 (Mém. Soc. hist. Genèv. IX, p. 319).

poris genevois. M. Cibrario en a donné la traduction: j'insère ici le texte original:

Item anno a natiuitate m. ccc. xxxiiij.° die Martis iiij.ª Januarii, fuit natus Amedeus filius illustris viri D. Aymonis Comitis Sabaudie, et viij.ª die natiuitatis sue fuit baptizatus, et assumpsit nomen D. Amedei Comitis Gebenn. Et est primo genitus.

« Le mardi 4 janvier 1334 est né Amédée fils de l'illustre Seigneur Aymon Comte de Savoie: le huitième jour de sa naissance il fut baptisé, et prit le nom du Seigneur Amédée Comte de Genevois. Il est le premier né. »

§ XII.

LE DUC AMÉDÉE VIII.

Avant de parler de la mort de l'illustre Duc Amédée VIII, je crois devoir, toujours à l'aide des documens genevois, réfuter une erreur généralement répandue sur ce Prince, grâce à Monod, dans son *Amedeus pacificus*, et à Guichenon, erreur qui consiste à prétendre qu'après avoir, dans le concile de Lausanne, abdiqué le pontificat, il se serait retiré et aurait vécu dans sa solitude de Ripaille.

La bibliothèque de Genève possède un manuscrit en deux volumes petit in-folio, intitulé *Registrum epistolarum Amedei Cardinalis Sabinensis;* c'est le registre dans lequel Amédée, devenu simple Cardinal-Évêque titulaire de Sabine, Légat et Vicaire perpétuel du Saint-Siége *in nonnullis Italie, Galliarum, Germanieque partibus*, faisait transcrire, à la suite les uns des autres, ses rescrits, les décisions qu'il prononçait, en sa susdite qualité, sur les affaires qui lui étaient déférées dans les diocèses soumis à sa souveraine juridiction ecclésiastique. Comme Amédée passait peu de jours sans expédier les affaires courantes, comme ses actes sont très-nombreux et très-suivis, et qu'ils contiennent non seulement la date, mais encore la mention du lieu où ils ont été faits, on peut reproduire, d'après eux, l'itinéraire de ce Prince-Prélat depuis son abdication, qui eut lieu à Lausanne le 15 avril 1449, jusqu'à sa mort.

On voit ainsi qu'il continua de séjourner à Lausanne depuis sa renonciation jusqu'au 18 juin; de là il se rendit à Évian, où il passa le mois de juillet. Au mois d'août il partit pour le Piémont, faisant route pour Genève (où il s'arrêta quelques jours dans le couvent des Dominicains

ou Frères prêcheurs de Palais, soit Plainpalais), Salenove, Aix, Chambéry, la Tarantaise. Puis, traversant le petit S. Bernard, il vint à Aoste, Ivrée, Turin, puis à Moncalier où il résida du 25 septembre au 28 décembre. Ce jour il partit pour Avigliana, où il passa le commencement de janvier 1450: il se rendit de là à Suse, franchit le Mont Cenis, arriva à Chambéry, Aix, Genève, et était de retour à Lausanne le 12 février. En mars seulement il passa quelques jours à Ripaille, puis se rendit à Évian, où il séjourna pendant tout le printemps et une partie de l'été. Le 29 août, il était arrivé au couvent de Palais: dans le courant d'octobre il s'établit dans la ville même de Genève, qu'il ne quitta plus dès lors. Il put vaquer à l'expédition des affaires, puisqu'on a des actes émanés de lui jusqu'au 6 janvier 1451, veille de sa mort.

Il mourut le 7 janvier 1451, comme l'attestent plusieurs documens genevois.

Nous lisons en effet dans une feuille dont il sera parlé ci-après: *Anno Domini m° cccclj et die septima Januarii decessit D. Amedeus legatus Sabaudie, cujus anima requiescat in pace. Amen.*

Voilà pour le jour. Voici maintenant la mention du lieu. On lit dans un registre de copie des franchises genevoises: *Anno Domini m. cccc. et lj. et die septima Januarii Papa Felix decessit Gebennis.*

Cette mention montre que, pour une bonne partie de la population, Amédée VIII était toujours le Pape Félix, malgré son abdication.

Terminons cet article par la citation textuelle du riche et solennel anniversaire qu'Amédée, qui s'était réservé l'administration directe de l'épiscopat genevois, fonda dans la cathédrale de ce diocèse: il est fixé régulièrement et exactement au jour de son décès.

Anno Domini m. cccc. lj.° vij.° ydus Januarii, obiit Clementissimus in Christo pater et celeberrimus Dominus, Dominus Amedeus de Sabaudia, Episcopus Sabinensis, in nonnullis Italie, Germanie, Galliarumque partibus Sancte Romane Ecclesie Cardinalis Legatus de latere, pro cujus anniuersario more prelatorum singulis annis vij.° ydus Januarii in hac insigni ecclesia Gebenn. solemniter celebrando, illustrissimus Princeps et excellentissimus Dominus, D. Ludouicus Dux Sabaudie eius filius dedit et realiter expediuit venerabili Capitulo ipsius ecclesie Gebenn. tercentum florenos auri parui ponderis monete Sabaudie presentialiter currentis, pro ix. libris annui census acquirendis, et deinde manualiter distribuendis inter Dominos canonicos presentes et continuam residentiam

facientes in horis sequentibus: et quod nichil percipiant quoquomodo (absentes). Videlicet in prima et verba xxx. solidi, in nonis et placebo xxx. solidi, in vesperis et vigiliis lx. solidi. Et in crastinum in missa defunctorum et processione fienda in medio chori dicte ecclesie lx. solidi. Successiue etiam dedit et realiter expediuit prefatus illustrissimus Princeps clericis chori dicte ecclesie l. florenos parui ponderis pro xxx. solidis annui census acquirendis et manualiter inter ipsos clericos horis sequentibus presentes et continuos distribuendis, et quod absentes nichil percipiant quouismodo, videlicet in nonis et placebo vj. solidi, in vesperis et vigiliis xij. solidi, et in crastinum in missa et processione fienda xij. solidi. Item ultra premissa dedit et realiter expediuit idem illustrissimus Dominus Dux alios l. florenos parui ponderis pro xxx. solidis censûs acquirendis et distribuendis ut sequitur, primo predictam magnam missam celebranti, qui canonicus esse debeat, ultra portionem sibi inter dominos canonicos debitam, ij. solidi. Item octo vicariis seu habilitatis pro viij. missis bassis per eorum quemlibet dicta die celebrandis, viij. solidi. Item in predictis vigiliis et in crastinum et in missa accendantur xiij. candele ante maius altare: pro quibus distribuantur operario dicte ecclesie xv. solidi. Et pulsentur omnes campane ecclesie, etiam maior, videlicet a prima anth. vigiliarum que est dirige, usque ad tertium responsorium, et a principio misse usque ad euuangelium inclusiue: pro qua quidem pulsatione distribuantur marticulariis dicte ecclesie v. solidi. – Anima eius cum beatis requiescat.

Cet anniversaire est le dernier qui ait été fondé dans la cathédrale genevoise par un Prince de la Maison de Savoie. Ceux même qui ont occupé le siége épiscopal genevois dès lors, n'ont laissé aucune fondation de ce genre. C'est donc à une autre source qu'il nous faut aller chercher les renseignemens qui vont suivre.

§ XIII.

LE DUC LOUIS.

Jaques Godefroy, l'un des plus célèbres jurisconsultes du dix-septième siècle, si connu par son savant commentaire du Code Théodosien, qui fut Professeur et Magistrat à Genève, avait rassemblé, sur l'histoire de cette ville des notes et des matériaux qui sont encore dans ses archives.

On y trouve, entre autres, une feuille détachée, portant n° 177, évidemment écrite dans la seconde moitié du quinzième siècle, à la colonne de droite intitulée *Natiuitas certorum Principum Sabaudie et Francie.* A la colonne de gauche sont mentionnés quelques décès. Je regarde ce document comme contemporain et comme tout-à-fait digne de foi, car dans ceux des renseignemens qu'il contient qui se retrouvent ailleurs, son exactitude est pleinement confirmée: il vient combler heureusement plusieurs lacunes dans la généalogie de la Maison de Savoie.

On y lit, quant au Duc Louis: *Anno Domini m.° cccclxv, et die Martis xxix. Januarii hora quincta de mane, decessit illustrissimus Dominus Ludouicus Dux Sabaudie Luduni, qui est sepultus in capella suprascripta.* « L'an 1465, et le mardi 29 janvier, à 5 heures du matin, est décédé à Lyon l'illustrissime Seigneur Louis Duc de Savoie: il est enseveli dans la chapelle susdite. » (Celle que sa femme avait créée dans l'église des Frères mineurs de Genève, mentionnée dans l'article précédent du manuscrit dont s'agit, à l'occasion de la Duchesse Anne, morte avant son mari), ainsi qu'on va le voir au paragraphe suivant.

§ XIV.

ANNE DE CHYPRE, DUCHESSE DE SAVOIE.

Notre document contient à ce sujet la mention suivante: *Anno Domini m.° cccclxij. et die xj. Nouembris, decessit illustrissima Domina Anna de Chipro duchissa Sabaudie Gebuis, que est sepulta in ecclesia Fratrum minorum in capella sua.* « L'an du Seigneur 1462 et le 11 de novembre, est décédée l'illustrissime Dame Anne de Chypre Duchesse de Savoie, à Genève: elle est enterrée dans l'église des Frères mineurs dans sa chapelle. »

Cette date, et celle du décès du Duc Louis, concordent pleinement avec celles déjà connues et publiées par Guichenon et les autres historiens: c'est une forte présomption en faveur de l'exactitude des autres dates que notre manuscrit va nous fournir. Nous allons passer maintenant aux Princes de la descendance du Duc Louis et d'Anne de Chypre, en commençant par leur fils aîné.

§ XV.

LE DUC AMÉDÉE IX.

La feuille que je désignerai maintenant sous le nom de manuscrit Godefroy, contient les deux dates précises de la naissance et de la mort de ce Prince.

Natus fuit Amedeus de Sabaudia, qui postea fuit Dux, m. cccc. xxxv. prima februarii inter primam et secundam post meridiem. « Amédée de Savoie, qui devint plus tard Duc, est né en 1435, le 1^er^ février, entre 1 et 2 heures après midi. »

Anno Domini m.° cccc. lxxiij, et die penultima Martii decessit illustrissimus D. Amedeus Dux Sabaudie Vercellis in Pedemontio, qui erat filius illustrissimi D. Ludovici Ducis Sabaudie, et pater D. Principis Pedemoncium supra proxime scripti. « L'an du Seigneur 1473, et le pénultième de mars (le 30) l'illustrissime Seigneur Amédée Duc de Savoie est décédé à Vercil en Piémont. Il était fils d'illustrissime Seigneur Louis Duc de Savoie, et père du Seigneur Prince de Piémont ci-devant mentionné. » (En effet, la mention nécrologique du fils, décédé avant le père, précède dans le manuscrit celle relative à la mort du Duc Amédée IX).

Ces dates suggèrent deux observations:

1° La première quant au jour de naissance: si je ne me trompe, on ne connaissait jusqu'ici que l'année, et non le jour de cette naissance.

2° La seconde quant au décès: le manuscrit Godefroy concorde pour le jour, 30 mars, avec les documens antérieurs: il donne l'année 1473 et non 1472, parcequ'il a été fait dans un pays où l'usage était de prendre l'année à Noël et non à Pâques: on sait que c'était celui du diocèse de Genève depuis 1305.

§ XVI.

YOLANT DE FRANCE, DUCHESSE DE SAVOIE.

Notre manuscrit donne comme suit la naissance de cette Princesse française, épouse d'Amédée IX, dont l'existence fut si agitée.

Yolant duchesse de Savoye m cccc xxx iiij ad xxj septembris inter sextam et septimam ante meridiem. « Yolant, Duchesse de Savoie, est née en 1434, le 21 septembre, entre 6 et 7 heures du matin. » – Yolant avait donc 4 mois et 10 jours de plus que son époux.

On voit que l'auteur de ce tableau généalogique attache de l'importance aux heures de naissance des Princes et Princesses qu'il mentionne.

§ XVII.

LOUIS DE SAVOIE, ROI DE CHYPRE.

Voici comment le manuscrit Godefroy parle de la naissance de ce second fils du Duc Louis et d'Anne de Chypre.

Natus Ludouicus Rex Chipri m cccc xxxvij, prima Aprilis hora xij meridiei minute xxx. « Louis, Roi de Chypre, est né en 1437, le 1er avril, à l'heure de midi et 30 minutes. »

Ici ce ne sont plus seulement les heures, ce sont les minutes auxquelles s'attache notre écrivain. A une époque à laquelle il y avait si peu d'exactitude, que l'on n'inscrivait pas les naissances, il est difficile de ne pas voir une idée superstitieuse dans de pareilles mentions.

Guichenon avait donné une date erronée à la naissance de ce Prince.

§ XVIII.

JANUS DE SAVOIE, COMTE DE GENEVOIS.

Continuons par la mention de la naissance du troisième fils du Duc Louis.

Natus Janus Comes Gebennesii mccccxl octaua nouembris hora xj de die in Gebnis. « Janus, Comte de Genevois, est né à Genève le 8 novembre 1440, à 11 heures du matin. »

§ XIX.

CHARLOTTE DE SAVOIE, REINE DE FRANCE.

Nata Carola regina Francie mccccxlj xj Nouembris hora decima de die. « Charlotte, Reine de France, est née le 11 novembre 1441, à 10 heures du matin. »

§ XX.

PHILIPPE II, DUC DE SAVOIE.

Le manuscrit Godefroy contient deux mentions relatives à ce Prince. La première est relative à sa naissance:

Natus Phillipus de Sabaudia mccccxliij. xxix Nouembris inter septimam et octauam in Gebnis. « Philippe de Savoie est né le 29 novembre 1443, entre 7 et 8 heures, à Genève. »

La manière dont cette mention est rédigée suffit pour prouver que le manuscrit en question est antérieur à 1496, époque de l'avènement de Philippe au trône ducal; car si cet évènement avait alors été accompli, l'écrivain n'aurait pas manqué de le faire, comme il l'a fait pour la Princesse Charlotte qu'il a décorée du titre de Reine de France, qu'elle acquit seulement par l'avènement de son mari Louis XI au trône français etc.

La seconde mention est relative à un grave évènement de la vie du Prince Philippe.

Anno Domini m.° cccc lxv et die xx Martii, Dominus Phillipus de Sabaudia, Dominus Breysie, venit ad presentiam Regis Francorum, qui detinuerat eum firmis carceribus duobus annis vel circa in castro de Loches.

§ XXI.

JEAN LOUIS DE SAVOIE, ÉVÊQUE DE GENÈVE.

Il est mentionné, en dehors de son ordre de naissance, dans le manuscrit Godefroy, en ces termes:

Johannes Ludovicus, Episcopus Gebennarum, natus fuit die xvj. februarii in Gebnis, in domo fratrum minorum anno m° cccc xlviij. « Jean Louis, Évêque de Genève, est né le 16 février, à Genève, dans le couvent des Frères mineurs, l'an 1448. »

Malgré cela, je suis disposé à admettre avec M. Cibrario, dans sa *Cronologia de' Principi di Savoia rettificata*, qu'il s'agit de l'année 1447. Que l'on compare effectivement cet article et celui qui va suivre, on se convaincra que, dans l'un ou dans l'autre, l'écrivain du document que j'analyse s'est trompé d'une unité, ou d'une barre suivant l'écriture du temps.

§ XXII.

MARIE DE SAVOIE, COMTESSE DE S. PAUL.

Le manuscrit de Godefroy la mentionne en ces mots: *Nata fuit Maria m cccc xlviij xx Marcii.* « Marie est née le 20 mars 1448. »

§ XXIII.

BONNE DE SAVOIE, DUCHESSE DE MILAN.

Natiuitas Bone m cccc xlix de mense Augusti in Auilliana. « Naissance de Bonne, au mois d'août 1449, à Avigliana. »

§ XXIV.

JAQUES DE SAVOIE, COMTE DE ROMONT.

Natiuitas Jacobi Domini Rotondimontis m cccc l xij Nouembris hora octaua. « Naissance de Jaques, Seigneur de Romont, en 1450, le 12 novembre, à 8 heures. »

Ici finit la série des enfans du Duc Louis et de la Duchesse Anne de Chypre d'après le manuscrit de Godefroy. – Nous allons passer aux enfans du Duc Amédée IX.

§ XXV.

UN FILS, PREMIER-NÉ D'AMÉDÉE IX.

J'aborde ici un tout autre document, mais bien original, contemporain et authentique, c'est le compte des dépenses et recettes de Barthelemi Vincent, receveur général des revenus de la communauté de Genève, pour l'année écoulée du 4 février 1454 au 9 février 1455: il est déposé aux archives de Genève.

On y lit ce qui suit parmi les dépenses:

Librauit honorabili viro Johanni de Liga appothecario burgensi

Gebenn. ix. florenos iv. solidos vj. denarios in quibus communitas eidem tenebatur pro xij. facibus ponderantibus xxxij. libras per ipsum traditis ad rationem iij. solidorum vj. den. pro qualibet libra, nomine dicte communitatis portatis ad sepulturam illustris nati Illustrissimi domini Principis Pedemoncium nuper deffuncti, et in ecclesia Fratrum minorum hujus ciuitatis Gebenn. sepulti, prout constat mandato dictorum Sindicorum, dato Gebenn. in domo communi et Concilio ordinario ibidem celebrato die Veneris quarta mensis Januarii Anno domini milesimo quatercentesimo quinquagesimo tercio...

Sans analyser minutieusement ici cet article de compte, on voit qu'il en ressort que, aussitôt avant le 4 janvier 1453, on avait enseveli dans l'église des Frères mineurs de Genève un fils, mort probablement presque aussitôt après sa naissance puisqu'on n'indique pas son nom de baptême, né au Prince de Piémont qui fut plus tard Amédée IX. Il s'était marié en 1452: c'était donc son enfant premier-né. On n'en avait fait jusqu'ici aucune mention.

§ XXVI.

ANNE DE SAVOIE, REINE DE NAPLES.

Revenons maintenant au manuscrit Godefroy. On y lit: *Natiuitas Aue de Sabaudia m cccc lv prima Junii inter septimam et octauam Chamberiaci.* « Naissance de Anne de Savoie, le 1er juin 1455 entre 7 et 8 heures, à Chambéry. »

§ XXVII.

CHARLES, PRINCE DE PIÉMONT.

Le manuscrit Godefroy le mentionne à deux reprises pour sa naissance, et pour sa mort.

Natiuitas Caroli de Sabaudia m° cccc lvj. et die mercurii xv septembris inter secundam et terciam post mediam noctem in Auernia. « Naissance de Charles de Savoie, 1456, le mercredi 15 septembre, entre 2 et 3 heures après minuit, en Auvergne. »

Anno Domini m° cccc lxxj decessit illustrissimus Dominus Princeps

Pedemoncium Orliens veniendo de Francia in auxillium Domini Amedei Ducis Sabaudie ejus patris et Domine Yolande duchise Sabaudie ejus matris, qui erant assiegiati in castro de Mommelliano prope Chamberiacum per illustrem Dñm. Phillipum de Sabaudia Dominum Breysie.

« L'an 1471 est décédé l'illustrissime Seigneur Prince de Piémont à Orléans, venant de France au secours du Seigneur Amédée Duc de Savoie son père et de Dame Yolande Duchesse de Savoie sa mère, qui étaient assiégés dans le château de Monmélian près Chambéry par l'illustre Seigneur Philippe de Savoie Seigneur de Bresse. »

Le jeune Prince qui trouva la mort en accourant ainsi de loin au secours de ses parens, n'avait donc que quinze ans!

Je termine ici l'analyse du manuscrit Godefroy. Je n'ai pas voulu m'arrêter à relever toutes les dates nouvelles que nous donne cette précieuse feuille, et les lacunes qu'elle vient combler dans la généalogie de la Maison de Savoie. Mais ceux qui prendront la peine de comparer les indications qu'elle fournit avec les généalogies antérieures, se convaincront que, sur presque tous les points, elle ajoute, par des détails inédits et positifs, à ce que l'on savait jusqu'à présent.

Cette heureuse circonstance m'a encouragé à réunir en un seul travail tout ce que les archives et bibliothèques de Genève pouvaient fournir de renseignemens pour la généalogie historique de la Maison souveraine de Savoie du douzième au quinzième siècle.

Genève, 9 octobre 1855.

OSSERVAZIONI

INTORNO

ALL'INNO OMERICO AD APOLLINE DELIO

del Professore

DOMENICO CAPELLINA

Approvate nell'adunanza del 5 giugno 1856.

Molto ragionarono i critici intorno agl'inni, che si sogliono attribuire ad Omero, perchè sono un portato di quella medesima fantasia de' Gioni dell'Asia Minore o dell'isole a lei vicine, onde uscirono l'Iliade e l'Odissea. Altri coll'esame della lingua, degl'iati, dell'uso del digamma cercarono di scoprire quale di loro fosse stato innanzi, quale posteriormente composto, altri investigando il modo in cui furono conservati e le abitudini della antica recitazione, li notomizzarono parte per parte segnando le interpolazioni, e i raddoppiati proemii, e la confusione di due inni in un solo, quando trattavasi del medesimo Iddio, e tutti quegli altri inconvenienti, cui dovea necessariamente dar luogo il consegnar che si fece quest'inni alla scrittura forse molti secoli dopo che si erano incominciati a cantare qua e là nelle feste dei Greci. Pochi furono coloro, che li prendessero a considerare per quella parte che riguarda la storia della religione de'Greci, parte importantissima sovra di ogni altra, come quella che s'appartiene allo studio dell'uomo morale, e per la cognizione che oggidì si ha maggiore del mondo asiatico, padre e primo educatore del greco, può dar campo ad utili confronti e a quelle generali conclusioni, di cui tanto si giovano le filosofiche discipline. Imperocchè egli è certo, che da essi, dai due poemi d'Omero, che hanno con loro, come si disse,

origine fraterna, e dalle opere dei lirici, che furono figli d'Omero e ne continuarono la tradizione, si può trarre intiera l'immagine di un periodo religioso, che incominciato nell'età eroica e specialmente dopo che la razza ellenica ebbe sulla pelasgica il sopravvento, giunge sino ai tempi vicini alle guerre persiane. È questo il periodo, in cui la storia delle Divinità della Grecia piglia il carattere di leggenda epica, e la scena delle azioni divine dal cielo si trasporta per dir così sulla terra, e il poeta non volge la sua preghiera agli Dei, nè li descrive o li rappresenta coi loro divini attributi e colle qualità loro; ma ce li mostra in azione e ne narra le imprese encomiandole, perchè crede che a loro, come alla stirpe guerriera che lo circonda ed ode i suoi canti, piacciano le lodi, che si tributano ai grandi fatti, ai benefattori dell'umanità, ai distruggitori dei mostri e de' malvagi: onde impropriamente fu detta poesia lirica de' Gioni quella, cui tali canti appartengono, non avendo essa nulla di quel soggettivo, che è proprio della poesia lirica, e accostandosi all'epopea per l'indole della materia, la condotta del componimento e la qualità stessa del verso. E quest'asserzione per essere confortata di prove non richiede già un esame di tutti quanti gl'inni e dei due poemi d'Omero; chè il sistema poetico e religioso è in tutti lo stesso, e, se qua e là appariscono lievi tracce d'una dottrina religiosa d'altra natura, non bastano queste a diminuire la persuasione che da mille altri luoghi è prodotta nell'animo dello studioso. Qualunque tra quegl'inni si voglia scegliere, ove se ne tolgano alcuni brevi che la scuola orfica rivendica a ragione come opera sua, sarà sempre tale da porgere il mezzo di giudicare dell'indole di tutta la dottrina religiosa dell'età eroica; il perchè io m'appiglio a quello, che è dedicato ad Apolline, anzi a quella porzione di esso, che riguarda particolarmente Apolline Delio e, per giudizio degli eruditi moderni e per quello ancor più sicuro di Tucidide (1), è un inno compiuto e tale che separatamente e per se stesso recitavasi dagli antichissimi cantori.

Educati alla mitologia della scuola Alessandrina e dei Romani appena udiamo il nome di Apolline noi siamo soliti di accoppiarvi l'idea del Sole e fare dell'uno e dell'altro una medesima divinità. Ma questa mitologia non è quella di Omero, i suoi numi non rappresentano le parti, le forze, i fenomeni della natura; ma hanno una personalità che colle dovute

(1) Lib. III. C. 104.

proporzioni li fa simili agli uomini, e se talvolta si trovano a banchettare o a contendere fra loro sull'Olimpo, manifestano pur sempre la potenza e l'operosità loro sulla terra o sul mare, benevoli agli uomini od avversi. Il poeta ci rappresenta fin da principio Apolline in mezzo agli Dei dell'Olimpo, che tremano all'avvicinarsi di lui e si alzano dai seggi loro, mentre Latona lo spoglia dell'arco e della faretra, e lo stesso Giove mesce il nettare al suo valente figliuolo. Quindi ci dipinge Latona, che dopo aver errato per molte terre e per molte isole, ed essere stata da tutte respinta, rende pietosa a sè la povera e deserta isola di Delo con lunghe preghiere ed ampie promesse, e, trovato un ricovero in quella, partorisce il dio, che gustato appena il nettare pòrtogli da Temide, rompe le fasce e chiede un arco, una cetra e un oracolo, in cui annunziare ai mortali il volere di Giove. Apolline era il dio principale della razza dorica, razza guerriera e sacerdotale ad un tempo, terribile ai nemici, e innamorata della musica e della poesia; e questa aveva fatto a somiglianza di sè il suo dio, il culto del quale aveva recato dalle radici dell'Olimpo per quasi tutta la Grecia fondando qua e là oracoli e santuari, vincendo le difficoltà che gli opponevano i seguaci dei culti anteriori, e perpetuando la memoria di questa diffusione del culto di lui e dei vinti avversarii nel racconto dei viaggi e delle terribili punizioni del dio, che formano gran parte della sua leggenda. Di egual natura sono le cose, che si narrano nella seconda parte dell'inno o, per dir meglio, nell'inno che vien dopo in onore di Apolline Delfico, nè vi ha in esso indizio alcuno, per cui possa credersi, che questo dio abbia una qualche relazione col Sole. Infatti noi lo vediamo nuovamente errare per molti paesi in cerca di un luogo, ove fondare il suo oracolo, e cominciare a gittarne le fondamenta appo Tilfussa, fontana della Beozia; poi abbandonarla persuaso dalle fraudolenti parole della ninfa di quella fonte, specie di divinità etonia, e volgersi a Crissa ed alzar ivi il suo santuario alle radici del monte Parnaso, dopo aver ucciso a colpi di saette il Tifone; e accortosi della frode di Tilfussa punirla e chiamar sacerdoti al suo tempio alcuni mercatanti cretesi, che navigavano verso Pilo, e che egli, pigliata sembianza di delfino, condusse nel porto di Crissa. Nè cosa alcuna che accenni all'opinione che Apolline e il Sole fossero un medesimo iddio noi troviamo in tutti quei luoghi dei due poemi d'Omero, in cui è fatta menzione di quella divinità. Come dio terribile e potente e punitore dell'umana superbia si presenta a noi ne' primi versi dell'Iliade, quando lancia le sue

saette contro dei Greci in punizione della superbia d'Agamennone, che non volle restituire la figliuola ad uno de' suoi sacerdoti. — Venne dalle cime di Olimpo col cuore irato, avendo sugli omeri l'arco e la faretra ben chiusa all'intorno, e mentre si moveva i dardi risuonavano sulle spalle dell'irato, ed egli veniva simile a notte. Si posò poi di faccia alle navi e mandò un dardo, e un forte clangore produsse l'arco d'argento (2) —. Egli si compiace de' peani, che i giovanetti greci gl' intuonano (3), rallegra i banchetti degli dei col suono della sua cetra accompagnando i canti alternati delle Muse (4), favorisce o persegue i guerrieri dell'uno e dell'altro esercito, propizio maggiormente alla famiglia reale di Troia, in cui ereditario era il suo culto, venuto dall'antica sede di Creta. Nè si tacciono le tradizioni intorno alla dimora di lui in casa d'Admeto, luogo dove forse egli ebbe le prime adorazioni (5), all'opera da lui posta insiem con Nettuno nell'innalzare le mura di Troia (6), e all'uccisione de' figliuoli di Niobe (7) e degli Aloidi, Eto ed Efialte, giganti, e simboli forse di gente robusta, che tenace delle antiche tradizioni religiose contrastò al nuovo culto introdotto dai Dori e fu da loro disfatta (8). E perchè ogni dubitazione sia tolta ricordisi quel luogo dell'Odissea (9), ove il Sole ed Apolline si trovano insieme ricordati da Demodoco, quand'egli racconta l'adulterio di Venere e di Marte. Li vede il Sole, e va a darne notizia a Vulcano, che li piglia alla rete, e chiama gli dei a mirar l'onta loro. — Si radunano gli dei nella casa dalle fondamenta di rame: venne lo scuotitore della terra Nettuno, venne il molto utile Mercurio, venne il re lungi saettante Apolline — (10).

Esiodo parla anch'esso della nascita di Apolline (11) e dei figliuoli di lui (12), della sua dimora presso di Admeto (13) e della edificazione delle

---

(2) Iliade I. 43-49.
(3) I. 474.
(4) I. 603.
(5) II. 766.
(6) XXI. 441.
(7) XXIV. 602.
(8) Odissea XI. 305.
(9) VIII. 266.....
(10) 321.
(11) Teogonia 918.
(12) Framm. 54. 71. 87.
(13) Framm. 81.

mura troiane (14), di Ciclopi uccisi e di guerrieri da lui aiutati (15), e ce lo mostra sullo scudo di Ercole rappresentato insieme cogli altri dei e colle Muse (16). — Entro vi era il sacro coro degl'immortali, ed in mezzo citarizzava soavemente il figliuolo di Giove e di Latona con una lira d'oro. Eravi il santo Olimpo, dimora degli Dei, e in quello una piazza coronata d'infinita dovizia nella gara degl'immortali, e incominciavano il canto le muse Pieridi, simili a chi canta con acuta voce —.

Nè altro è il concetto che ci formiamo di questa divinità nel leggere gli antichi poeti lirici ed elegiaci. Infatti io lo trovo in Archiloco e in Ipponatte invocato come punitore e perditore de' malvagi, e dal perderli appunto o distruggerli ch'ei fa, veggo derivato il suo nome (17). Tirteo me lo mostra rivelator dei destini e consigliatore agli Spartani della costituzione data alla repubblica loro. — Avendo udito Febo, portarono da Delfo nella patria loro gli oracoli del Dio e le solenni parole: che a capo del consiglio fossero i re dai Numi onorati, cui data è in cura la leggiadra città di Sparta e i vecchi di antica età; quindi uomini del popolo secondando le giuste leggi ben ragionassero ed in ogni loro operazione cercassero la giustizia, nè cosa alcuna tentassero a danno di questa città, e la moltitudine del popolo avrebbe per sua seguace la vittoria e la potenza. Così Febo intorno a tali cose manifestò alla città il voler suo (18) —. Della virtù profetica di lui parla anche Solone nelle sue *Ammonizioni a se stesso*, e della protezione ch'egli concede agl'indovini affinchè possano rivelare agli uomini i mali ancora lontani, e far sì che si premuniscano contro di quelli (19), e in Teognide che più volte l'invoca (20) ci non appare altrimente che come protettore de' poeti, e difensore delle città ch'egli ha cinte di mura. Se nei frammenti di Terpandro e di Alemano io lo incontro per avventura nominato, non l'accompagna altra indicazione che quella di lungi saettante o di figliuolo di Latona (21). Saffo l'adornava ne'suoi canti, ora perduti, di chioma d'oro

(14) Framm. 48.
(15) Framm. 33. III.
(16) Scudo d'Erc. 202.
(17) Bergk pöetae lyrici graeci — Archilochus framm. 26. Hipponax. 30.
(18) Ibid. Tyrtaeus framm. 4.
(19) Ibid. Solon. 13. *v.* 53...
(20) Ibid. Theognis *v.* 1. 5. 773. 1119.
(21) Ibid. Terpander framm. 2. Alcman 16.

e di lira, e lo faceva salire sull'Elicona portato sul dorso de' cigni e danzare in compagnia delle Muse e delle Grazie (22). Narrava Alceo, al dire di Imerio, in uno di quegl'inni, ch'erano cantati dalle processioni che andavano con gran devozione ogni anno ai santuarii d'Apolline, che quando quel Dio fu nato, — Giove adornatolo di una mitra e d'una lira d'oro, e datogli inoltre un cocchio da guidare, cui traevano i cigni, lo mandò a Delfo e alle sorgenti di Castalia affinchè ivi profetasse ai Greci quanto era giusto ed onesto, e che egli salito sul carro spinse i cigni a volare tra gl'Iperborei. I Delfi adunque, come il seppero, componendo un peana e una musica, e locando intorno al tripode cori di giovanetti, invitarono il Dio a tornarsene dal paese degl'Iperborei: ed egli stato ivi un anno intiero a dar oracoli, poichè tempo gli parve che i tripodi di Delfo parlassero anch'essi, comandò nuovamente ai cigni di volar indietro dagli Iperborei. Era l'estate, e proprio la metà dell'estate il tempo, in cui Alceo fa venir Apolline dal paese degl'Iperborei; onde essendo tale splendor di stagione e tornandosene Apolline, anche la lira del poeta di quel Dio favellando mostra un non so che di estivo e di molle. A lui volgono i loro canti gli usignuoli, com'è conveniente che cantino gli uccelli nei versi d'Alceo, cantano anche le rondini e le cicale, non per ricordare la sorte che loro toccò quand'eran uomini, ma in ogni melodia risuonando come al Dio piace. Anche la fontana di Castalia scorre in quei versi con acque d'argento e il Cefiso levasi alto con onde purpuree, imitando l'Enipeo di Omero; imperocchè Alceo, del pari che Omero, fa sì che anche l'acqua accorgere si possa dell'avvicinarsi dei Numi (23) —. Pausania cita un luogo di Stesicoro, in cui è rammentata la protezione concessa da Apolline alla famiglia reale di Troia, narrandosi, com'egli pietoso de' mali di Ecuba con sè nella Licia la trasportasse (24), e ne' frammenti di Simonide non vedo ricordata altra dote di Apolline che quella di arciero potentissimo, nè altra impresa che quella dell'ucciso Pitone (25). Più numerosi sono i luoghi di Pindaro, in cui si parla di Apolline, ma non v'ha cosa in essi, che paia alludere al culto del Sole. Egli rapisce Cirene e la porta con sè nella Libia, mitica storia della colonia ivi fondata dagli adoratori di

(22) Sappho 147. Himerius orat. XIII. 7.
(23) Ibid. Alcaeus 2. Himer. orat. XIV. 10
(24) Ibid. Stesichorus framm. 19.
(25) Ibid. Simonides 26-27.

Apolline, e dopo aver consultato l'oracolo del Dio (26), si compiace dei sacrifizii degl'Iperborei, che gli offrono ecatombe di somarelli, e gode e ride nel vederne i salti ed i giuochi (27), guida il coro delle Muse, uccide il Pitone ed è adorato in Delo, umbilico, o punto centrale, della terra, come ben lo mostrarono le due aquile, che, mandate da Giove l'una dalla parte d'oriente, l'altra da quella d'occidente, vennero quivi a incontrarsi (28), la qual isola era salutata con religiose parole nel *Prosodio* da lui scritto per la sacra processione, che recavasi a Delo: — Salve, o dagli Dei fondata soave stanza ai figli di Latona dalle lucenti chiome, figliuola del mare, immobile prodigio dell'ampia terra, cui gli uomini chiamano Delo e gli Dei nell'Olimpo astro lungi splendente dell'oscura terra; .... poichè prima ell'era qua e là portata dai flutti e dal soffiar di ogni vento, ma, quando la figlia di Ceo travagliata dai dolori del parto a lei venne, allora sorsero dalle radici della terra quattro colonne diritte e basate sull'adamante, e sui loro capitelli sostennero l'isola petrosa. Ivi partorendo ella mirò la beata sua prole — (29).

In tutti questi poeti poi il Sole è accennato come divinità secondaria, come uno dei Titani, cui furono tolti da Giove gli antichi onori, e imposti duri e continui travagli: onde nol vediam mai pigliar parte ai conviti degli Dei, nè com'essi intromettersi nelle cose degli uomini e giovarli o perseguirli col suo divino potere. In Omero è chiamato re, splendido, infaticabile, che tutto vede, che tutto ascolta, spiatore (30) e rivelatore a Vulcano dell'adulterio della bellissima sua moglie (31) e a Cerere della figliuola rapita per opera di Plutone (32). Mimnermo compiange i continui travagli, cui egli è condannato. — Al Sole toccò in sorte una quotidiana fatica, nè i suoi cavalli ed egli hanno mai posa da quel punto che l'aurora dalle rosee dita abbandonando l'oceano sale pel cielo: imperocchè un leggiadro concavo letto, fatto per man di Vulcano tutto d'oro prezioso, con ali sotto, il porta pei flutti dormente sulla superficie dell'acque rapidamente dal paese delle Esperidi alla terra degli

(26) Pythia IX. v. 16. Heyne. v. 9. Bergk.
(27) Pythia X. v. 51. H. v. 52. B.
(28) Framm. 30-34 B.
(29) Framm. 64. 65. B.
(30) Θεῶν σκοπὸν ἠδὲ καὶ ἀνδρῶν. Hymn. in Cer. v. 62.
(31) Odissea luogo cit.
(32) Hymn. in Cer. v. 74....

Etiopi, ove l'aspettano il veloce suo carro e i cavalli finchè venga la figlia del mattino, l'Aurora. Quindi il figliuolo d'Iperione monta nuovamente sul suo carro (33). Questo letto del Sole in altri poeti piglia forma di tazza, come appare da un brano della Gerioneide di Stesicoro: — Il Sole iperionide entrò nella sua tazza d'oro, nella quale varcando l'oceano egli se ne va nel profondo della caliginosa notte alla madre, alla legittima sua sposa ed ai cari figli (34) —; simile al quale è un frammento delle Eliadi di Eschilo (35): — Cotale tazza Pisandro e gli altri scrittori di Eracleidi narravano aver il Sole conceduta ad Ercole per passare ad Eritia isola dell'Iberia, e le loro tradizioni furono raccolte da Ferecide, grande ricercatore di antichi miti, nel terzo delle sue storie: — Ercole drizzò il suo arco come saettare il volesse e il Sole gli comandò di cessare, ed egli temendo cessò. In grazia di questo il Sole gli diede la sua tazza d'oro, la quale il porta insieme colle sue cavalle, quand'egli tramonta, per l'oceano la notte in fino all'aurora, quando il Sole torna a spuntare. Ercole quindi entro di quella tazza s'avviò ad Eritia, e quand'egli era nel mare, l'Oceano volendo metterlo alla prova, faceva balzar sui flutti la tazza, a lui mostrandosi con sensibile figura. Ma quegli il voleva saettare, e l'Oceano di lui temendo gli disse che restasse (36). —

Così da Omero noi siam venuti sino al tempo delle guerre Persiane e ai grandi tragici Ateniesi senza trovare alcun cenno del culto comune del Sole e di Apolline, e della confusione di queste due divinità in un solo e medesimo Iddio. Ma coi tragici appunto questa confusione comincia ad apparire e si fa comune agli scrittori della scuola Alessandrina e ai loro seguaci. Infatti io vedo in Eschilo la barca, su cui Caronte tragitta le anime, qualificata come ignota ad Apolline ed al Sole (37), e in Sofocle dato al Sole il nome di primo fra gli Dei (38); nel che egli è pure seguitato dal comico poeta Menandro (39). In un frammento poi che si attribuisce ad Eratostene, ed in cui si allude alle Bassaridi, tragedia di Eschilo ora perduta, è detto che Orfeo fu primo a dire che Apolline

(33) Mimnermus fragm. 12. B. Ateneo XI 469. 470.
(34) Stesichorus 8. Ateneo ibid.
(35) Aeschylus fragm. 229. Ahrens. Ateneo ibid.
(36) Pherecides lib. III. fragm. 334. Cer. et Theod. Muller. Ateneo ibid.
(37) Sette a Tebe v. 859.
(38) Edip. re v. 660.
(39) Fragm. incerta n. 136.

fosse una medesima cosa col Sole e il più grande fra i Numi, e che l'adorava levandosi la notte e salendo sul monte Pangeo ad aspettare ch'ei sorgesse. Onde Bacco, al quale egli sdegnava di prestar culto alcuno, irritato mandò le Bassaridi o Baccanti contro di lui, le quali il trucidarono e qua e là ne sparsero le membra. Ma le raccolsero le Muse e in Libetra gli diedero sepoltura (40). Ora Orfeo e l'orficismo possono essere considerati sotto due diversi aspetti, o come un'introduzione nuova nella Grecia di dottrine orientali, o come un risorgimento delle antiche tradizioni religiose de' popoli primitivi di Grecia, soffocate dalle nuove forme che vi portò la razza Ellenica, quando si stese per essa. E lasciando anche da parte questo fatto, di cui fa cenno il frammento attribuito ad Eratostene, si può chiedere se l'idea di Apolline, quale si trova in Omero, e nei seguenti poeti fino ad Eschilo, sia primitiva, e non sia stata invece preceduta da un'altra d'indole diversa. Le tradizioni intorno al culto della Terra e di Temide, alle lotte de' nuovi Numi coi Titani, il pianger che si faceva in questo e in quel luogo della Grecia e dell'Asia Minore la morte della Natura sotto simboli diversi, sono tutti indizii d'un culto naturalistico, che poi venne distrutto da culti successivi. Nè poteva essere altrimente poichè in fondo a quasi tutte le antiche religioni politeistiche noi troviamo il culto della natura e delle forze di lei. L'uomo circondato dalle grandiose e terribili manifestazioni di tali forze, quand'esse per la gioventù del mondo erano in una continua agitazione, vedeva intorno a sè fenomeni, che lo colpivano e sui quali egli sentiva di non avere alcuna potenza. Altri di loro lo atterrivano, altri gli riuscivano benefici o lo rapivano nella dolce contemplazione d'una sovrumana bellezza: quindi e il timore e la gratitudine e l'amore e il sentimento di esser loro soggetto, senza che vi potesse fare contrasto alcuno, lo avvezzarono a considerarli come Numi e a prestar loro ossequio ed adorazione. Vennero quindi le rappresentazioni simboliche, il cui senso arcano era il sacro deposito delle caste sacerdotali, e collo spegnersi di questa o col declinare della loro dottrina, si andò quel senso arcano smarrendo e diede luogo o al feticismo o all'antropomorfismo, che l'uno e l'altro tendevano ad abbuiare le antiche sembianze della religione della natura. E fra quei popoli dove l'eroismo de' guerrieri venne acquistando il sopravvento sopra la dottrina de' sacerdoti, e il poter regio si andò rinforzando, a poco

(40) Aesch. fragm. 16. Ahrens.

a poco l'Olimpo si ordinò a foggia delle monarchie terrene, e la leggenda eroica sottentrò all'idea naturalistica primitiva e giunse quasi a cancellarne ogni traccia. Così nell'India, la cui storia religiosa può servir di norma per giudicare di tutto l'antico politeismo, noi vediamo la leggenda eroica degli Dei contenuta nel loro ciclo epico, preceduta dal naturalismo dei Vedi, in cui son fatti soggetto di adorazione le potenze celesti e le nascoste forze della terra, e specialmente i fenomeni della luce e i diversi loro momenti, e cielo e terra, progenitori degli esseri tutti, e le acque, ed agni, o il fuoco, più d'ogni altra divinità celebrato in quegli antichissimi canti. Il dire quando succedesse in Grecia questo passaggio da una ad un'altra forma religiosa, l'affermare, che per tutte le popolazioni greche e specialmente per le ultime venute ciò succedesse in Grecia e non fuori, è cosa per noi impossibile; ma non si può negare che tali forme abbiano avuto ciascuna il luogo loro. Basta volgere uno sguardo alla Teogonia di Esiodo per iscorgere ancor quasi viva la lotta fra gli Dei antichi ed i nuovi, e ne' poemi d'Omero anche sotto lo spesso velo che la copre non è arduo il ravvisare la trasformazione delle favole naturalistiche nell'epica leggenda.

Ora la favola di Apolline è essa una di quelle, che andarono soggette ad una tale trasformazione? Ottofredo Müller, il quale vorrebbe attribuire il naturalismo religioso agli sforzi dei filosofi della scuola Ionica, dopo aver ragionato a lungo del culto di Apolline in quel suo libro che scrisse intorno alla storia e alle antichità della razza Dorica, nega recisamente che ciò sia avvenuto. E a confortare questa sua negazione osserva come il culto del Sole nell'acropoli di Corinto e a Rodi e ad Atene non avesse alcuna comunanza con quello di Apolline e come l'idea di questa comunanza abbia potuto diventar popolare da poi che i sacerdoti egiziani confusero Apolline con Oro per l'ucciso Pitone, e i Magi scorsero una qualche relazione tra il culto d'Apolline e quello che da loro tributavasi al fuoco. Ma il primo di tali argomenti non ha valore alcuno, poichè egli è noto abbastanza come nella mitologia greca per le diverse origini dei miti spesso una medesima divinità possa essere adorata sotto forme diverse, ed io medesimo ho già superiormente accennato alla divinità del Sole conservatasi anche ai tempi della leggenda epica, come avanzo dell'antica religione titanica o naturalistica, e molti altri Dei lunari e solari furono dai dotti scoperti in quell'intricato viluppo delle favole greche. L'idea poi della comune ed unica divinità di Apolline e del Sole,

non che essere stata introdotta dalla scuola Ionica, dagli Egiziani e dai Persiani, è immedesimata colla storia stessa e coll'antichissima genealogia, che gli dà per genitori *Latona*, o la notte, che cela ogni cosa agli occhi degli uomini, e *Giove*, o il cielo, e a Latona assegna per madre *Febe*, o la luna e per sorella *Asteria*, o gli astri e il cielo stellato (41), e il fa nascere in *Delo*, per indicare il manifestarsi che fanno le cose all'apparire di lui, e gli dà nome di *Licio*, che deriva dall'antico nome della luce appo i Greci (42), e gli consacra il lupo, che era in antico il simbolo della medesima luce. E pur dalla veste, onde l'ha circondato l'epica leggenda, trapelano gli antichi attributi del Dio della luce. Apolline, il terribile arciero della leggenda, è rappresentato come scopritore e punitore delle umane colpe. Ora questo concetto di Dei osservatori delle opere umane e vendicatori dell'umana giustizia va quasi sempre connesso nell'antica Mitologia con quello delle divinità solari e lunari. Egli è perciò che Artemide o Diana è anche chiamata Οὖπις e Νέμεσις, e a Licurgo è data per isposa Euridice, e nei Canti Ciprii da Apolline e da Filodice si fa nascere Febe ed Ilaira (43), e da Nemesi e Giove nasce Elena, in cui alcuni ravvisano *Selene* o la luna, come in Ifianassa o Ifigenia sorella di Crisotemi e Laodice (44) ravvisavano alcuni fra i Greci ed Ecate e Diana (45). Apolline ci è pur mostrato come citarista e musageta, o guidator delle Muse; poichè alla luce vanno compagne e la gioia e l'armonia e la vita, ed il sole è simbolo agli uomini di cognizione e di verità; onde vien pure l'altro concetto di Apolline profeta o rivelator del futuro. E quando Omero mi racconta che Apolline al veder ferito a morte Ettore da lui si ritira, io vedo in esso l'immagine del sole o della luce, che i morenti abbandona, e nella favola del giovanetto Giacinto da lui ucciso, vedo una somiglianza colle accennate favole di Adone, d'Ila, di Lino e d'altri, che erano simboli della natura dall'ardore del sole estivo travagliata ed oppressa. Così pure io scorgo un'immagine della raggiante bellezza del Sole nella chioma d'oro, di cui Saffo adorna Apolline, ne' bianchi cigni, dai quali Alceo fa tirare il carro di lui, e nella mitra d'oro, di cui ne circonda la testa.

---

(41) Esiodo Teogonia.

(42) Λύκος è antica parola, con cui i Greci indicavano la luce del Sole o il Sole stesso

(43) Canti ciprii framm. 7. — Pausania III. 16. 1.

(44) Iliado IX. 145.

(45) Pausania I. 43. 1. II. 45. 1.

Onde mi sembra che si possa conchiudere, la favola di Apolline, quale si trova in Omero e ne' poeti a lui posteriori fino ad Eschilo, non essere punto una favola nuova, ma una trasformazione dall'antica favola naturalistica intorno al Sole in leggenda. Che se ad alcuno parrà, che le traccie dell'antica favola naturalistica siano in essa un po' scarse e tali da non isbandire affatto dalla mente ogni dubbio, avverta com'elle sono pur sempre maggiori, che quelle, che si ravvisano nelle storie di Bacco, di Ercole e di Pane, della cui origine naturalistica non si può dubitare. Bacco, personificazione della potenza creatrice della natura, recata in Grecia in antichissimi tempi o direttamente dall'Asia occidentale o per intermezzo dell'Egitto, Ercole, divinità solare venuta dalla Fenicia, si convertono nella leggenda in due eroi Tebani, e la terra è fatta teatro delle gloriose azioni loro, e Pane, il gran Tutto, l'anima dell'universa natura, è mutato in un Dio secondario e campestre. Così per mancanza di un sacerdozio, che conservi le antiche tradizioni, e per i mutamenti, che il primato della gente ellenica su tutte le altre di Grecia introduce ne' costumi e nella civiltà, la leggenda va gradatamente velando le forme del culto antico e nascondendole agli occhi dei volgari dapprima, e poi anche dei poeti e dei dotti, e il sublime delle tremende immaginazioni primitive cede il suo luogo al senso del bello e del verisimile, per cui gli Dei caduti dall'altezza loro si riducono quasi ad umane forme, finchè non venga la filosofia e una dottrina religiosa più ideale a rialzarli di nuovo, e a purgar le leggende da ogni concetto ingiurioso alla bontà e alla giustizia loro per opera di Pindaro e di Sofocle e di altri poeti profondamente religiosi e morali.

INNO AD APOLLINE DELIO

Rammenterò, nè fia giammai che Apollo
lo scordi, lungi saettante. I Numi
Tremano allor che alla magion di Giove
Il passo ei volge e da' lor seggi assurgono
All'appressar del Dio, quand'egli tende
Il fulgid'arco. — Presso il fulminante
Giove Latona sol rimase, il nervo
Lentò, chiuse la fàretra e, dai forti
Omeri di sua man l'arco levando,
Del genitor l'appese a la colonna
A un aureo chiodo; e lo guidava al trono
Ov'ei s'assise. In aurea coppa il padre
Nettare gli porgea, facendo invito
Al diletto figliuol; quindi a' lor seggi
Gli altri dei fan ritorno e la beata
Latona esulta, che diè in luce un figlio
D'invitta possa e portator dell'arco.
Te saluto, o Latona, o fortunata,
Che partoristi inclíti figli, il rege
Apollo, e Artemi degli strali amante,
Questa in Ortigia e quello in l'aspra Delo,
China presso la palma alle correnti
D'Inopo, appo il gran monte, e il cinzio clivo.
Qual inno a te volger degg'io, che sempre
T'odi i begl'inni risuonar d'intorno?
Chè tu governi ogni ragion di canto
Sul continente, che i vitelli edúca,
E nell'isole. A te piaccion le balze
Tutte e le cime degli eccelsi monti
E i fiumi in seno all'océan correnti
E la spiaggia che al mar lenta declina

Ed i marini porti. O dirò come
Te, gioia de' mortali, in pria Latona
Partorisse di Cinto alla montagna,
Chinata entro dell'aspra isola, in Delo,
Che in grembo al mar si posa? Allo spirare
Armonico de' venti il nero flutto
D'ambo i lati salia sovra la terra.
Di là partito a ogni mortale imperi.

. . . . . .

Quanti n'ha Creta e il popolo d'Atene,
Inclita Eubea per navi, Ega ed Eresia,
Peparetо, che giace alla marina,
Il tracio Ato, le vette alte di Pelio,
La tracia Samo e il giogo d'Ida ombroso,
Sciro e Focea, l'altero d'Autocana
Monte, la ben fondata Imbro e d'approdi
Povera Lenno, la divina Lesbo,
Di Macaro Eolide albergo, e Chio
La più pingue di quante isole ha il mare,
La scoscesa Mimante e di Corico
L'altere cime, la fulgente Claro
E l'alto giogo d'Esagea, l'irrigna
Samo e le vette di Micale eccelsa,
Mileto e Coo, de' Meropi cittade
E l'alta Gnido e Carpato ventosa,
Nasso, Paro e Renea ricca di pietre.
Per tanti lochi errò Latona, il seno
Grave del lungi saettante, al figlio
Se mai trovar potesse una dimora
In quelle terre. Paventava ognuna
Tremando e accoglier non ardiva Apollo,
Benchè d'altre più pingue; infin che giunta
Non fu Latona veneranda a Delo
Ed alate parole interrogando
Le volse: « Delo, se del figlio mio
Esser vuoi stanza e che in te sorga un ricco
Tempio (non fia ch'altri giammai ti tocchi,

O che t'onori, nè di buoi feconda,
Nè di greggi sarai, nè produttrice
Di mosto, io credo, nè di mille e varie
Piante vestita; ma se il tempio, o Delo,
Avrai del lungi saettante Apollo
Tutti i mortali in te s'aduneranno
Ecatombi guidando, ed un immenso
D'arse vittime odor sempre tu avrai),
A lungo il re ti pascerebbe, e i numi
Ti salverian di mano altrui; chè pingue
Suol qui non è. » Sì disse e ne fu lieta
Delo e a sua volta rispondea: « Latona,
Del gran Ceo nobilissima figliuola,
Io volentier del lungi saettante
Rege il parto accorrei, chè sfortunata
Appo i mortali inver troppo io mi sono
E sì aver mi potria fama più bella.
Ma per questo, che udii, tremo, o Latona,
Nè a te l'ascondo. Baldanzoso troppo
Dicon che Apollo fia, che il primo seggio
Infra gli eterni e le mortali genti
Egli terrà sulla feconda terra.
Forte però nella mia mente io temo
E nel mio cor, che, come pria la luce
Egli miri del sol, l'isola spregi,
Ch'aspra di suolo io sono, e a precipizio
Mandandomi co' piedi in mezzo all'onde
Del mar mi cacci, ove il gran flutto in copia
Ognor suonando mi percuota il capo,
E vada ad altro suol, che gli talenti
Tempio e bosco a piantarvi. In me deserta
D'abitatori i polipi e le foche
Lor talami porranno e i non curati
Alberghi. Ma se tu giurarmi, o Dea,
Col gran giuro dei numi or non ricusi,
Che in questo loco innalzerà primiero
Il suo bel tempio, e oracolo ai mortali

Fia che lo renda, allora poi . . . . . .
. . . . . .
. . . . . Fra tutte
Genti, poi ch'egli è Dio, che molti ha nomi. »
Così diceva, e lo giurò Latona
Col grande giuro degli dei: « Cotesto
Sappia la terra, e quel che ne sovrasta
Ampio ciel, l'onda dello Stige il sappia,
Che nell'inferno scorre ed è il più grande,
Il più terribil giuramento ai numi
Eterni. Qui di vittime odorosa
Ognor sarà l'ara di Febo e il sacro
Podere, e onor tu sovra tutti avrai. »
Ella giurava, e appena il giuramento
Avea compiuto, che d'immensa gioia
Delo esultava al nascere del rege,
Che da lungi saetta. Nove giorni
E nove notti le insperate doglie
Trafissero Latona e a lei d'intorno
Erano tutte le più chiare dive.
V'era Dïona e Rea, la risonante
Anfitrite, l'Icnea Temide e tutte
L'altre immortali; ma non v'era Giuno
Dalle candide braccia. Entro la casa
Sedea di Giove adunator di nembi.
Sol di Latona non udì le grida
Ilitía, che i dolor veglia de' parti.
Ella stavasi assisa in su la vetta
D'Olimpo, avvolta entro dell'auree nubi
Per consiglio di Giuno, al par di neve
Bianca le braccia, che gelosa lungi
La rattenea, poi che valente e scevro
D'ogni biasmo un figliuolo era Latona
Da' bei capelli a partorir vicina.
Dalla ben lavorata isola intanto
Iri le dee mandâr per Ilitía
A prometterle in dono un gran monile

D'auree fila contesto e nove cubiti
Lungo, e imposero a lei, che la chiamasse
Senza saputa di Giunone; indietro
Non forse al dipartir con sue parole
La ritraesse. Il lor volere intese
Iri dal piè veloce a par del vento,
Correndo mosse ed in un punto a tergo
Lasciò i frapposti lochi e poi che giunta
Fu alla magion dei numi, all'alto Olimpo,
Stette alla soglia, ed Ilitía chiamando,
Le annunzïava con parole alate
Quanto imposto le avean le olimpie dive,
E poi che ad essa nell'amico petto
Persuaso ebbe il cor, mossero i piedi
Entrambe e nell'incesso eran simili
A pavide colombe.
Allor che in Delo
Giunse Ilitía, che al duol de' nascimenti
Assiste, sovra parto era Latona,
E di sgravarsi desïò. La palma
Strinse fra le sue braccia e le ginocchia
Puntò sovra la molle erba del prato.
Sotto di lei rise la terra, e in luce
Il figlio uscia. Tutte le dive un grido
Mandaro, o Febo, e ti lavâr con monda
Acqua purificandoti ed in veli
Ti fasciâr candidissimi, sottili
E non usati ancora ed auree bende
Poncanti intorno. Nè la madre il latte
Diede ad Apollo, che il turcasso ad aureo
Sostegno appende: a lui colle immortali
Mani la diva Temide porgea
Nettare da libar, soave ambrosia,
E Latona godea, chè un valoroso
Figliuol gli nacque e portator dell'arco.
Poi che il cibo immortal gustasti, o Febo,
Più frenar non potean l'auree cinture

Le tue membra d'indugio impazïenti,
Nè i vincoli tenerti. Ogni legame
Si ruppe e tosto agli immortali numi
Febo Apollo volgea queste parole:
« Ch'una cetera io m'abbia a me diletta
E un curvo arco, e ad ogn'uom l'oracol mio
L'immutabil voler di Giove annunzi. »
Sì disse e a camminar sull'ampia terra
Prese l'intonso Febo, ei che da lungi
Saetta, e tutte ne stupîr le dive.
D'oro splendea l'intera Delo, il figlio
Del gran Giove mirando e di Latona,
E gioiva che il Dio scelta l'avesse
Infra l'isole tutte e i continenti
A sua dimora, e sovr'ogn'altra amata
Entro il suo core; e tutta d'ôr fioria,
Come avvien che pei fior della sua selva
Talor s'orni la vetta alla montagna.
E tu, re Apollo, che d'argento hai l'arco
E da lungi saetti, or ti volgevi
All'ardua Cinto, ora vagando erravi
Per l'isole e le genti, e onore avesti
Di templi molti e di fronzute selve,
E le vedette a te fur care e i gioghi
Sommi de' monti eccelsi e i fiumi in seno
Al mar correnti. Ma il tuo core, o Febo,
Sovr'ogni cosa si compiacque in Delo.
Ed ivi i Gioni da le lunghe vesti
S'adunano coi figli e le pudiche
Spose e, memori, a te col pugilato
Arrecan gioia e con le danze e i canti,
Indicendo i certami; e, chi gli accolti
Gioni mirasse, allor ben li direbbe
Ed immortali e da vecchiezza immuni:
Chè tutti ei li vedria di grazia ornati,
E gioirebbe in cor, uomini e donne
Da le belle cinture contemplando,

Le preste navi e le dovizie molte.
Ma sovra questo maraviglia immensa,
La cui fama perir non potrà mai,
Sono le Delie vergini, ministre
Del lungi saettante. In pria cantando
Lodano Apollo, indi Latona e Artemide,
Che degli strali è amica, e gl'inni intuonano
Degli uomini vetusti e delle donne,
Onde alle accolte genti il cor si molce.
D'ogni mortal la voce, il suon de' crotali
Imitar sanno, e nell'udirle ognuno
La propria voce d'ascoltar direbbe,
Tale è nei canti lor bellezza ed arte.
Ma omai (propizio Apollo e insiem con esso
Artemide mi sia) tutte salvete
E in avvenir mi ricordate ancora,
E quando alcun fra gli uomini, che albergo
Han sulla terra, travagliato e stanco
Qui giunga ospite e chieda: « O verginelle,
Qual è il più dolce de' cantor, che intorno
Qui a voi s'aggiri, e più d'ogni altro al core
Co' suoi canti vi scenda? » E voi concordi
Benevolmente rispondete a lui:
« È un cieco, abitator della petrosa
Chio, e i suoi canti han sovra gli altri onore
E ancor l'avranno in avvenir. » Cotesto
Voi rispondete; e noi per quante andremo
Popolose città sovra la terra
Vi recherem le vostre lodi, e tutti
Ci crederan, come si crede al vero.
Nè mai negl'inni io scorderommi Apollo
Dal lungi saettante arco d'argento,
Figlio a Latona da le belle chiome.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

INDICE

CLASSE DELLE SCIENZE MORALI, STORICHE, E FILOLOGICHE

Considerazioni sulla dottrina di Socrate, del Cav. G. M. Bertini *pag.* 1

Delle dottrine dell'antica scuola pitagorica contenute nei versi d'oro, del Cav. Domenico Capellina..... » 37

Documens genevois inédits pour la généalogie historique de la maison souveraine de Savoie depuis le douzième siècle jusqu'au quinzième, par M. Édouard Mallet..... » 111

Osservazioni intorno all'inno Omerico ad Apolline Delio, del Prof. Domenico Capellina..... » 145

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY.

V.° Si stampi:

Barone GIOANNI PLANA PRESIDENTE.